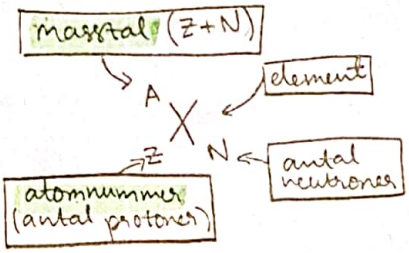
210321 – 1

Introduktion



Neuklider med samma ...

- Z : isotop kedja
- N : isoton kedja
- A : isobar kedja

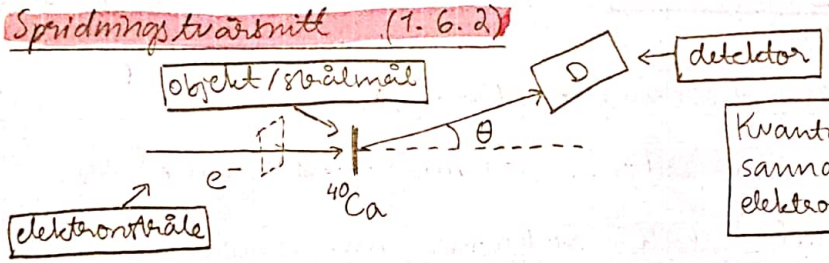
atomkärnan binds av den starka kärnkraften; neutroner och protoner binder varandra ⇒ självbindning

$1\ fm = 10^{-15}\ m$: neuklonradie $\sim 1\ fm$. ← femtometer / fermi

$1\ eV/c^2 = 1{,}78 \cdot 10^{-36}\ kg$. Användbar enhetsfaktor:

$\hbar c = 197{,}327\ldots\ MeV\,fm$.

Spridningstvärsnitt (1.6.2)



Kvantmekanisk process ⇒ sannolikhetsfördelning för elektronernas spridning.

Fråga: Hur många elektroner sprids en vinkel θ per tidsenhet?

För att svara på frågan behöver vi definiera ett spridningstvärsnitt σ. Svaret kommer bero på

partikeltäthet · hastig.

i) Inkommande flödet J av elektroner ($J = \frac{\text{antal}}{\text{area} \cdot \text{tid}}$). ← "flux"

ii) Antalet partiklar N i strålmålet

^{40}Ca här

Har att

$$W = J N \sigma.$$

$$\left[\frac{1}{T}\right] \quad \left[\frac{1}{L^2 T}\right] [1] \, [L^2]$$

σ är en observabel

Måste ha $[\sigma] = L^2$, dvs m^2 eller fm^2 (t.ex.). Så

$W = JN\sigma$ ← W = antal reaktioner per tidsenhet

där σ är tvärsnittet, med enhet L^2. Grundenhet för tvärsnitt är 1 barn $= 10^{-28}\ m^2 = 100\ fm^2$. Tvärsnitt kan

- mätas,
- beräknas om vi har en modell för växelverkan (eller kraften / potentialen) mellan partiklarna i strålen och strålmålet.

tvärsnitt är Lorentzinvariant

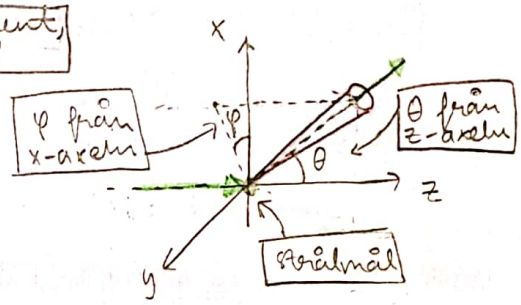
Differentiellt tvärsnitt:

rymdvinkelelement, $d\Omega = d\cos\theta\, d\varphi$

$$dW = JN \frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\Omega} d\Omega.$$

dW: antal spridda partiklar som sprids i ett element med vinkeln $d\Omega$

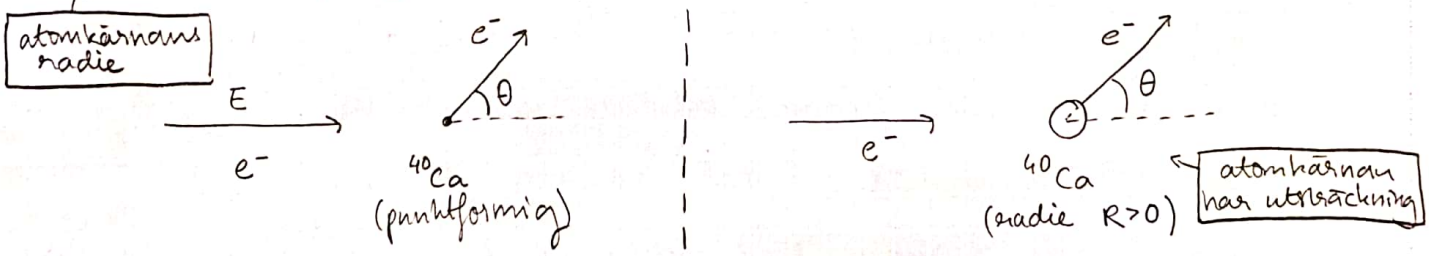
$\frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\Omega}$: differentiellt tvärsnitt



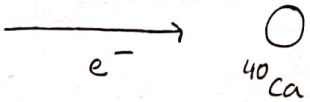
Mäta storleken på en atomkärna (2.2.1)

Har att nukleonradien är ~1fm. Atomkärnans radie är $R = 1{,}2\, A^{1/3}$ fm, vilket skall motiveras nu.

atomkärnans radie



Experimentellt tvärsnitt = teoretiskt tvärsnitt (punktformig) · formfaktor (beror på R)



via EM-växelverkan (elektroner reagerar med ^{40}Ca-protonernas Coulombfält)

Det vi får ut är laddningsradien; kommer få ut fördelningen av protoner i ^{40}Ca.

Scanned with CamScanner

$f(r)$ i boken är samma som ρ_{ch}

ch = charge

Ansätt sfärisk laddnings fördelning:

$$\int \rho_{ch}(\vec{r})\, d^3\vec{r} = Ze \implies$$

← Fouriertransform, Besselfunktion

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \int_0^\infty r\,\rho_{ch}(r) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr$$

formfaktor

sfäriskt symmetrisk

$\rho_{ch}(r)$

radiell laddnings fördelning

där

$\vec{p}$ inkommande och $\vec{p}'$ utgående rörelsemängd för elektronerna

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$$

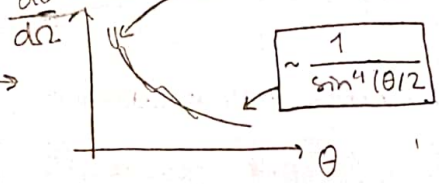
Har $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ så $\vec{q}^{\,2} = 2p^2 + 2\vec{p}\cdot\vec{p}'$

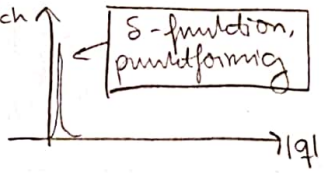
$$\vec{q}^{\,2} = 4p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Har

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{teori}}_{\text{punktformigt}} \cdot \underbrace{|F(q^2)|^2}_{\text{formfaktor}},$$

innehåller info om kärnans storlek





där

icke-relativistisk gräns

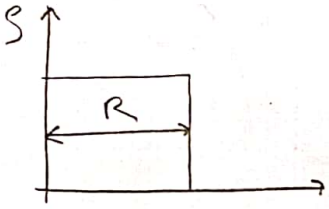
se Appendix C

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{teori} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \underbrace{\left[1 - p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}_{e^- \text{ har spinn } s=1/2}$$

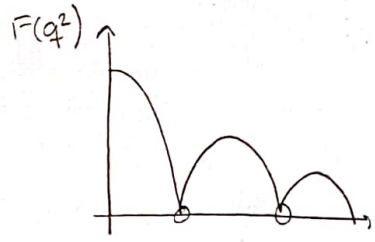
från Appendix C, är relativistisk med elektronspinn

$$= \frac{Z^2 \cdot \alpha^2 (\hbar c)^2}{4\beta^4 E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$\beta = \frac{v}{c}$



Fouriertransform →



≈ 0,17 nukleoner / (fm)³

ρ är samma för alla atomkärnor

för tyngre atomkärnor

Densiteten ρ för en atomkärna är konstant

tar starka kärnkraften har så kort räckvidd (märks knappt utanför atomkärnan)

ρ_{ch}, laddnings tätheten är (nästan) konstant i atomkärnor, går mot noll nära ytan

tagit hänsyn till att det finns neutroner också

R från e^--spridning ger

$R^3 \propto A$,

så

$$R \approx 1{,}2\, A^{1/3}\ fm$$

proton + neutron radie

Scanned with CamScanner

210325 — 2

Bindningsenergier

$A = N + Z$

Atomkärnans massa ges av $M(Z, A)$. M är hela atomens massa, dvs atomens kärna samt atomära e^-.

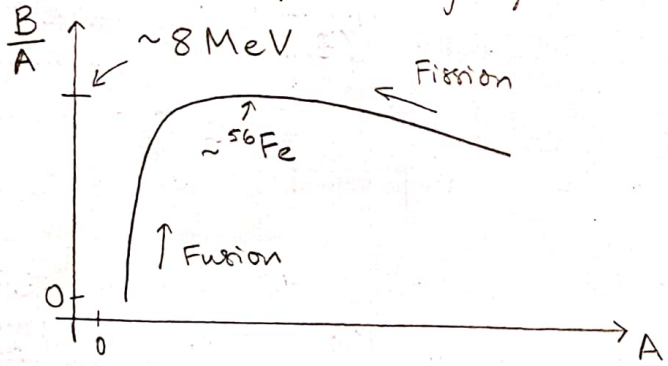
Det gäller att

$$\underbrace{M(Z, A)}_{\text{det bundna systemets massa}} < \underbrace{Z(M_p + m_e) + NM_n}_{\text{totala massan för de fria beståndsdelarna}}.$$

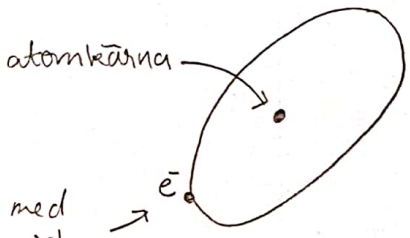
Skillnaden i massan beror på bindningsenergin $E = mc^2$. Systemets bindningsenergi ges alltså av

$$B(Z, A) = [Z(M_p + m_e) + NM_n]c^2 - M(Z, A)c^2.$$

Givet en atomkärna med A nukleoner och bindningsenergi B används $\frac{B}{A}$ för att jämföra energin mellan olika system.



