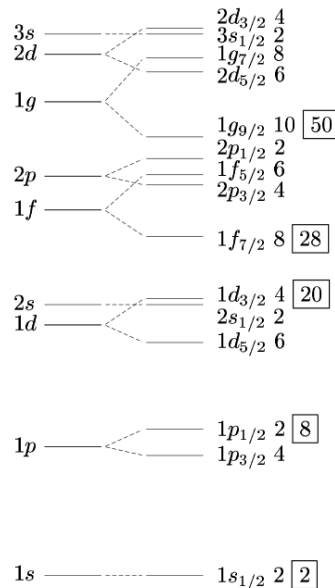


Tentamen i FUF050 Subatomär Fysik, F3

Tid: 2018-08-30 14:00 - 18:00
 Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd räknare
 Poäng: Totalt 75 poäng, för betyg 3 krävs 40 poäng, för betyg 4 krävs 60 poäng, för betyg 5 krävs 80 poäng.
 Ev. poäng från inlämningar inkluderas.
 Examinator: Andreas Ekström (besök 15:00 + 16:30 tlf: 0709-934393)
 Rättningsgranskning: Tid och plats annonseras på ping-pong.

- Enligt skalmodellen för atomärnor kan vi fylla energinivåerna för proton- och neutron-tillstånden, var för sig, enligt figur 1 nedan. Besvara varje delfråga i uppgiften med hjälp av skalmodellen och motivera din svar tydligt.



Figur 1: Enpartikeltillstånd i skalmodellen. Den högra delen visar energiuppdelningen på grund av spinn-ban-kopplingen i den starka kraften. Kvanttalerna för varje enpartikeltillstånd är givna på formen nl_j med spektroskopisk notation $s, p, d, f, g, \dots$ för bankvanttalet $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, det kopplade rörelsemängdsmomentet ges av $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, där s betecknar nukleonens spinnkvanttal, och $n = 1, 2, 3, \dots$ är ett nodkvanttal.

- Vilket kvanttal (J) för totalt rörelsemängdsmoment och vilken paritet (π) kan vi förvänta oss för grundtillståndet i var och en av följande kärnor; ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{41}\text{Sc}$ (4 p)

- b. Vilka kvanttal J och π kan vi förvänta oss för grundtillståndet och det första exciterade tillståndet i ^{17}O ? (3 p)
- c. Det första exciterade tillståndet i ^{17}O γ -sönderfaller till grundtillståndet, vilken elektromagnetisk multipol för γ -fotonen dominerar i sönderfallet? (3 p)
- d. Spinn-ban-kopplingen $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ medför att m_l, m_s ej längre är goda kvanttal ty motsvarande operatorer kommuterar ej längre med Hamiltonoperatören. Istället måste vi införa det totala rörelsemängdsmomentet $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ för enpartikeltillstånden. Visa att förväntningsvärdet av spinn-ban-kopplingen $\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle$ i skalmodellen ges av

$$\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle = \hbar^2 \begin{cases} l/2 & \text{om } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1)/2 & \text{om } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

(5 p)

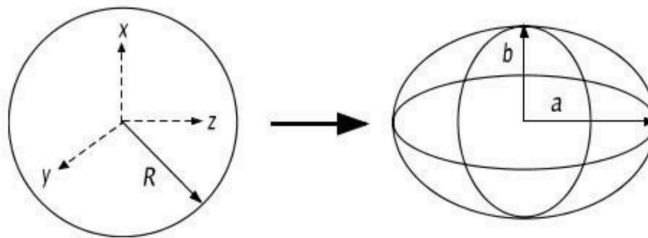
2. Inte alla atomkärnor är sfäriska. Det elektriska kvadrupolmomentet Q

$$eQ \equiv \int \rho(\mathbf{r})(3z^2 - r^2) d^3\mathbf{r},$$

där $\rho(\mathbf{r})$ betecknar densitetsfördelningen av elektrisk laddning (e betecknar elementarladdningen) i atomkärnan, är ett mått på avvikelse från sfäricitet, till exempel en ellipsoid form. För en sfärisk kärna är $Q = 0$ b (1b=100 fm²). Visa att Q för en ellipsoid, och uniform, laddningsfördelning med total laddning Ze , i vila, med z -axeln som symmetriaxel och a, b som halvaxlar (se figur 2) ges av

$$Q = \frac{2}{5} Z(a^2 - b^2).$$

(10 p)

