

Tentamen i FUF050 Subatomär Fysik, F3

Tid:	2018-10-12 14:00 - 18:00
Tillåtna hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd räknare
Poäng:	Totalt 75 poäng, för betyg 3 krävs 40 poäng, för betyg 4 krävs 60 poäng, för betyg 5 krävs 80 poäng. Ev. poäng från inlämningar inkluderas.
Examinator:	Andreas Ekström (besök 15:00 + 16:30 tlf: 0709-934393)
Rättningsgranskning:	Tid och plats annonseras på ping-pong.

1. Kvanttalen för totalt rörelsemängdsmoment (J) och paritet (Π) skrivs ofta J^Π . Anta att en atomkärna har ett grundtillstånd $J^\Pi = \frac{3}{2}^+$ och fyra exciterade tillstånd $J^\Pi = \frac{7}{2}^+, \frac{5}{2}^+, \frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-$ i den ordningen, dvs att det energimässigt lägst liggande tillståndet står först i listan. Rita ett nivåschema, rita in alla möjliga gammasönderfall, samt avgör multipolaritet och huruvida övergången är av magnetisk eller elektrisk karaktär för den mest sannolika övergången i alla gammasönderfall.

(10 p)

2. En proton (p) och en neutron (n) i vila kan bilda en deuteron (d), enligt reaktionen $p + n \rightarrow d + \gamma$. Om vi försummar deuteronens rekylenergi, vilken energi E_γ har den utsända fotonen? Varför är det en god approximation att faktiskt försumma rekylenergin? Hur stor är deuteronens rekylenergi i förhållande till E_γ ?

(10 p)

3. En atomkärnas storlek kan mätas med hjälp av elektronspridning. Storleken på det uppmätta spridningstvårsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}}$ avgörs av laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$, dvs atomkärnans protondensitet, vilken i sin tur är en god approximation till atomkärnans utsträckning i rummet. Förhållandet mellan det uppmätta tvårsnittet och Rutherfordtvårsnittet för spridning mot en punktladdning $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punkt}}$ ges av den så kallade formfaktorn $F(\mathbf{q}^2)$ enligt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punkt}} \cdot |F(\mathbf{q}^2)|^2$$

där $\mathbf{q}$ är skillnaden mellan elektronens rörelsemängd före och efter spridning, formfaktorn ges av $F(\mathbf{q}^2) = \frac{1}{Ze} \int \exp\{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar\} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$, och den totala laddningen i atomkärnan är $Ze = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$. Antag nu att laddningstätheten är sfäriskt symmetrisk, dvs $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$, och att vi har mätt formfaktorn för små värden av $\mathbf{q}$ så att $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \ll 1$. Härled ett uttryck som relaterar formfaktorn till atomkärnans elektriska rms radie $r_{\text{rms}}^2 \equiv \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$.

(15 p)

4. Antag att du har en mängd tillgänglig energi motsvarande 4.5 GeV. Vilken är den tyngsta isotopen du teoretiskt sett kan skapa från ingenting genom att enbart omvandla energin du har till förfogande. Välj mellan följande tre isotoper ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{H}$. Motivera ditt svar.

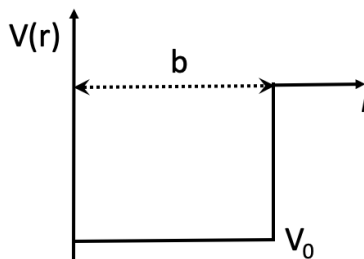
(10 p)

5. Vilka av följande reaktioner är ej tillåtna enligt de för tillfället kända egenskaperna för svag, elektromagnetisk, och stark växelverkan. Motivera dina svar.

- $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$
- $e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$
- $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + \Sigma^+ + K^-$
- $p^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$
- $p^+ \rightarrow e^+ + n + \nu_e$
- $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$
- $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

(10 p)

6. En sfärisk lådpotential $V(r)$ i 3 rumsdimensioner är en väldigt enkel modell av den starka kraften som binder en proton och en neutron till en deuteron. Antag att lådpotentialen har en utsträckning $b = 1.9 \times 10^{-15}$ m, och ett djup $V_0 = 40$ MeV. Det vill säga, att potentialen ges av $V(r) = -V_0$ för $0 \leq r \leq b$ och $V(r) = 0$ för $r > b$, där r motsvarar avståndet mellan protonen och neutronen. Antag vidare att protonen och neutronen har ett relativt banrörelsemängdsmoment motsvarande ett kvanttal $\ell = 0$. Ignorera spinn. Använd även att $m_n = m_p = M = 940$ MeV/ c^2 , samt att $kb = \frac{\pi}{2}$, där $k = \sqrt{\frac{M(V_0 - E_d)}{\hbar^2}}$ och $E_d > 0$ betecknar deuteronens bindningsenergi i den här modellen.