Hur kan vi förstå den här kurvan?



bunden med en typisk Be ~ keV

Eftersom MeV ≫ keV kan vi med god approximation försumma atomär elektronbindning.

Kan förklara kurvans utseende med SEMF

Scanned with CamScanner

2.3.2

Lämplig för atomer med icke-lågt A

Semiempiriska massformeln (SEMF)

Relevanta figurer: 2.9 och 2.12

Vill motivera SEMF, skriver därför

$$M(Z,A) = \sum_{i=0}^{5} f_i(Z,A),$$

f_0: massan av alla ingående nukleoner och elektroner

där

$$f_0(Z,A) = Z(M_p + m_e) + (A-Z)M_n,$$

så

$$M(Z,A) = f_0(Z,A) + \sum_{i=1}^{5} f_i(Z,A) \Rightarrow$$

$$M(Z,A)c^2 = f_0(Z,A)c^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{5} f_i(Z,A)c^2}_{= -B(Z,A), \text{ enligt definition}}.$$

Semiempirisk ty innehåller konstanter som måste anpassas till data men bygger på teori från att a) massdensitet ~ konstant b) $B \propto M$ (approximationer)

Vi har att

viktigast

$$f_1(Z,A) = -a_1 A. \leftarrow \text{Ty } V_{\text{kärna}} \propto R^3 \propto A$$

volymterm

Vidare fås

$$f_2(Z,A) = +a_2 A^{2/3}.$$

ytterm

Area

$S \propto R^2 \propto A^{2/3}$

nukleon nära ytan har färre grannar

enskild nukleon känner bara av sina närmaste grannar, alltså är $f_1 \propto A$

Nästa term är

Coulombterm

$$f_3(Z,A) = +a_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \approx a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}},$$

så protoner repellerar! Den fjärde termen är

$$f_4(Z,A) = +a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A}.$$

Kvantmekanisk effekt; Pauliprincipen

Har $Z \approx N$ (empiriskt), så kan få en asymmetriterm

Till sist fås

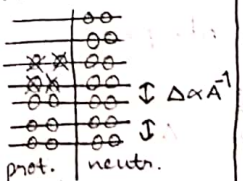
asymmetriterm

parterm

$$f_5(Z,A) = \begin{cases} -f(A) & \text{om } Z \text{ jämnt, } N \text{ jämnt} \\ 0 & \text{om } Z \text{ jämnt/udda, } N \text{ udda/jämnt} \\ +f(A) & \text{om } Z \text{ udda, } N \text{ udda} \end{cases}$$

ty nukleoner är fermioner, får

bindningsenergin minskar om $Z \neq N$ (se föreläsn. 5 och 6)



protoner kan inte ha identiska kvanttal, inte heller neutroner

kommer från kvantmekanisk observation; att

proton-proton resp. neutron-neutron föredras!

Har att

$$f(A) = a_5 A^{-1/2}.$$

effekt minskar med ökande antal nukleoner

ty får spinn 0 då

Scanned with CamScanner

Så

$$M(Z,A) = Z(M_p + m_e) + (A-Z)M_n - a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \delta a_5 A^{-1/2}$$

där

$$\delta = \begin{cases} -1 & \text{om j/j kärna,} \\ 0 & \text{om u/j kärna,} \\ +1 & \text{om u/u kärna.} \end{cases}$$

Minnesregel: VSCAP

för $A > 20$ ← se uppg. (2.9) för andra A

I kursboken finns resultat av linjäranpassning av $a_1, \ldots, a_5$ mot experimentell massdata, se (2.57) för värden på a_V, a_S, a_C, a_a, a_p. Den här semiempiriska massformeln fungerar bra över nästan hela nuklidkartan för att förstå och förutsäga bindningsenergin hos olika atomkärnor.

dock ej för nuklider med låga A

Sönderfall (2.4-2.6)

Kommer gå igenom följande typer av sönderfall:

- α: utsändrande av ^4He
- β: $n \longrightarrow p$ eller $p \longrightarrow n$
- γ: $\rightsquigarrow$ (foton)
- fission: ◯ → ◯ + ◯

Energiminimering eftersträvas i processerna! Typen av reaktion / sönderfall beror på tillgänglig energi och hur mycket som kan frigöras.

Q-värde: Frigjord energi i reaktion eller sönderfall

$① + ② \longrightarrow ③ + ④$ reaktion. eller $① \longrightarrow ② + ③$ sönderfall

t.ex $O \longrightarrow O + \alpha$

Scanned with CamScanner

Definierar

$$Q = (M_{tot}^{före} - M_{tot}^{efter})\,c^2$$

och eftersom

$$E = Mc^2 + T$$

fås att

$$Q = T^{efter} - T^{före}$$

← Obs: Akta så det inte blir teckenfel vid beräkning av Q

0 ty total energi bevarad

$$\frac{\Delta E}{c^2} = \Delta M + \frac{\Delta T}{c^2} \Rightarrow Q = -\Delta M c^2 = \Delta T$$

så om $Q > 0$ kan reaktion / sönderfall ske. Högre Q-värde ger högre sannolikhet för reaktion / sönderfall. I kapitel 2.5 skrivs om exponentiella sönderfallslagen och kedjesönderfall.

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Vill nu kombinera SEMF och Q-värde. Har att

β^-: $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ($m \approx 0$ (~eV))

β^+: $p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$

electron capture

EC: $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$

} tre vanligaste β-sönderfall som sker i naturen.

β^+ mer sannolik än EC ty inte så sanndild att fri elektron kommer in i kärnan

β^- för en, atomkärna: ${}^{A}_{Z}X_N \xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z+1}X'_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e$.

Q_{β^-} är en kärnprocess, så använder nukleära massan $m_N(Z, A)$ (kärnmassan); endast atomkärnan, där

bindningsenergin ingår

elektronernas bindningsenergi

$$M(Z, A) = m_N(Z, A) + Z m_e - \sum_{i=1}^{Z} B_i^e,$$

jonisationsenergierna, $\lesssim$ keV, kan försummas

Vi får alltså

kärnmassa — elektronmassor

$$Q_{\beta^-} = M(Z, A)c^2 - M(Z+1, A)c^2 + \sum_{i=1}^{Z} B_i^e - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i^e$$

energiminskning

Har $Q_{\beta^-} > 0$ om $M(Z,A) > M(Z+1, A)$ (enligt (2.75)).

Övning: Visa hur man får ekvation (2.77) och (2.78), Q_{β^+} för en fri proton och Q_{β^-} för en fri neutron.

$= (m_p - m_n - m_e)c^2$

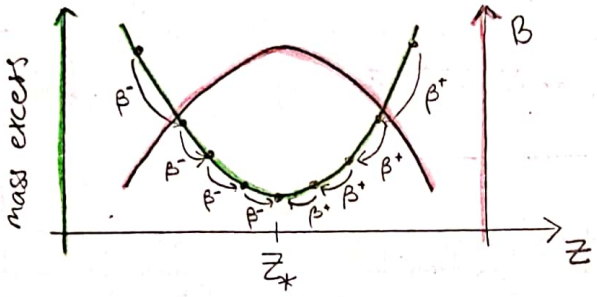
$= (m_n - m_p - m_e)c^2 = Q_{\beta^+} - 2(m_p - m_n)c^2$

Scanned with CamScanner

från SEMF

I ekvation (2.70) och (2.71) visas att $M(Z,A) \sim Z^2$ för A = konstant.

parabler

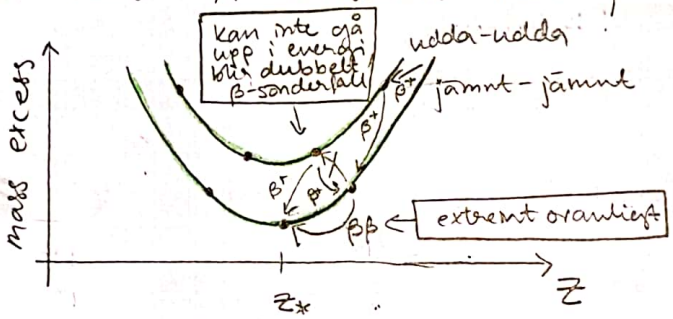


mass excess $\propto -B$

SEMF för udda antal nukleoner, dvs A udda, ger att p'artermen är 0.

Figur 2.15

Om vi har A = konstant men jämnt fås:



Mass excess ≡ $M(Z,A)$ [u] − A

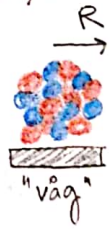
210326 | 3

Atomkärnans inre struktur och reaktionerna som lär oss mer om denna

I föreläsning 1 och 2 studerade vi kärnans globala egenskaper, såsom dess radie R och massa $M(Z,A)$.