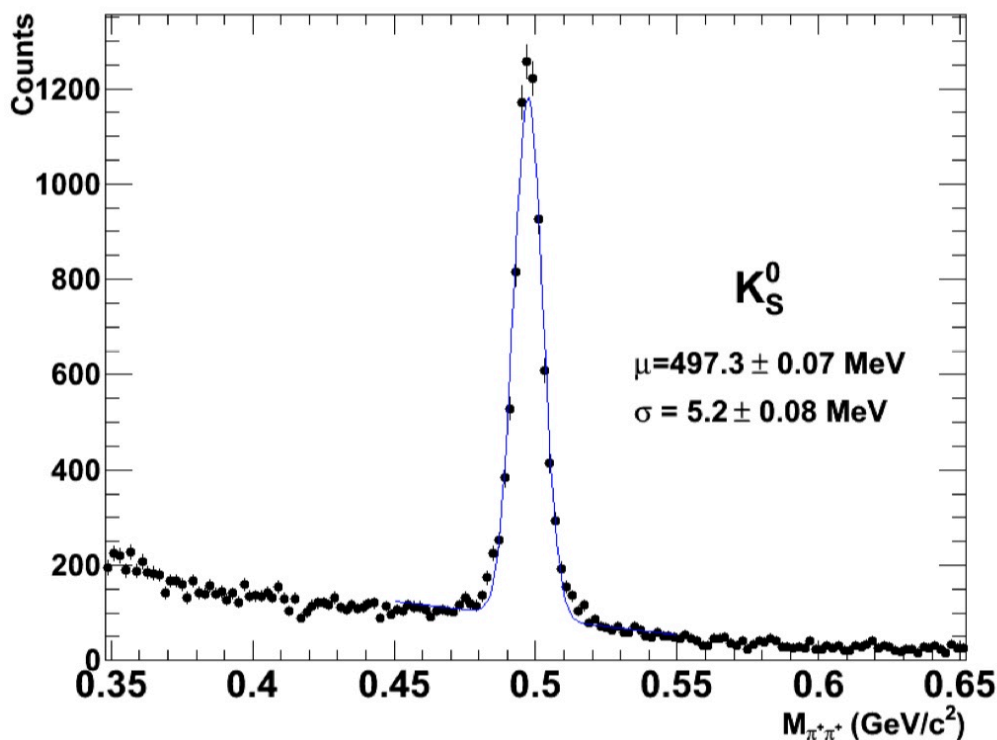


Figur 2: Sfär deformerad till en ellipsoid.

3. Kol-14-metoden kan användas för att åldersbestämma organiskt material. Växter tar upp kol (koldioxid) från luften vilket på naturlig väg blir en del av vävnaden hos levande djur. Fördelningen av ^{12}C (stabil) och ^{14}C (halveringstid 5730 år; β^- -sönderfall $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$) i levande materia är vanligtvis densamma som i atmosfären. När en levande varelse dör så upphör även intaget av kol, och andelen ^{14}C i vävnaden börjar att avta. Hur många tusen år gammalt är ett vävnadsprov på 1 g som har en uppmätt β^- -aktivitet på 2.1 sönderfall per minut? Antag dessutom att provet enbart består av en blandning mellan ^{12}C och ^{14}C och att man utifrån atmosfäriska mätningar kan utgå ifrån att andelen ^{14}C i provet ursprungligen var 1.2×10^{-12} .