Figur 1: Skiss av lådpotentialen som vi kan använda som modell för den starka kraften mellan en proton och en neutron.

Notera att den radiella delen av Laplacianen ∇^2 uttryckt i sfäriskt polära koordinater ges av

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right).$$

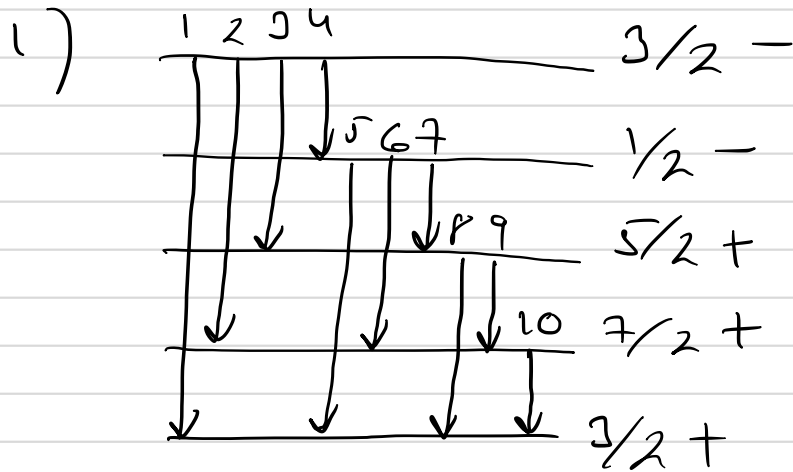
Lös Schrödingerekvationen för den här modellen, och beräkna E_d samt hur stor sannolikheten är att protonen och neutronen befinner sig på ett inbördes avstånd kortare än b ?

(tips: utnyttja en omskrivning av vågfunktionen $\Psi(r) = u(r)/r$, där $u(r) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0$ samt $u(r) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$.)

(20 p)

Lösungsskizze zum Ombenamen 5

F0 F050, 2018/2019



10 Übergang. $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{J}_\gamma$

$$|J_i - J_f| \leq J_\gamma \leq J_i + J_f$$

$$\pi_i = \pi_f \pi_\gamma \quad \pi_\gamma = \begin{cases} (-1)^{J_\gamma}, & E(J_\gamma) \\ (-1)^{J_\gamma+1}, & M(J_\gamma) \end{cases}$$

1) $J_\gamma = 0, 1, 2, 3 \quad \pi_\gamma = -$

$1, 0, \underline{1}, M2, E3$

$1, 2 \rightarrow 3/2 +$

2) $J_\gamma = 2, 3, 4, 5 \quad \pi_\gamma = -$

$M2, E3, M4, E5$

$3/2 - \rightarrow 7/2 +$

3) $J_\gamma = 1, 2, 3, 4 \quad \pi_\gamma = -$

$E1, M2, E3, M4$

$3/2 - \rightarrow 5/2 +$

$$4) \quad J_Y = 1, 2 \quad \pi_Y = + \quad \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$$

M1, E2

$$5) \quad J_Y = 1, 2 \quad \pi_Y = - \quad \frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^+$$

E1, M2

$$6) \quad J_Y = 3, 4 \quad \pi_Y = - \quad \frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^+$$

E3, M4

$$7) \quad J_Y = 2, 3 \quad \pi_Y = - \quad \frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{5}{2}^+$$

M2, E3

$$8) \quad J_Y = 1, 2, 3, 4, \pi_Y = + \quad \frac{5}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+$$

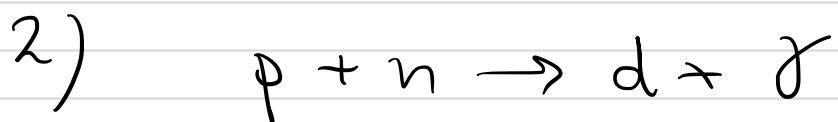
M1, E2, M3, E4

$$9) \quad J_Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \frac{5}{2}^+ \rightarrow \frac{7}{2}^+$$

M1, ... $\pi_Y = +$

$$10) \quad J_Y = 2, 3, 4, 5 \quad \frac{7}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+$$

E2, M3, ... $\pi_Y = +$

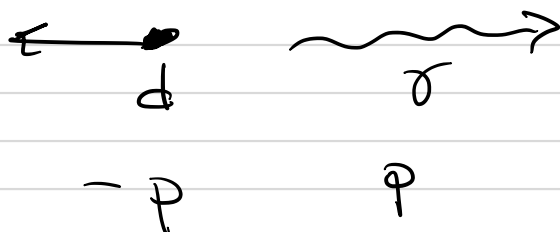


Q-värde för reaktionen:

$$Q [m_p + m_n - m_d] = [1.007825 + 1.008665 - 2.014102] u \times 931.494 \text{ MeV}/u$$

$$= 2.224 \text{ MeV}$$

Q-värdet (frigjord energi) fördelas
 $p \hat{=} E_\gamma$ och kinetisk energi för
 deuteronen.