Vi fann att

$$R = 1{,}2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}, \qquad A = N + Z.$$



Verifierades med e^--spridning och $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{experiment}}$

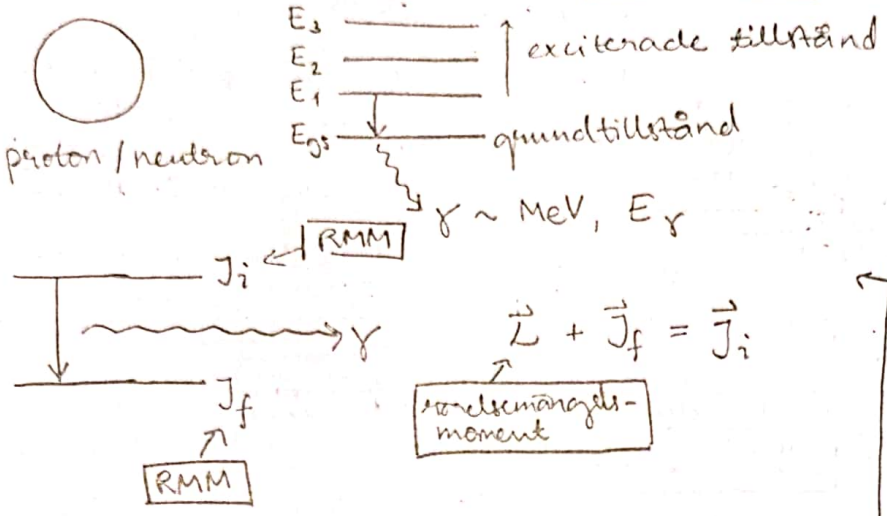
Fann även att

$$M(Z,A)c^2 = \sum M_{\text{konstituenter}} c^2 - \text{Bindningsenergi},$$

med SEMF som visar att det finns volym-, yt-, Coulomb-, asymmetri- och partermer.

Scanned with CamScanner

Definierade B och Q-värde. N_i: diskreta energinivåer



Stannar inte i exciterade tillstånd så länge ⇒ emission

Poängen är att atomkärnor ofta sönderfaller till ett exciterat tillstånd. Det exciterade tillståndet γ-sönderfaller sedan (sänder ut fotoner)

Så

$$|J_i + J_f| \leq L \leq |J_i - J_f|,$$

$$m_i = M + m_f.$$

Mer i föreläsning 7.

Den totala paritetet i ett gammasönderfall av typen E_2 bevaras

En foton kan bära med sig en hel "serie" av olika l och j, vet inte exakt vilket fotonen har men det väljs med en sannolikhet

kallas olika multipol-ordningar

den övergång med högst multipolordn. har högst sannolikhet att ske

Reaktioner (2.9)

Finns olika typer av kärnreaktioner:

- **Elastisk spridning:** $a + A \longrightarrow a + A$.

  Kinetisk energi bevaras.

  färdriktning förändras

- **Inelastisk spridning:** $a + A \longrightarrow a + A^*$

  exciterad

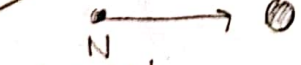
- **Compound reaction:**

låg kinetisk energi ~1 MeV

$\Rightarrow \lambda_{db} \sim 20$ fm

de Broglie-våglängd

- **Direct reaction**



kinetisk energi ~100 MeV

$\Rightarrow \lambda_{db} \sim 3$ fm

typ. det möjliga för processen att bara enskilda nukleoner i målmärket

Scanned with CamScanner

Skillnad mellan compound-reaktioner och direct-reaktioner:

- **Direct reaction** kan vara både elastisk och inelastisk,

t.ex. $p + {}^{16}O \longrightarrow d + {}^{15}O$ (pick-up-reaktion),

(bundet p-n-system (deuteron); här: projektil plockar upp neutron)

eller $d + {}^{16}O \longrightarrow p + {}^{17}O$ (transfer-reaktion) ← i boken: "stripping"

Notation för $a + A \rightarrow b + B$ är $A(a, b)B$ ← ordalmål efter

(strålmål innan; projektil innan; projektil efter)

- **Compound reaction** är då

$a + A \longrightarrow C^*$ ← exciterat tillstånd lever kort tid

C^*: gemensamt system, compound-kärna

$\longrightarrow$ { $a + A$; $C + \gamma$; $b + B$ } (fre scenarier; utkanaler)

Utkanaler beror inte på hur C^* bildades. Denna information går förlorad i reaktionen. **Utkanaler beror endast på excitationsenergin i C^*.** T.ex:

$$p + {}^{63}Cu \longrightarrow \left[{}^{64}Zn^*\right] \begin{cases} \rightarrow {}^{63}Zn + n \\ \rightarrow {}^{62}Cu + n + p \\ \rightarrow {}^{62}Zn + 2n \end{cases}$$

$$\alpha + {}^{60}Ni \longrightarrow \left[{}^{64}Zn^*\right] \rightarrow \dots$$

Kinematik och bevaringslagar (4.1, appendix B, C)

Låt T vara kinetisk energi. **Total energi bevaras!** Har att

$$T_a + m_a c^2 + T_A + m_A c^2 = T_b + m_b c^2 + T_B + m_B c^2$$

för reaktionen $a + A \rightarrow b + B$. Har alltså

$$Q = (m_A + m_a - m_b - m_B)c^2 = T_b + T_B - T_a - T_A.$$

Om B^*, dvs B exciterad, är

$$Q = (m_A + m_a - m_b - m_{B^*})c^2 = \{m_B^* c^2 = m_B c^2 + E_{B^*}\} =$$

$$= Q_0 - E_B$$

Relevant figur: 2-23

Scanned with CamScanner

Studera $a + A \longrightarrow C^*$. ($n + {}^{238}U \longrightarrow {}^{239}U^*$) Har $Q = Q_0 - E_{C^*}$, dvs

$$Q = \underbrace{T_{C^*}}_{\approx 0} - T_a - \underbrace{T_A}_{\approx 0} \approx -T_a,$$

så i det här fallet är

$$E_{C^*} = Q_0 + T_a.$$

Studera två partiklar A och B:

Oftast behövs speciell i partikelfysik men inte i kärnfysik

Vet att total energi och rörelsemängd är bevarade.

Tumregel: Räkna relativistiskt om $v > 0{,}10c$. Kan visa att för en partikel med massa m och hastighet v är den totala energin $E = \gamma(v)mc^2$, där $\gamma(v) = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = \frac{v}{c}$. Har dessutom

$$\vec{p} = \gamma(v) m\vec{v},$$

med 3-vektorn $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ och 4-vektorn $P = (p_0, p_x, p_y, p_z) = (p_0, \vec{p})$. 4-rörelsemängden P definieras av

$$P = mu,$$

där (u: 4-hastighet)

$$u = \gamma(v)(c, \vec{v}).$$

($\vec{v}$: 3-hastighet)

För 4-vektorer används lorentzprodukten som skalärprodukt: Om vi har $A = (a_0, \vec{a})$ och $B = (b_0, \vec{b})$ är

$$A \cdot B = a_0 b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b}.$$

($\vec{a}\cdot\vec{b}$: Vanlig)

Scanned with CamScanner

Med $P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ är

$$P \cdot P = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 u \cdot u = m^2 \gamma(v)^2 (c^2 - \vec{v}^2) =$$
$$= m^2 c^2,$$

så

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

$P \cdot P$ är en skalär; gäller i alla inertialsystem.

Har $A + B = (a_0 + b_0, \vec{a} + \vec{b})$, så

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad \text{för} \quad 1 + 2 \longrightarrow 3 + 4.$$

Har $P \cdot P = m^2$ med $c = 1$ (konvention), och $u \cdot u = c^2$

210329 — 4

Atomkärnan är ett bundet system av nukleoner, som i sin tur består av tre bundna kvarkar. Kan ta med kvarkar i modellen (lattice QCD), men approximerar. För en nukleon är

$$\begin{cases} T \approx 20 \text{ MeV}, \\ M \sim 1 \text{ GeV}. \end{cases}$$

modell (utan kvarkar)

$T \sim 20 \text{MeV}$

bundet system av punktformiga partiklar

I modellen har vi icke-relativistisk kvantmekanik. Har en atomkärna A. Schrödingerekvationen ger

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar}{2M}\nabla^2}_{\hat{T}} + \underbrace{V(\vec{r})}_{\hat{V}}\right] \underbrace{\Psi(\vec{r})}_{|\Psi\rangle} = \underbrace{E\Psi}_{|\Psi\rangle},$$

dvs

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$

och

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle.$$

Scanned with CamScanner

A st partiklar

varje partikel har massa M

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

I ett A-partikelsystem har vi

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{A} -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_i^2 + \sum_{i<j}^{A} V(\vec{r}_{ij}).$$

För att lösa Schrödingerekvationen behöver vi

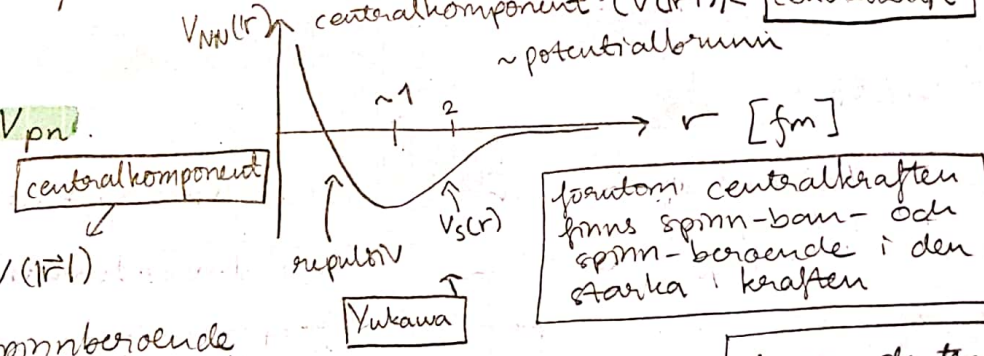
- $V(\vec{r}_{ij})$ ← okänd än så länge i forskningen ← bara känd i små områden där de olika parametrarna i potentialen är kalibrerade
- en metod för att lösa $H_A|\Psi_A\rangle = E_A|\Psi_A\rangle$ ← för $A \gtrsim 10$ behövs approximationer

Detta är pågående forskning!

Vet dock att

- $V_{NN}(r)$ är repulsiv för små r
- den starka kraften mellan N-N har kort räckvidd.
- den starka kraften övervinner Coulombrepulsion mellan protoner
- $V_{nn} \approx V_{pp} \approx V_{pn}$.
- Har att

$$V_{NN}(r) = V(|\vec{r}|) + \text{spinnberoende} + \text{icke-centrala komponenter.}$$



förutom centralkraften finns spinn-bana- och spinn-beroende i den starka kraften

t.ex. deutron: p n

Deuteron: p n, med bindningsenergi $B = 2{,}224$ MeV och kärnradie $R \approx 2$ fm (där V är ganska svag, se figuren!)