(15 p)

4. Reaktionen $p + n \rightarrow p + n$, dvs elastisk spridning av protoner mot neutroner, har i årtionden använts för att studera den starka kraften mellan nukleoner.
- Vilken är den maximala kinetiska energin, i labbsystemet, som den inkommande protonen kan ha för att vi skall vara säkra på att det inte kan bildas en verklig pion π^0 i spridningsprocessen. Antag att neutronen befinner sig i vila i labbsystemet. (6 p)
 - Spridningsexperimentet $p + n \rightarrow p + n$ är egentligen omöjligt att genomföra med fria neutroner ty dessa är instabila och sönderfaller via $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ med en halveringstid på ungefär 10 minuter. Vilken växelverkan är ansvarig för sönderfallet? Motivera ditt svar. Rita även ett Feynmandiagram på kvarknivå som beskriver sönderfallsprocessen. (4 p)
5. Vid experimentella studier inom partikelfysik bildas ofta flera olika kortlivade partiklar som sedan sönderfaller. Ofta är partiklarna så pass kortlivade att det är omöjligt att detektera dessa direkt. Endast sönderfallsprodukterna detekteras. Låt oss anta att en neutral Kaon kallad K_S^0 har producerats i någon reaktion. Kaonen sönderfaller enligt $K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, det vill säga till två laddade pioner, för vilka energin och rörelsemängden mäts i detektorsystemet. Ett invariant masspektrum från ett sådant experiment vid ALICE på CERN visas i figur 3. Förklara, i detalj, spektrats utseende, och särskilt varför det existerar en väldefinierad topp som motsvarar Kaonens massa (497 MeV/c²). (10 p)



Figur 3: Ett invariant masspektrum med experimentell data (svarta punkter) och en väldefinierad topp markerad med en blåfärgad kurvanpassning.

6. En mycket viktig term i den semiempiriska massformeln är den så kallade Coulombtermen:

$$+a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \approx a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}},$$

där konstanten $a_c = 0.697$ MeV bestämts med hjälp av experimentell massdata, och $c = 1$. Coulombtermen beskriver effekten av Coulombenergin från Z stycken positivt laddade ($+1e$) protoner i en atomkärna med A stycken nukleoner.

- a. Härled det klassiska uttrycket $\frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ för den totala elektrostatiska energin, dvs Coulombenergin, i en homogent laddad sfär med radie R . Antag att den totala laddningen $Q = Ze$ är uniformt fördelad i volymen. (8 p)
- b. Utnyttja det klassiska uttrycket ovan för den totala elektrostatiska energin i en homogent laddad sfär för att uppskatta ett teoretiskt värde på a_c . Använd att radien R för en atomkärna kan approximeras med $1.2 \cdot A^{1/3}$ fm. (7 p)

Lösningsskiss till Omtentamen i
FOF050 20180810

1. a) ${}^3\text{He}$: $Z=2 \Rightarrow (1s_{1/2})^2$ füllt
 $N=1 \Rightarrow (1s_{1/2})^1$ 1 vakans / mal
bestimmer $J = \frac{1}{2}$ $L=0 \Rightarrow \pi = +$

^4He : $Z=2$, $N=2$ Helium fyllda
 $1s_{1/2}$ tillstånd.
 $J=0$ $\pi=+$

$\text{ }^6\text{O}: z=8 \Rightarrow (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2$

$N=8 \Rightarrow$ ———— " ————

Hel + fyldt skal. $J=0, \pi = +$

41 Sc:

$$N=20 \Rightarrow (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6 (2d_{5/2})^4$$