$$Q = \frac{p^2}{2m_d} + pc$$

3-rörelsemängd för
 d eftersom $Q \ll m_d c^2$

$$2Qm_d = p^2 + 2(pc)m_d$$

$$p = -m_d c \pm \sqrt{(m_d c)^2 + 2Qm_d} =$$

$$\{p > 0\} = m_d c \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_d c^2}} \right)$$

$$p \approx m_d c \left(-1 + 1 + \frac{Q}{m_d c^2} \right) = \frac{Q}{c}$$

$$\Rightarrow E_\gamma = pc \approx 2.224 \text{ MeV}$$

Rehylenen für d $\bar{m}$

$$\sim \frac{p^2}{2m_d} = \frac{2.224^2}{[2 \cdot 2.014102] \cdot 931.494} =$$

$$= 1.32 \times 10^{-3} \text{ MeV}$$

$$\frac{\frac{p^2}{2m_d}}{E_\gamma} = 6 \cdot 10^{-4}$$

Sehr klein
rehylenen!

$$2) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{punkt}} \cdot |F(\vec{\zeta})|^2$$

$$F(\vec{\zeta}) = \frac{1}{Z_e} \int e^{i\vec{\zeta} \cdot \vec{r}/\hbar} g(\vec{r}) d^3r$$

$$Z_e = \int g(\vec{r}) d^3r$$

$$g(\vec{r}) = g(r) \quad , \quad \text{für } r \leq a$$

$$F(\vec{\zeta}) = \frac{2\pi}{Z_e} \int_0^\infty e^{i\zeta r \cos\theta/\hbar} g(r) r^2 dr d(\cos\theta)$$

$$= \frac{2\pi}{Z_e} \int_0^\infty \left[\frac{\hbar}{i\zeta r} e^{i\zeta r \cos\theta/\hbar} g(r) \right]_{-1}^1 r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi\hbar}{Z_e\zeta} \int_0^\infty \frac{1}{2i} \left[e^{i\zeta r/\hbar} - e^{-i\zeta r/\hbar} \right] g(r) r dr$$

$$= \frac{4\pi\hbar}{Z_e\zeta} \int_0^\infty \sin\left(\frac{\zeta r}{\hbar}\right) r g(r) dr$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(\xi^2) &\approx \frac{4\pi\hbar}{Ze\xi} \int_0^\infty \left(\frac{\xi r}{\hbar} - \frac{1}{3} \frac{\xi^3 r^3}{\hbar^3} + \dots \right) r g(r) dr \\
&= \frac{4\pi}{Ze} \int r^2 g(r) dr - \frac{4\pi\xi^2}{Ze\hbar^2} \frac{1}{3!} \int_0^\infty r^4 g(r) dr \\
&= 1 - \frac{\xi^2}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle \quad \text{där} \\
\langle r^2 \rangle &\equiv \frac{4\pi}{Ze} \int r^2 g(r) r^2 dr
\end{aligned}$$

4)

mass (u)	isotope
2.014102	^2H
3.016049	^3H
3.0160293	^3He

$$1u = 931.494 \text{ MeV}$$

$$\text{mass (MeV)} \quad \times 2$$

$$1876$$

$$3752$$

$$2809$$

$$5618$$

$$2809$$

$$5618$$

^2H endast

för att

beräkna

Baryontal

och se vilka

antipartiklar

och så

$$5/ \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma \quad \text{Leptontal}$$

$$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma \quad \text{Elektron ledding}$$

$$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + \Sigma^+ + K^- \quad \text{--- " ---}$$

$$p^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \quad \text{Baryon tal}$$

$$p^+ \rightarrow e^+ + n + \nu_e \quad \text{Energilevering}$$

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{OK!}$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_e \quad \text{OK!}$$

6/ Radiale Schrödingergleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + V(r) \psi(r) = E \psi(r)$$

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r}, \quad u \rightarrow z \quad r \rightarrow 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u(r)}{r} \right) + V(r) \frac{u(r)}{r} = E \frac{u(r)}{r}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u(r)}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(-r^{-2} u + r^{-1} u' \right) \right) =$$

$$= \frac{d}{dr} \left(-u + r u' \right) = -\cancel{u} + \cancel{u} + r u''$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r} u'' + V(r) \frac{u}{r} = E \frac{u}{r}$$

$$-\underbrace{\frac{\hbar^2}{2\mu}}_M u'' + V(r) u = E u$$

$$\sim u'' + \frac{M V(r)}{\hbar^2} u = \frac{M E}{\hbar^2} u$$

for $r \leq b$ $V(r) = -V_0$

$$-u'' = \left(\frac{M}{\hbar^2} V_0 + \frac{M}{\hbar^2} E \right) u$$

$E = -E_d$, E_d deuteron binding energy.