Finns inga bundna p p- eller n n - system, även om $V_{nn} \approx V_{np} \approx V_{pp}$! Har att $J = 1$ och $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Med $s_n = s_p = \frac{1}{2}$ och $\vec{S} = \vec{s}_n + \vec{s}_p$ har vi $S = 0, 1$. Alltså är de möjliga tillstånden

$L = 0, \quad S = 1$

~~$L = 1, \quad S = 0, 1$~~ finns inte i naturen!

$L = 2, \quad S = 1$

$L = 0, 2$, $S = 1$ möjliga

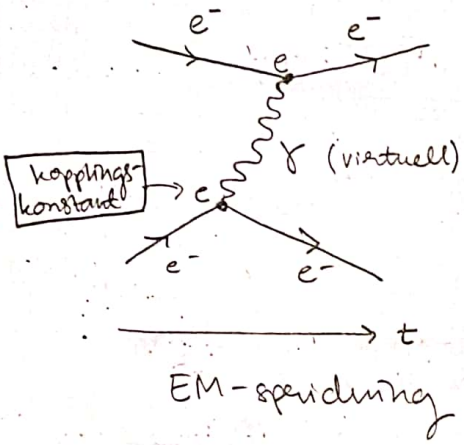
finns inget exciterat tillstånd

Deutronen är ett bundet tillstånd av en proton och en neutron men har inga bundna exciterade energinivåer

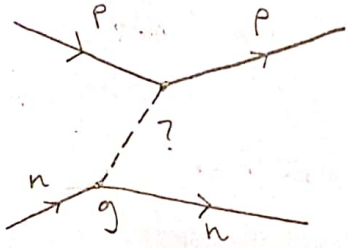
Scanned with CamScanner

Skall nu undersöka potentialen för små avstånd, mindre än 1 fm.

Feynmandiagram (1.4)



EM-spridning



Vet att EM-kraft har oändlig räckevidd samt att γ är masslös. Har

$$V_C(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, \quad \text{Coulombpotential}$$

$$V_S(r) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-r/R}}{r}, \quad \text{Yukawapotential}$$

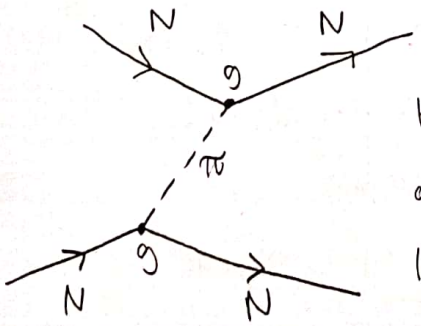
figur!

där

$$R \equiv \frac{\hbar}{Mc}.$$

M: massa för utbytespartikeln

$R \sim 1$ fm $\Rightarrow M \sim 197$ MeV, dvs en pion π med $M_\pi \sim 140$ MeV/c^2. Har alltså att nukleon-nukleonväxelverkan förmedlas av pioner, med kopplingsstyrka g.



Kan ha π^+, π^-, π^0

och $N = n, p$.

Har $\Delta E \Delta t \sim \hbar$.

"virtuell" pion

Scanned with CamScanner

Den starka kraften består av en centralkraftsdel men den har många fler termer också, inte så enkelt som bara ett pionutbyte

finstrukturkonstanten

Har

$$V_c(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \Rightarrow \left\{\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}\right\} \Rightarrow$$

$$V_c(r) = -\frac{\alpha}{r}\hbar c, \quad \alpha = \frac{1}{137}.$$

(r ← fm)

$\gg \frac{1}{137}$, mycket starkare än EM

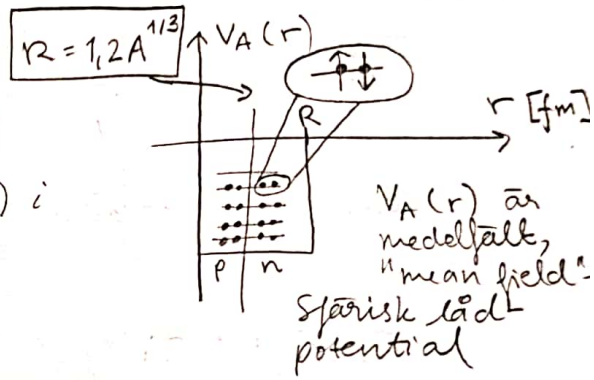
För den starka kraften är

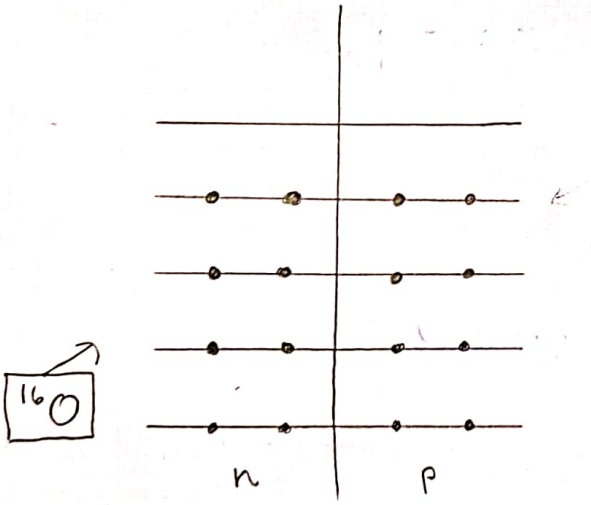
$$V_S(r) = -\frac{\alpha_S}{r}\hbar c\, e^{-r/R}, \quad \alpha_S = \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx 14 \quad \text{stark.}$$

Fermis gasmodell

Kan göra en första ansats för att kvantmekaniskt beskriva ett mångpartikelsystem. Har

- en samling nukleoner (fermioner)
- icke växelverkande nukleoner (A st) i $V_A(r)$.
- kallar detta en Fermigas
- Pauliprincipen gäller.





två neutroner i varje tillstånd pga spinn

odubblerade

Högsta energinivån är Fermienergin E_F.

Har också

$$p_F = \sqrt{2ME_F} \quad \text{(rörelsemängd)}$$

$$E_F = T = \frac{p_F^2}{2M}$$

Tillståndstätheten är

$$g(p) = \frac{dn(p)}{dp} \Rightarrow$$

$$g(p)\,dp = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\,p^2\,dp$$

Så

$$\begin{cases} N = 2\int_0^{p_F^n} g_N(p)\,dp, \\ Z = 2\int_0^{p_F^p} g_Z(p)\,dp. \end{cases} \qquad (8.2a)$$

Scanned with CamScanner

Har alltså

$$\begin{cases} N = \dfrac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \\ Z = \dfrac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \end{cases}$$

där

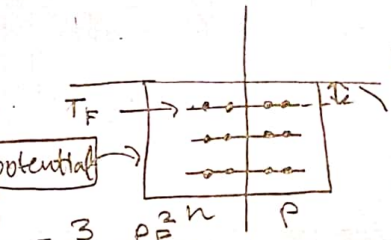
$$V = \frac{4}{3}\pi (R_0 A^{1/3})^3, \qquad R_0 = 1{,}2 \text{ fm}$$

och

$$p_F = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV/c},$$

Så

$$T_F \approx \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV}.$$



skillnaden är helt enkelt B/A

vet att det är 8 MeV/A ← per nukleon

här, så vet att brunnens djup är ~ 33 MeV + 8 MeV

Nu kan vi även hitta

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{kin}\, p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5}\frac{p_F^2}{2M},$$

Så

$N = Z = \frac{A}{2}$

$$\langle E_{kin} \rangle (N, Z) = N \langle E_{kin} \rangle + Z \langle E_{kin} \rangle.$$

Kan införa $\Delta = N - Z$ där $\Delta \neq 0$.

I SEMF finns en asymmetriterm $a_A \sim \frac{(N-Z)^2}{A}$...

Scanned with CamScanner

Kan beskriva atomkärnor analogt med hur vi beskriver atomer: Med skal och kvanttal

210331 — 5

Relevant figur: $B_{exp} - B_{SEMF}$ mot N

Skalmodellen (8.3)

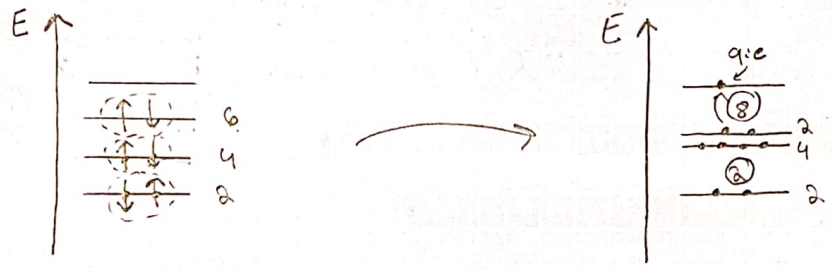
Magiska tal: N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82

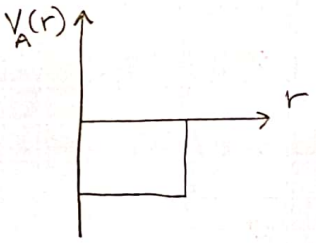
Magisk kärna: om N magiskt eller Z magiskt.

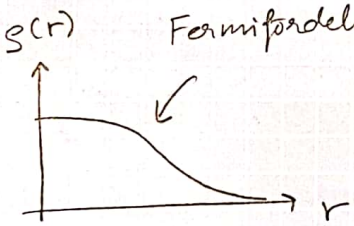
Dubbelmagisk kärna: om N och Z magiska.

En magisk kärna är lite hårdare bunden än sina närmaste grannar på nuklidkartan. Orsaken till de magiska talen är kvantmekanik.