$$Z=21 \Rightarrow \text{---} \text{---} + (1f_{7/2})^1$$

$$\Rightarrow J = \frac{7}{2} \quad l=0 \Rightarrow \pi = -$$

b) $^{17}\text{O} : Z=8$
 $N=9$ Se a) $^{16}\text{O} + n$ i $1d_{5/2}$

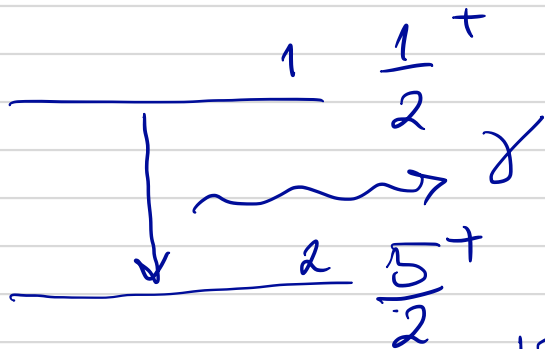
ger $J = \frac{5}{2} \quad l=2 \Rightarrow \pi = +$

som grundtillstånd

Excitation av 1 neutron från $1d_{5/2}$ till $2s_{1/2}$ är sannolikt enklare än att excitera en neutron/proton från $1s$ skalen.

$\Rightarrow$ Första exciterade tillståndet
 $J = \frac{1}{2} \quad \pi = +$

c)



$J_1 = \frac{1}{2} \quad J_2 = \frac{5}{2}$

$\vec{J}_1 = \vec{J}_\gamma + \vec{J}_2$

$|\vec{J}_\gamma - \frac{5}{2}| \leq \frac{1}{2} \leq \vec{J}_\gamma + \frac{5}{2}$ Laggt

$\pi_\gamma \Rightarrow J_\gamma = 2, 3$

$\pi_F = (-)^{J_F}$
 $\pi_M = (-)^{J_M+1}$

$(\pi_\gamma = +, \pi_1 = \pi_2 = +) \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E2} \\ \underline{M3} \end{array} \right.$

d) $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ från kvantmek vet vi:

$$\vec{J}^2 |\chi\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\chi\rangle$$

$$\vec{L}^2 |\chi\rangle = \hbar^2 l(l+1) |\chi\rangle$$

$$\vec{S}^2 |\chi\rangle = \hbar^2 s(s+1) |\chi\rangle$$

Vi vet också att $s = \frac{1}{2}$ för nukleoner

$$\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

$$\text{för } j = l + \frac{1}{2} \dots \Rightarrow \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} l$$

$$j = l - \frac{1}{2} \dots \Rightarrow \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = -\hbar^2 \frac{1}{2} (l+1)$$

$$2. \quad eQ \equiv \int g(\vec{r}) (3z^2 - r^2) d^3\vec{r}$$

$$\text{Volym ellips: } V = \frac{4\pi b^2 a}{3}$$

$$\text{Total laddning: } Ze$$

$$\Rightarrow g(\vec{r}) = \frac{3Ze}{4\pi b^2 a}$$

$$eQ = \frac{3Ze}{4\pi b^2 a} \int (3z^2 - r^2) d^3r$$

$$\Rightarrow Q = \frac{3Z}{4\pi b^2 a} \int (3z^2 - r^2) dx dy dz$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 3z^2 - r^2 = 2z^2 - x^2 - y^2$$

$$\text{Variabelbyte } \begin{cases} x = bx' \\ y = by' \\ z = az' \end{cases}$$

$$Q = \frac{3Z}{4\pi b^2 a} \int (2a^2 z'^2 - b^2 x'^2 - b^2 y'^2) |b^2 a| dx' dy' dz' =$$

$$= \frac{3Z}{4\pi} \int 2a^2 z'^2 - b^2 x'^2 - b^2 y'^2 dx' dy' dz'$$

$$\int x'^2 dx' dy' dz' = \int y'^2 dx' dy' dz' = \int z'^2 dx' dy' dz' = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{3z}{4\pi} (2a^2 - b^2 - c^2) \frac{4\pi}{15} =$$