$$-u'' = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - E_d) u$$

$$-u'' = k^2 u, \quad k = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} (V_0 - E_d)}$$

$u(r) = A \sin(kr)$, $\dagger_2$

$$u''(r) = -A k^2 \sin(kr)$$

for $r > b$, $V(r) = 0$

$$-u'' = \frac{M}{\hbar^2} (0 - E_d) u$$

$$u'' = \frac{M}{\hbar^2} E_d u, \quad K = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} E_d}$$

$u(r) = B e^{-Kr}$, $\dagger_2$

$$u''(r) = K^2 e^{-Kr}$$

$$\begin{cases} u_{<}(r) = A \sin(kr) & , r \leq b \\ u_{>}(r) = B e^{-\kappa r} & , r > b \end{cases}$$

1) • $u_{<}(r=b) = u_{>}(r=b)$ continuity in $r=b$

2) • $u'_{<}(r=b) = u'_{>}(r=b)$ even for derivatives

$$A \sin(kb) = B e^{-\kappa b}$$

$$A k \cos(kb) = -\kappa B e^{-\kappa b}$$

$$\Rightarrow \kappa \cot(kb) = -\kappa$$

$$\Rightarrow \cot(kb) = -\frac{\kappa}{k} = -\sqrt{\frac{E_d}{V_0 - E_d}}$$

$$\kappa b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = B e^{-\kappa b}$$

normalizing: $1 = \int_0^{\infty} |u(r)|^2 4\pi r^2 dr$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} |u(r)|^2 dr =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^b A^2 \sin^2(hr) dr + \int_b^\infty B^2 e^{-2kr} dr \\
&= 4\pi A^2 \left[\frac{r}{2} - \frac{\sin(2hr)}{4h} \right]_0^b + \\
&+ 4\pi B^2 \left[-\frac{1}{2k} e^{-2kr} \right]_b^\infty =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi A^2 \left[\frac{b}{2} - \frac{\overbrace{\sin(2hb)}^=}{4h} \right] + \\
&+ 4\pi B^2 \frac{1}{2k} e^{-2kb} =
\end{aligned}$$

$$= 4\pi \left\{ A^2 \frac{b}{2} + \frac{1}{2k} \underbrace{(B e^{-kb})^2}_{A^2} \right\} =$$

$$= 4\pi A^2 \left\{ \frac{b}{2} + \frac{1}{2k} \right\} =$$

$$= 2\pi A^2 b \left(1 + \frac{1}{kb} \right)$$

$$\Rightarrow A = \left[2\pi b \left(1 + \frac{1}{k_b} \right) \right]^{-1/2}$$

$$B = A e^{k_b}$$

seh att $r \leq b : P = \int_0^b |\psi(r)|^2 d^3r$

$$P = 4\pi \int_0^b A^2 \sin^2(kr) dr =$$

$$= 4\pi A^2 \left[\frac{r}{2} - \frac{\sin(2kr)}{4k} \right]_0^b =$$

$$= 4\pi A^2 \left[\frac{b}{2} \right] = 2\pi A^2 b =$$

$$= 2\pi b \left[2\pi b \left(1 + \frac{1}{k_b} \right) \right]^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k_b} \right)^{-1}$$

$$b = 1.9 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$H = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} E_d} \quad \text{Hitta } E_d.$$

$$kb = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} (V_0 - E_d)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - E_d) = \frac{\pi^2}{4b^2}$$

$$\frac{940}{(\hbar c)^2} (40 - E_d) = \frac{\pi^2}{4b^2}$$

$$\frac{\pi^2 (\hbar c)^2}{940 \text{ MeV} \cdot 4 (1.9 \text{ fm})^2} = 40 \text{ MeV} - E_d$$

$$\frac{\pi^2 (197.3 \text{ MeV fm})^2}{940 \text{ MeV} \cdot 4 \cdot 1.9^2 \text{ fm}^2} = 40 \text{ MeV} - E_d$$

$$28.2 \text{ MeV} = 40 \text{ MeV} - E_d$$

$$\Rightarrow E_d = 11.7 \text{ MeV!}$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{M}{\pi^2} E_d} = \sqrt{\frac{940 \text{ MeV} \cdot 11.7 \text{ MeV}}{(197.3 \text{ fm MeV})^2}}$$

$$= 0.53 \text{ fm}^{-1}$$

$$\Rightarrow P = \left(1 + \frac{1}{k b}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{0.53 \text{ fm}^{-1} \cdot 1.9 \text{ fm}}\right)^{-1} =$$

$$= (1.99)^{-1} \approx 0.5.$$