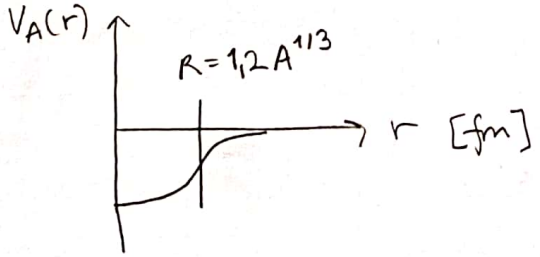
Lådpotential:





(2.34) gav $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/b}}$ — parametrar

Den underliggande kraften V_{NN} har kort räckvidd. Kan sätta upp en Woods-Saxonpotential



$$V_A(r) = V_{WS}(r)$$

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

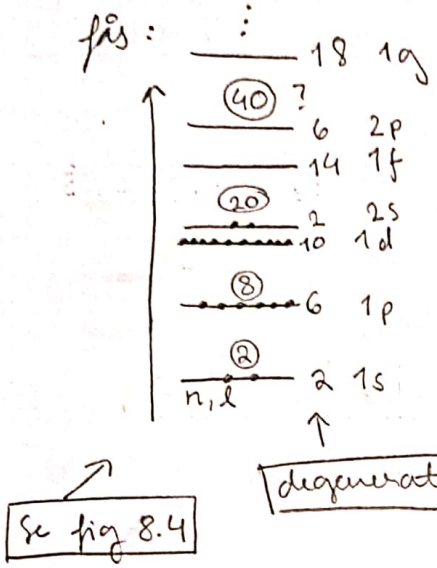
inga parameter

Scanned with CamScanner

n ger energi,
n har olika l,
l har olika m_l.
n har även olika m_s

m_s → $D = [\#\text{spinn}] \cdot [\#\text{ projektioner av } l]$ ← m_l

Om vi löser enpartikel-Schrödingerekvationen med $V_{WS}(r)$ fås:



Se fig 8.4

Degenerationen D för en nivå med kvanttal (n, l) är

$$D = 2 \cdot (2l + 1)$$

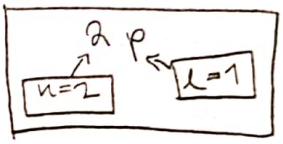
Se kap. 8.3.1

Spinn

sfäriska symmetri ← ty $2l+1$ magnetiska tillstånd tillhörande l (m_l)

Gäller för
- protoner
- neutroner

Enbart WS ger inte alla magiska tal



WS funkar inte med nivåerna. Nukleonerna har spinn; har **koppling mellan nukleonernas spinn och banrörelsemängdsmoment**:

$$\vec{L} \cdot \vec{S}, \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

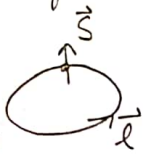
ger en splittring av tillstånd

Kan skriva

viktig term!

$$V_A(r) = V_{WS}(r) + V_{ls}(r)(\vec{L} \cdot \vec{S}) \qquad (8.21)$$

Nu fås exakt de observerade magiska talen! Hur sker det här? Har

$V_{ls}(r)\vec{L} \cdot \vec{S}$ (viktiga termen),  $\Rightarrow \vec{J}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow$$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \Rightarrow$$

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}\left[J^2 - L^2 - S^2\right] \Rightarrow$$

$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right],$$

och för nukleonerna är $l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, $s = \frac{1}{2}$, så

$$j = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \hbar^2 \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{för } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{l+1}{2} & \text{för } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

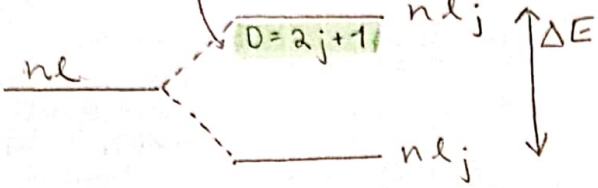
neutroner är två olika typer av fermioner

bygger på att för varje j finns $2j+1$ tillstånd typ $m_j = \dots -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \dots$

Se fig 8.4

#nukleoner som kan ockupera ett tillstånd är $2\cdot(2j+1)$ (p och n)

Så



$j = l - \frac{1}{2}$

$j = l + \frac{1}{2}$

$\Delta E_{ls} = \langle V_{ls} \rangle \langle \vec{L}\cdot\vec{S} \rangle_{j=\frac{l}{2}} - \langle V_{ls} \rangle \langle \vec{L}\cdot\vec{S} \rangle_{j=-\frac{l+1}{2}}$

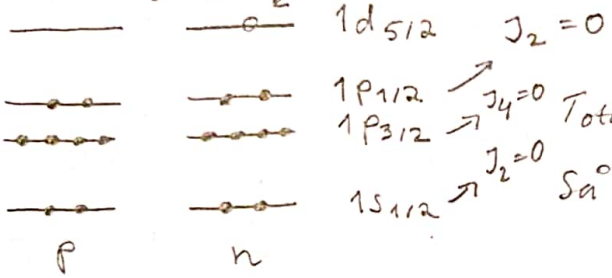
där

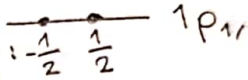
$$\Delta E_{ls} = \frac{2l+1}{2} \hbar^2 \langle V_{ls}(r) \rangle \qquad (8.25)$$

energiskillnad mellan de spittrade nivåerna

$^{16}_{8}O_8$ är dubbelmagisk!

Studera $^{16}_{8}O_8$: för ^{17}O





typ för varje m_j finns en nukleon med motsatt m_j

Har alltså $J_{16} = 0$, men $J_{17} = \frac{5}{2}$ pga den 17:e nukleonen. Har $|J_{16} - j| \le J_{17} \le J_{16} + j \Rightarrow J_{17} = \frac{5}{2}$.

($|J_{16} - j| = \frac{5}{2}$, $J_{16} + j = \frac{5}{2}$)

j för 17:e nukleonen

Paritet

$\hat{P} : \vec{r} \to -\vec{r}$ (paritetsoperatorn). Har alltså

alla skuttna skall ge bidrag 0 till J

$$\hat{P}\,\Psi(\vec{r}) = \pi\,\Psi(-\vec{r})$$

$$\hat{P}^2\,\Psi(\vec{r}) = \pi^2\,\Psi(\vec{r}),$$

där

egenvärden till $\hat{P}^2$

$$\pi^2 = 1 \Rightarrow \pi = \begin{cases} +1 & \text{(jämn vågfunktion under } \vec{r} \to -\vec{r}) \\ -1 & \text{(udda vågfunktion under } \vec{r} \to -\vec{r}). \end{cases}$$

Rumsdelen för en A-partikel vågfunktion bestäms med klotytefunktionen:

$$\Psi_A(r) = Y_l^m(\theta, \phi).$$

by nukleoner har paritet +, men l ger bidrag $(-1)^l$

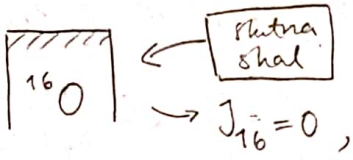
Paritéten för klotytefunktionen är $\pi = (-1)^l$.

Obs: Skalmodell ger inte så bra prediktioner för magnetiskt moment μ

Scanned with CamScanner

$1d_{5/2} \Rightarrow l = 2, \quad \pi: (-1)^2 = +$

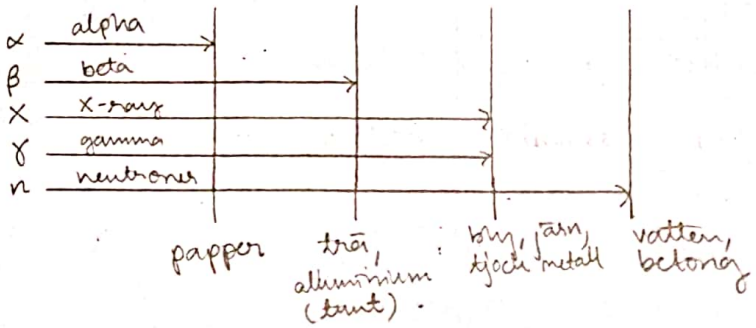
För ^{17}O:

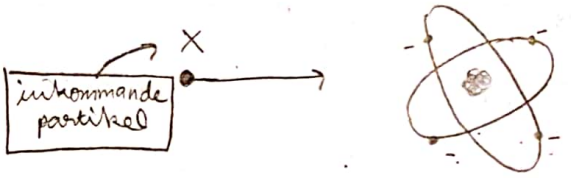


Skalmodellens begränsningar beror på antagandena att nukleonerna rör sig oberoende av varandra i en stationär symmetrisk potential

210412 — 6

Partiklars växelverkan med materia

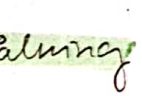




Växelverkan mellan atomära e^- och/eller atomkärnan?

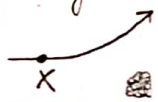
Växelverkan mellan X och kärnan via

- stark / svag kärnkraft (kort räckvidd). Om X = hadron bildas nya partiklar vid hög energi (över något tröskelvärde). Se avsnitt 4.3.1.
- elektromagnetism (lång räckvidd). X elektriskt laddad (e^-, γ, joner, protoner).



Viktiga fenomen för detektion:

- inelastisk spridning: joniserande strålning
- strålningsförluster:



Kallas även bromsstrålning, energiförlusten $\alpha \frac{E}{m_X^2}$

Scanned with CamScanner

Två karaktäristiska processer kan alltså ske då laddade partiklar färdas genom något material:

a) Partikeln kan förlora energi

b) Partikelns bana kan ändras

Detta beror i huvudsak på något eller några av följande effekter:

1) Inelastisk spridning mot atomära elektroner
2) Elastisk spridning mot kärnor (Rutherford)
3) Bromsstrålning
4) Cherenkovstrålning
5) Kärnreaktioner

anlagande: energiförlust sker via joniserande effekter

Bethe-Bloch-formeln beskriver Coulombspridning mot atomära elektroner:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi\alpha^2\hbar^2}{m_e}\frac{q^2 n_e}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e c^2\beta^2\gamma^2}{\underbrace{10\cdot Z}_{\text{jonisationspotential [eV]}}}\right) - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2}\right], \quad (4.11)$$

där

$$n_e = \rho N_A \frac{Z}{A}$$

Se figur 4.10

är elektrontätheten. Då $\beta\gamma \approx 3-4$ är de inkommande partiklarna minimalt joniserande (och kan färdas som längst).