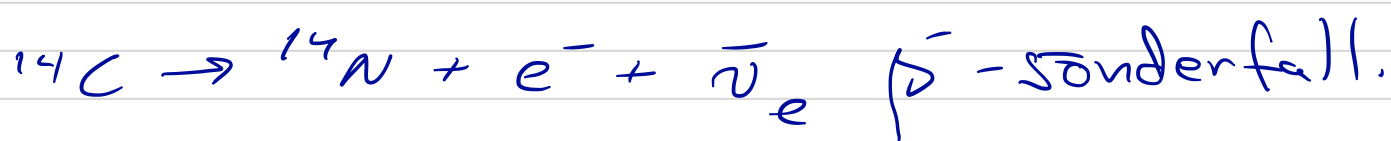
$$= \frac{2 \cdot 3 z}{15} (a^2 - b^2) = \frac{2}{5} z (a^2 - b^2)$$

3. Uppgift 2.7 i Martin

$$1\text{g (kol)} \text{ vävnad: } \frac{1}{12} \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{\text{Avogadros tal}} \text{ atomer} = 5.02 \cdot 10^{22}$$

Ursprungligt antal ^{14}C atomer N_0
i voreken när den dog, (vid $t=0$)

$$1.2 \cdot 10^{-12} \cdot 5.0 \cdot 10^{22} = 6 \cdot 10^{10} \text{ st}$$



Radioaktivt sönderfallslag

$$N(t) = N_0 e^{-t\lambda}$$

$$\text{Aktivitet } A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau}, \quad t_{1/2} = \tau \ln 2$$

$$^{14}\text{C} \quad t_{1/2} = 5730 \text{ år} \Rightarrow \tau = 8267 \text{ år}$$

$$^{14}\text{C} \quad \lambda = \frac{1}{8267 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60} \text{ min}^{-1}$$

β^- aktivitet vid $t=0$

$$A(t=0) = \lambda_{^{14}\text{C}} N(t=0) = \lambda_{^{14}\text{C}} N_0$$

$$= \frac{6 \cdot 10^{10}}{8267 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60} = 13.8 \text{ min}^{-1}$$

β^- aktivitet nu, dvs $t=t^*$

$$A(t=t^*) = \lambda_{^{14}\text{C}} N_0 e^{-t^* \lambda_{^{14}\text{C}}} = 2.1 \text{ min}^{-1}$$

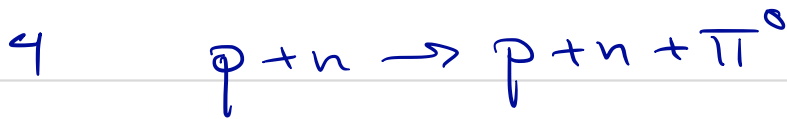
$$\frac{A(t=0)}{A(t=t^*)} = \frac{\cancel{\lambda_{^{14}\text{C}}} N_0}{\cancel{\lambda_{^{14}\text{C}}} N_0 e^{-t^* \lambda_{^{14}\text{C}}}} = \frac{13.8}{2.1}$$

$$\Rightarrow e^{t^* \lambda_{^{14}\text{C}}} = \frac{13.8}{2.1}$$

$$t^* = \frac{1}{\lambda_{^{14}\text{C}}} \ln\left(\frac{13.8}{2.1}\right) \approx 15500 \text{ år}$$

Nämnadsprovet är ~ 16000 år gammalt.

$$\underline{c=1}$$



I Lab-systemet:
innan reaktion

$$p = (\bar{E}_p, \vec{p}_p)$$

$$p_n = (\bar{E}_n, \vec{0})$$

↓
 m_n

4-vektorm.

I CM-systemet
efter reaktion

precis energi för
att bilda

$$p_n + p_p + p_\pi = (\bar{E}_n + \bar{E}_p + \bar{E}_\pi, \vec{0})$$

$$= (m_n + m_p + m_\pi, \vec{0})$$

4-vektorm. skalares

(Kvadrera $p^2 = m^2$)

↑ invariant massa

$$(p_n + p_p)^2 = (p_n + p_p + p_\pi)^2 = (m_n + m_p + m_\pi)^2$$

$$p_n^2 + p_p^2 + 2p_n p_p = m_n^2 + m_p^2 + m_\pi^2 + 2(m_n m_p + m_n m_\pi + m_p m_\pi)$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{m_n^2 + m_p^2} + 2m_n \bar{E}_p = \cancel{m_n^2 + m_p^2} + m_\pi^2 + 2(m_n m_p + m_n m_\pi + m_p m_\pi)$$

$$\bar{E}_p = \frac{m_\pi^2 + 2(m_n m_p + m_n m_\pi + m_p m_{\bar{\pi}})}{2m_n}$$

$$m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}$$

$$m_n = 939.57 \text{ MeV}$$

$$m_p = 938.27 \text{ MeV}$$

$$\rightarrow \bar{E}_p = 1217.74 \text{ MeV}$$

$$T_p = \bar{E}_p - m_p = 279.47 \text{ MeV}$$

Maximal kineticheskaya energiya
 dlya protonov v lab 279.47 MeV

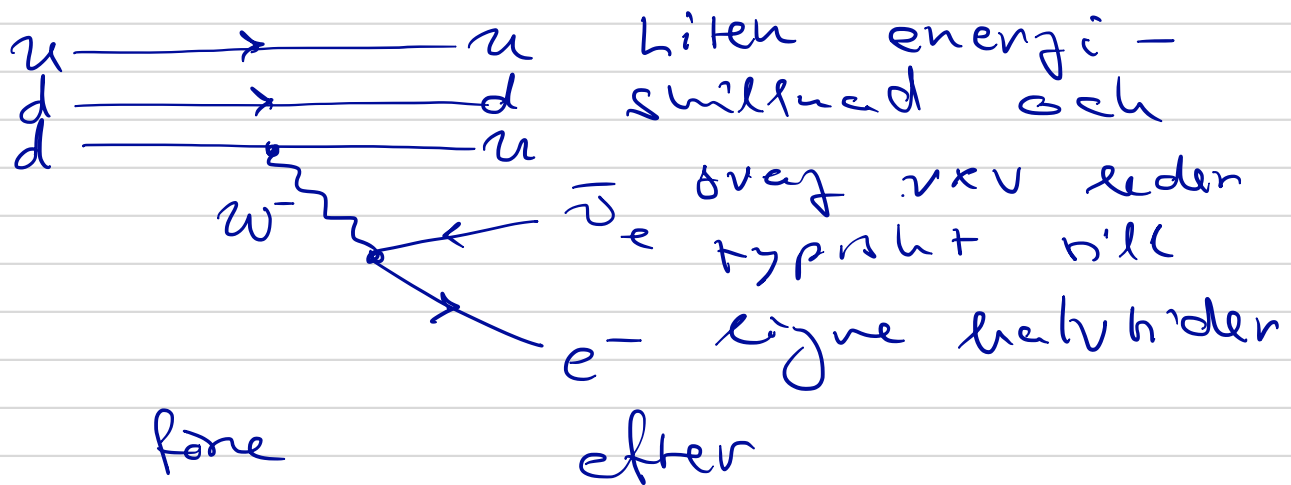
b) neutronens sönderfall i vila

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

kvarkinnehåll $n = |udd\rangle$

$p = |uud\rangle$

$$m_n = 939.57 \text{ MeV}$$



$$N_u = 1$$

2 (Doch försvaret beryouta!)

$$N_d = 2$$

1

$\begin{cases} N_u \text{ ej bevarat} \\ N_d \text{ ej bevarat} \end{cases} \Rightarrow \text{ej stark eller em vxv.}$

Lepton (elektron) tal

$$L_e = N_{e^-} - N_{e^+} + N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e} = 0 \text{ före och efter.}$$

SVAG vxv!