Exempel: Räckvidd i aluminium

$$R = \int_0^R dx = \int_0^T \left[-\frac{dE'}{dx}\right]^{-1} dE' \approx \sum_0^T \left[-\frac{dE'}{dx}\right]^{-1} \Delta E'$$

Räckvidden för en laddad partikel som färdas genom ett material kan uppskattas m.h.a. Bethe-Bloch. Notera att man därmed antar att all energiförlust sker via joniserande effekter. Här

Scanned with CamScanner

räckvidd

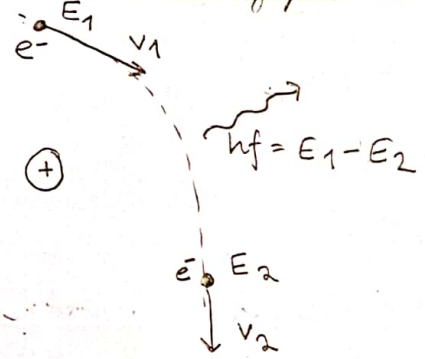
Range $[g/cm^2] = R\,[cm] \cdot \rho\,[g/cm^3]$,

vilket är ca 7 mm för en 10 MeV-proton i aluminium.

En Braggkurva anger energiförsvagning som funktion av tillryggalagt avstånd. Avger mest energi i Braggtoppen, precis innan den inkommande partikeln stannar.

Elektroners växelverkan med materia

Domineras av strålningsförluster, speciellt bremsstrahlung.



laddad partikel böjs av i EM-fältet från atomkärna och förlorar energi. Energin konverteras till en foton.

Har att

$$\sigma_{Brems} \propto \frac{E}{m^2}.$$

Jonisationsförluster (Bethe-Bloch) ökar endast logaritmiskt med energin.

Fotoners växelverkan med materia

Skiljer sig dramatiskt från laddade partiklars växelverkan med materia. Fotoner har hög sannolikhet att spridas mot eller absorberas av atomerna i ett material. Talar om attenuering (förlust). Fotoner som passerar rakt igenom ett material har bibehållit sin energi. Grunden för detektion av gammastrålning är

Scanned with CamScanner

a) Fotoelektrisk effekt

b) Rayleighspridning

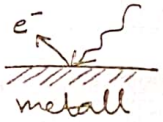
c) Comptonspridning

d) Parproduktion (kärnor)

e) Parproduktion (atomer).

Fotoelektrisk effekt

$$\sigma_{FE} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma^3}$$



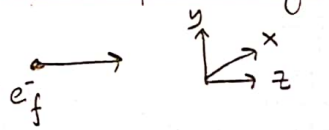
En fri elektron kan inte absorbera en foton och samtidigt bevara rörelsemängd. Fotoelektrisk effekt sker bara på bundna elektroner. Det kan vi visa med följande:

C=1

Före spridning:

I ett koordinatsystem där
$\vec{p}_e = 0$
$p_\gamma = (E_\gamma, 0, 0, E_\gamma)$
$p_{e_i} = (m_e, \vec{0})$

Efter spridning:



I ett koordinatsystem där
$p_{e_f} = (E', 0, 0, E_\gamma)$

Eftersom 4-rörelsemängden bevaras gäller

$$(p_{e_i} + p_\gamma)^2 = p_{e_f}^2 \Rightarrow$$

$$p_{e_i}^2 + p_\gamma^2 + 2p_{e_i}p_\gamma = p_{e_f}^2 \Rightarrow$$

$$m_e^2 + 0 + 2m_e E_\gamma = m_e^2 \Rightarrow$$

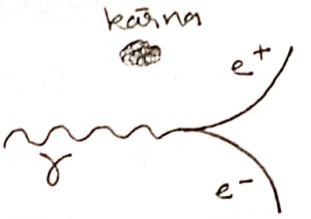
$$\underbrace{2m_e}_{>0}\underbrace{E_\gamma}_{>0} = 0$$ kan ej uppfyllas!

Scanned with CamScanner

Parproduktion

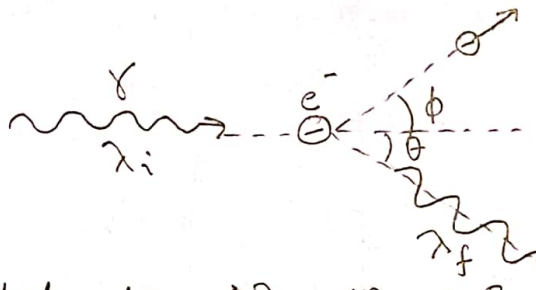
med viss energi

Effekt då en foton delas upp i ett positron-elektronpar i ett elektriskt fält. Parproduktion kan inte ske för en foton i vakuum, eftersom det bryter mot bevarning av energi och rörelsemängd.



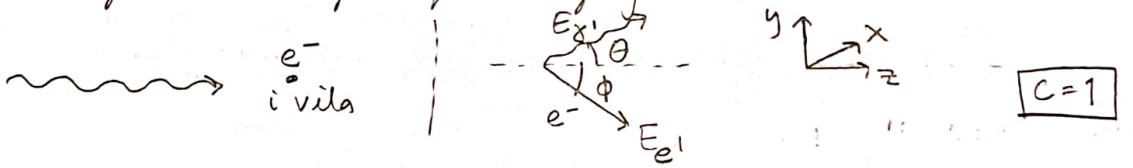
Comptonspridning

En inkommande foton sprids mot en elektron i vila så att den spridda elektronen får viss rörelseenergi och fotonen tappar energi.



$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

Uttrycket för $\Delta\lambda$ fås från följande:



$c=1$

Söker $E_{\gamma'}(\theta)$. 4-rörelsemängdens bevarande ger att

$$\underline{p}_\gamma + \underline{p}_e = \underline{p}_{\gamma'} + \underline{p}_{e'} \Rightarrow$$

$$(\underline{p}_\gamma + \underline{p}_e)^2 = (\underline{p}_\gamma + \underline{p}_{e'})^2 \Rightarrow \{\underline{p}_\gamma^2 = \underline{p}_{\gamma'}^2 = 0,\ p_e^2 = \underline{p}_{e'}^2 = m_e^2\} \Rightarrow$$

$$\underline{p}_\gamma \cdot \underline{p}_{\gamma'} = \underline{p}_\gamma \underline{p}_e - \underline{p}_{\gamma'} \underline{p}_e.$$

Återinför c vid definition av 4-rörelsemängderna:

$$\underline{p}_\gamma = \left(\frac{E_\gamma}{c}, 0, 0, \frac{E_\gamma}{c}\right), \quad \underline{p}_e = (\gamma m_e c, \vec{0})$$

$$\underline{p}_{\gamma'} = \left(\frac{E_{\gamma'}}{c}, 0, \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta, \frac{E_{\gamma'}}{c}\cos\theta\right),$$

så vi får

Scanned with CamScanner

$$\frac{E_\gamma E_{\gamma'}}{c^2}(1-\cos\theta) = E_\gamma m_e - E_{\gamma'} m_e \Rightarrow \left\{E_\gamma = \frac{hc}{\lambda},\ E_{\gamma'} = \frac{hc}{\lambda'}\right\}$$

$$\frac{hc}{\lambda c}\frac{hc}{\lambda' c}(1-\cos\theta) = \frac{hc}{\lambda} m_e - \frac{hc}{\lambda'} m_e \Rightarrow$$

$$\frac{h}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta) = m_e c\left(\frac{\lambda'}{\lambda\lambda'} - \frac{\lambda}{\lambda\lambda'}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)}$$

Comptonspridning, vilket är våglängdsändringen vid spridning av foton mot elektron.

Protonterapi för att bota cancer

Strålterapi bygger på joniserande strålning. Strålterapi kan sammanfattas med följande:

- Strålning joniserar atomer
- Det är mestadels vatten som joniseras (vi består av 80% vatten)
- Fria radikaler genereras, t.ex. OH^*, och dessa är mycket kemiskt reaktiva
- Radikalerna reagerar med andra molekyler, t.ex. DNA, och splittrar och stänger av olika funktioner
- Celler med skadat DNA kan leva vidare men dör vid nästa delning.
- Hälsosamma celler kan reparera sig själva
- Cancerceller är inte lika bra på självreparation och delar sig oftare.
- Alltså: Mer skada på cancerceller.

Scanned with CamScanner

Stråldoser:

hög vävnad

- Total dos: 80 Gy (1 Gy = 1 J/kg)
- Uppdelat på 40 tillfällen: 2 Gy per gång
- 5 tillfällen per vecka
- Uppehåll över helgen (hälsosamma celler kan reparera sig själva)
- 8 veckors behandling: ökad överlevnad för hälsosamma celler.

Målet med cancerbehandling: Utrota cancerceller och minimera skadan på hälsosam vävnad. Braggtoppen är central!

- Tyngre massiva partiklar: protoner/isotoper deponerar större delen av sin energi precis innan de stannar. Braggtoppen!
- Elektroner: bromsstrålning, ingen tydlig Braggtopp.
- Fotoner: exponentiell absorption.

Med Braggtoppen kan man noggrant kalibrera strålningsdjupet för att minska skadan på hälsosam vävnad.

Bokrekommendation: W. R. Leo Techniques for Nuclear and Particle Physics experiments

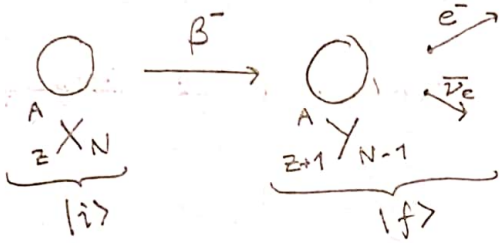
Scanned with CamScanner

210415 — 7

Betasönderfall

Pratade om β-sönderfall i föreläsning 2 (kap 2).

Nu benämner vi atomkärnan i initialtillståndet med $|i\rangle$ och i sluttillståndet med $|f\rangle$.



om X i vila kommer Y också i princip vara i vila

Kan kvantmekaniskt beskriva sönderfallet med ett **matriselement** $\mathcal{M}_{fi}$:

β-sönderfallsoperator — kärnvolym dV

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle f | \mathcal{O}_\beta | i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{O}_\beta \psi_i \, dV.$$

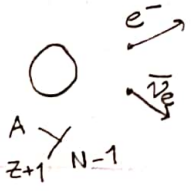
Antalet sönderfall per tidsenhet är

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E)$$

Fermis Gyllene Regel

ϱ: tillståndstäthet, och E är något Q-värde

Låt oss studera β⁻-sönderfall av en atomkärna:



Frigjord energi (Q) är E_0, fördelar sig som kinetisk energi över de tre partiklarna i $|f\rangle$, men $E_0 \approx E_e + E_\nu$ (knappt något för kärnan)

Enligt (A.18) gäller att

$$\varrho(p)\,dp = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 \, dp.$$ ← density of states

Enligt (A.19) gäller (med $E = \frac{p^2}{2m}$)

$$\varrho(E)\,dE = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m p \, dE \quad \text{(icke-relativistiskt)}.$$

Med relativistisk kinematik, dvs $E^2 = pc^2 + m^2c^4$, kan

Scanned with CamScanner

man härleda $\frac{dp}{dE} = \frac{E}{pc^2}$ (se (8.65)) och få

$$\rho(E)dE = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3 c^2} pE\,dE \qquad (8.66).$$

Observera att detta härleds med relativistisk kinematik, till skillnad från appendix A! Vi detekterar elektroner, så

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho_\nu(E_0 - E_e)\rho_e(E_e)\,dE_e,$$

vilket med (8.66) ger att

$$\underbrace{\frac{dw}{dp_e}}_{\text{mätbart}} = |\mathcal{M}_{fi}|^2 V^2 \frac{p_e^2 E_\nu^2}{2\pi^3\hbar^7 c^3} = \underbrace{|\mathcal{M}_{fi}|^2}_{\substack{\text{fysikaliskt} \\ \text{matriselement} \\ \text{i kvadrat}}} V^2 \underbrace{\frac{p_e^2 (E_0 - E_e)^2}{2\pi^3\hbar^7 c^3}}_{\substack{\text{mätbart} \\ \text{(kinematisk information)}}}$$

Kan alltså mäta sönderfallet och därmed lära oss mer om det!

Har att

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle f|\mathcal{O}_\beta|i\rangle = \frac{G}{V}\langle f|H|i\rangle \equiv \frac{G}{V} M_{fi},$$

(Hamiltonianen)

där kopplingskonstanten G ges av

$$G = G_F \cos\theta_C \qquad \text{(kvarkegenskap)}$$

(G_F: Fermikopplingskonstant)

Så

$$\frac{dw}{dp_e} = \underbrace{G^2 |M_{fi}|^2}_{\substack{\text{fysik som "förkroppsligar"} \\ \text{den svaga kraften}}} p_e^2 \frac{(E_0 - E_e)^2}{2\pi^3\hbar^7 c^3}.$$

Vi kan skriva

$$M_{fi} = \int [\psi_N^* \psi_e^* \psi_\nu^*] H \psi_i\, dV.$$

(ψ_N = vågfunktion för atomkärnan (ej hela tillståndet))

För leptondelen gäller

$$\psi_e^* \psi_\nu^* \sim e^{-i(\vec{p}_e + \vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Typiska β-sönderfallsenergier är $\sim$ MeV. Det ger att typiska rörelsemängder är $\vec{p} \sim$ MeV/c, så $\frac{p}{\hbar} \sim \frac{1}{200}$ fm^{-1}.

Exponenten är alltså väldigt liten; och vi kan skriva

($\hbar c \sim 197$ MeVfm)

Scanned with CamScanner

$e^x = 1 + \mathcal{O}(x)$ för små x

Sönderfall med tillåten approximation kallas tillåtna övergångar

$$M_{fi} \sim \int \psi_N^* H \psi_i \, dV.$$

Den här typen av approximation (att rörelsemängderna för leptonerna är mycket små) kallas tillåten approximation. Detta kallas även Fermiteori (för β-sönderfall). Då rörelsemängden för leptondelen är liten är även rörelsemängdsmomentet för leptondelen litet. Vi har alltså

$\vec{L} = 0$ (leptondel) i Fermiteori.

Det betyder att

$\vec{J}_i = \vec{J}_N + \vec{S}_{lepton}$.

dotterkärna

Vet att

	e^+	e^-	ν	$\bar{\nu}$
$s =$	1/2	1/2	1/2	1/2

så

Fermiövergång — Gamow-Tellerövergång

$S_{lepton} = 0, 1$.

pariteten bevaras också

För Fermiövergången gäller alltså

$S = 0 \Rightarrow \Delta J = |J_i - J_f| = 0$.

β-sönderfall där spinn bevaras från moder- till dotterkärna

totala kärnspinn

I Gamow-Teller gäller

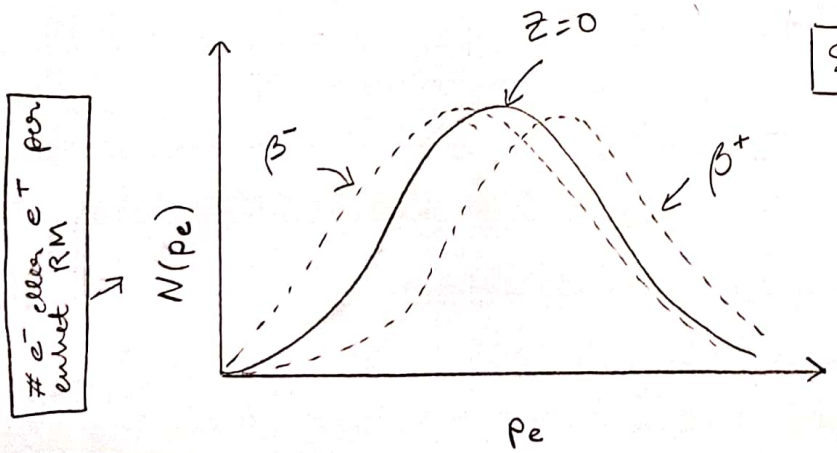
$S = 1 \Rightarrow \Delta J = |J_i - J_f| = 0, 1.$

pariteten bevaras också

Se labb-PM för labb K5.

$0^+ \to 0^+$ är dock en förbjuden övergång i Gamow-Teller

Se figur 8.10



För β-sönderfall gäller

$\pi_\beta = (-1)^{L_\beta}$

dvs $\pi_i = \pi_\beta \pi_f$

Scanned with CamScanner

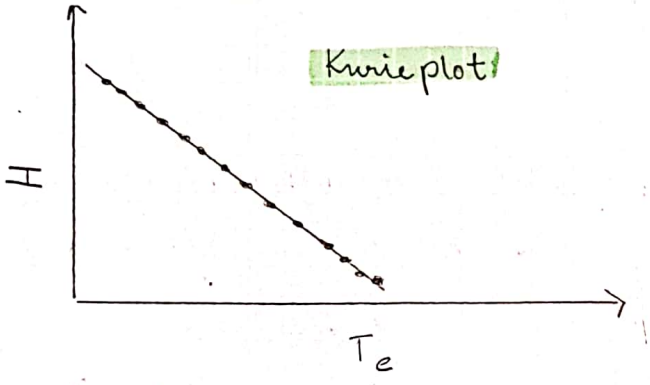
Med "Fermi screening factor" $F(Z, E_e)$ fås

$$\boxed{\frac{dw}{dp_e} = \frac{F G^2 |M_{fi}|^2 p_e (E_0 - E_e)^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3}}$$

Med detta uttryck kan vi beskriva β-sönderfall i Fermiteori! Det kan skrivas som

$$H(E_e) \equiv \left[\left(\frac{dw}{dp_e}\right) \frac{1}{p_e^2 F(Z, p_e)}\right]^{1/2} \propto E_0 - E_e.$$

Nu kan vi få



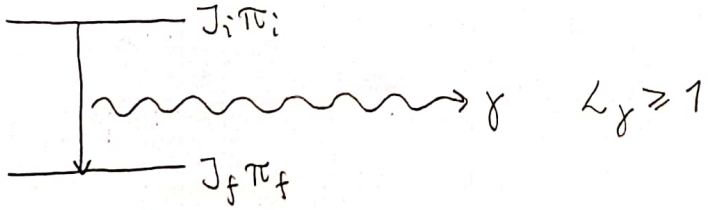
Kurieplot

$$\boxed{T_e = E_e - m_e c^2 \text{ (kinetisk energi)}}$$

I avsnitt 8.7.4 (b) och 8.7.4 (a) står mer om tillämpningar av Fermiteorin.

Gammasönderfall

Kommer endera sönderfallsregler. Studera två energinivåer:



Måste gälla att

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L}_\gamma \quad \Longrightarrow \quad |J_i - J_f| \leq L_\gamma \leq J_i + J_f.$$

Paritet (π) bevaras i EM-växelverkan, så

$$\pi_i = \pi_f \pi_\gamma \quad \Longrightarrow \quad \pi_i \pi_f = \pi_\gamma.$$

Scanned with CamScanner

Vi kan förstå pariteten genom att studera

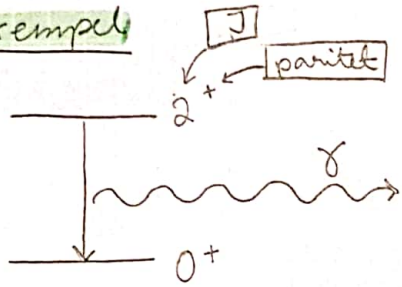
- en elektriske dipol $\sim q\vec{r}$, $\pi_{E1} = -$, $L = 1$
- en magnetisk dipol $\sim q\vec{r}\times\vec{v}$, $\pi_{M1} = +$, $L = 1$

Det gäller att

$$\pi_{EL_\gamma} = (-1)^{L_\gamma},$$
$$\pi_{ML_\gamma} = (-1)^{L_\gamma+1}.$$

L_γ = multipolaritet

Exempel



$L_\gamma = 2$ styr

$$|J_i - J_f| \leq L_\gamma \leq J_i + J_f$$
$$\Rightarrow |2 - 0| \leq L_\gamma \leq 2 + 0$$
$$\Rightarrow L_\gamma = 2$$

Har att

$$\pi_{E2} = (-1)^2 = +$$
$$\pi_{M2} = (-1)^{2+1} = -$$

π_{X2}; antingen π_{M2} eller π_{E2}

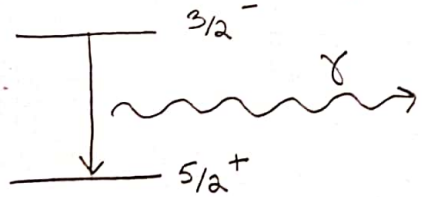
$$\underbrace{\pi_i}_{+} = \underbrace{\pi_f}_{+}\,\pi_\gamma \Rightarrow \pi_\gamma = + = \pi_{E2}\ (\text{här})$$

Det måste alltså vara så att endast elektriska komponenten som existerar och vi har då ett γ-sönderfall som är en E2-övergång.