5

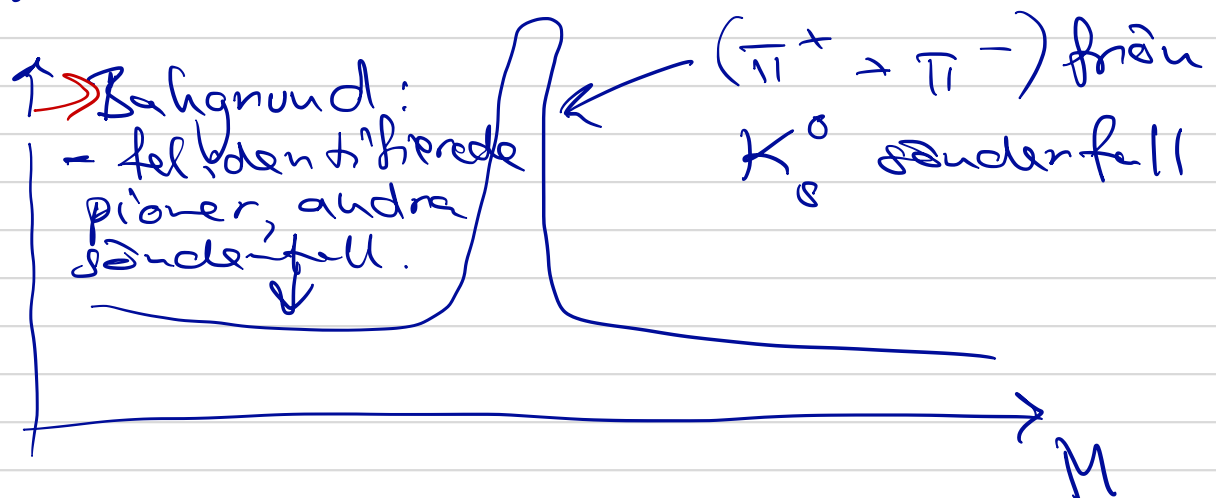
• Mät $\bar{E}_{\pi^+}, \bar{E}_{\pi^-}, \vec{p}_{\pi^+}, \vec{p}_{\pi^-}$ (*)

• Fyrrelekemängden bevaras.

$$p_K = p_{\pi^+} + p_{\pi^-}$$

• $p^2 = m^2$ är en skalär.
(invariant), dvs
har samma värde
i alla koordinatsystem.

p_K kan rekonstrueras från (*)



6 Den lagrade energin kommer från arbetet att föra samman laddningarna till en sfär.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad \text{Elektrostatisk
potentiell energi.}$$

Bygg upp en sfär genom att addera ett infinitesimellt tunt skal med laddning dQ . Varje skal adderas till en sfär med radie r och total laddning Q_r .

Arbete (pot energi) per skal:

$$dU = \frac{dQ \cdot Q_r}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{där } Q_r = \frac{4\pi r^2}{\epsilon_0} \rho$$

= konstant laddningsföretät.

och där $dQ = \rho 4\pi r^2 dr$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{4\pi r^3}{3} \rho \right) (\rho 4\pi r^2 dr) =$$

$$= \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr$$

Summera alla skal för en sfär med radie R .

$$U = \int_0^R dU = \int_0^R \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr =$$

$$= \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \frac{R^5}{5}$$

Total laddning i sfären: Ze

$$\Rightarrow Ze = \frac{4\pi R^3}{3} \rho \Rightarrow \rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

$$\Rightarrow U = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \frac{R^5}{5} \frac{3^2 Z^2 e^2}{4^2 \pi^2 R^6} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R}$$

b) För en kärna med laddning Ze och radie $R = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$ för vi coulombenergi:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{1.2 A^{1/3}} = \frac{3}{5} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{Z^2}{1.2 A^{1/3}} =$$

$$= \frac{3}{5} [\alpha \hbar c] \frac{Z^2}{1.2 A^{1/3}} =$$

$\uparrow$
 finstrukturkonstant $\approx \frac{1}{137}$

$$= \left\{ \frac{3}{5} [\alpha \hbar c] \frac{1}{1.2} \right\} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

$$\frac{3}{5} \frac{1}{137} 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \frac{1}{1.2 \text{ fm}} = 0.72 \text{ MeV}$$