Om det finns flera möjliga övergångar har den med lägst multipolordning högst sannolikhet att ske (fig 8.14)

Se figur 8.14

Ett annat exempel:



För att få L_γ:

$$\left|\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right| \leq L_\gamma \leq \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2} \Rightarrow 1 \leq L_\gamma \leq 4$$

Så $L_\gamma = 1, 2, 3, 4$. Har att $\overbrace{\pi_i}^{-} = \overbrace{\pi_f}^{+}\,\overbrace{\pi_\gamma}^{?}$, så vi måste ha E1, M2, E3, M4 som möjliga övergångar.

fotonens paritet

Kvantfysik: viss sannolikhet att ske!

Scanned with CamScanner

Laboration K5

Fermiteori för β-sönderfall

Kommer koppla övergångsregler med mätdatan som fås från detektorn: Antal elektroner med energi T_e ($N_e(T_e)$).

Det gäller att

övergångshastighet från $i \rightarrow$ till f

sönderfallsmatriselement för β-sönderfall

slutillståndstätheten

$$N_e(T_e) = \frac{d\lambda_{fi}}{dT_e}, \qquad \lambda_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\hat{H}_\beta|i\rangle|^2 \varrho(E_f)$$

Fermis gyllene regel

där interaktionskonstant

interaktionen sker i en punkt i rummet

$$\hat{H}_\beta = G_\beta \hat{\tau}^{\pm} \delta(x' - x).$$

operator som byter en neutron (proton) mot en proton (neutron)

I Fermiteorin ansätter vi

$$\langle \vec{x}|i\rangle = \psi_M(\vec{x})$$

$$\langle \vec{x}|f\rangle = \phi_{e^-}(\vec{x})\,\phi_{\bar{\nu}}(\vec{x})\,\psi_D(\vec{x}),$$

och

$$\phi_{e^-}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_{e^-}\cdot\vec{x}}, \qquad \phi_{\bar{\nu}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_{\bar{\nu}}\cdot\vec{x}},$$

$$\phi_{e^-}(\vec{x})\,\phi_{\bar{\nu}}(\vec{x}) = \frac{1}{V} e^{i(\vec{k}_{e^-} + \vec{k}_{\bar{\nu}})\cdot\vec{x}}.$$

Bevarande av rörelsemängd ger

$$\vec{P}_D + \hbar(\vec{k}_{e^-} + \vec{k}_{\bar{\nu}}) = \vec{P}_M.$$

Vi har att

$$M_M \approx M_D \gg m_{e^-} \gg m_{\bar{\nu}},$$

vilket ger

$$\vec{P}_M \approx \vec{P}_D \quad \text{och} \quad \vec{k}_{e^-} + \vec{k}_{\bar{\nu}} \approx 0.$$

Så

$$\phi_{e^-}(\vec{x})\,\phi_{\bar{\nu}}(\vec{x}) \approx \frac{1}{V}.$$

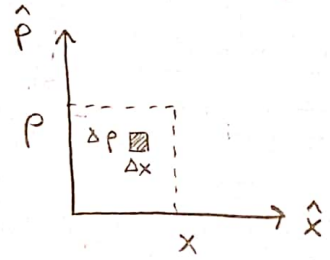
Detta kallas en tillåten approximation.

Scanned with CamScanner

Det ger att

$$\langle f|\hat{H}_\beta|i\rangle = \frac{G_\beta}{V}\int \underbrace{\psi_D^*(\vec{x})\tau^+\psi_M(\vec{x})\,d^3x}_{\equiv M_{fi},\ \text{länk mellan mätdata och övergångsreglerna}}.$$

Nu behövs alltså $\varrho(E_f)$. Tillståndstätheten för en partikel i en dimension:



Heisenbergs osäkerhetsprincip ger $\Delta p\Delta x \geq h$, så antalet tillstånd blir $N(p) = \frac{px}{h} = \frac{px}{2\pi\hbar}$.

← volym av element $\Delta p\Delta x$

Det gäller att

$$\varrho(E) = \frac{dN(\varrho)}{dE} = \frac{dN(p)}{dp}\frac{dp}{dE}, \qquad p = \sqrt{2mE} \Rightarrow \frac{dp}{dE} = \frac{m}{\sqrt{2mE}},$$

så

$$\varrho(E) = \frac{xm}{2\pi\hbar\sqrt{2mE}}.$$

Tillståndstätheten för tre partiklar i tre dimensioner:

Modellkärnans masscentrum som referenssystem ger

$$\vec{p}_D + \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{\bar{\nu}} = \vec{p}_M = 0 \Rightarrow \vec{p}_D = -\vec{p}_{e^-} - \vec{p}_{\bar{\nu}}.$$

Eftersom $M_D \gg m_{e^-} \gg m_{\bar{\nu}} \approx 0$ kommer $Q \approx T_{e^-} + T_{\bar{\nu}}$ där

$$T_{e^-} = \frac{p_{e^-}^2}{2m_{e^-}}, \qquad T_{\bar{\nu}} = cp_{\bar{\nu}} \leftarrow \boxed{\text{"masslös" partikel}}.$$

Minsta volymen i fasrummet är $(2\pi\hbar)^6$, så

$$N(p_{e^-}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6}\int_V d^3\vec{x}_{e^-}\int_V d^3\vec{x}_{\bar{\nu}}\int_{B(0,p_{e^-})} d^3\vec{p}_{e^-}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p}_{\bar{\nu}}\,\delta(T_{e^-}+T_{\bar{\nu}}-Q) =$$

$$= \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6}\int_{B(0,p_{e^-})} d^3\vec{p}_{e^-}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p}_{\bar{\nu}}\,\delta(T_{e^-}+T_{\bar{\nu}}-Q) =$$

$$= \frac{(4\pi)^2V^2}{(2\pi\hbar)^6}\int_0^{p_{e^-}} \vec{p}_{e^-}^{\,2}\,d\vec{p}_{e^-}\int_0^\infty p_{\bar{\nu}}^2\,d\vec{p}_{\bar{\nu}}\,\delta\left(\frac{p_{e^-}^2}{2m_e}+cp_{\bar{\nu}}-Q\right) =$$

$$= \frac{(4\pi)^2V^2}{(2\pi\hbar)^6}\int_0^{p_{e^-}} \vec{p}_{e^-}^{\,2}\,d\vec{p}_{e^-}\,c^{-3}\left(\frac{p_{e^-}^3}{2m_{e^-}}-Q\right)^2.$$

Scanned with CamScanner

Har alltså att

$$g(T_{e^-})\,dT_{e^-} = \frac{\sqrt{m_{e^-}}\, m_{e^-} V^2}{\sqrt{2}\, 2\pi^4 \hbar^6 c^3} (T_{e^-} - Q)^2 \frac{T_{e^-}}{\sqrt{T_{e^-}}}\, dT_{e^-},$$

vilket tillsist ger

$$d\lambda_{fi} = \frac{G_\beta^2 m_{e^-} \sqrt{m_{e^-}}}{\sqrt{2}\,\pi^3 \hbar^7 c^3} |M_{fi}|^2 (T_{e^-} - Q)^2 \sqrt{T_{e^-}}\, dT_{e^-},$$

så

$$N_{e^-}(T_{e^-}) = \frac{G_\beta^2 m_{e^-} \sqrt{m_{e^-}}}{\sqrt{2}\,\pi^3 \hbar^7 c^3} |M_{fi}|^2 (T_{e^-} - Q)^2 \sqrt{T_{e^-}}.$$

$= \frac{d\lambda_{fi}}{dT_{e^-}}$

Ett problem kvarstår: dotterkärnan har positiv laddning och attraherar (repellerar) elektronen (positronen). Planvågsapproximationen stämmer alltså inte. I stället är Fermifunktionen $F(Z, T_e)$: ← dotterkärnans laddningstal

$$N_{e^-}(T_{e^-}) = \frac{G_\beta^2 m_{e^-} \sqrt{m_{e^-}}}{\sqrt{2}\,\pi^3 \hbar^7 c^3} |M_{fi}|^2 F(Z, T_{e^-}) (T_e - Q)^2 \sqrt{T_{e^-}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{N_{e^-}(T_{e^-})}{F(Z, T_{e^-})\sqrt{T_{e^-}}}} \propto (T_{e^-} - Q)$$

← en plot av detta mot T_{e^-} kallas Kurieplot, är noll då $T_{e^-} = Q$. Kan anpassa rät linje till potten, extrapolera tills den är noll och på så sätt bestämma Q!

210422 — 8

Icke-sfäriska kärnor (8.4)

Har hittills antagit sfärisk kärntäthet $\rho(r)$. Skulle dock kunna vara t.ex. ellipsoid.

Sfärisk — "amerikansk fotboll" — "frisbee"

Hur kan vi mäta formen på en atomkärna? För sfärisk form är

Scanned with CamScanner

sfärisk symmetri

$$\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle \Rightarrow \langle r^2\rangle = \langle x^2+y^2+z^2\rangle = 3\langle z^2\rangle$$

För att mäta avvikelsen från sfärisk symmetri används det elektriska kvadrupolmomentet Q enligt

$$eQ \equiv \int \rho(\vec{r})\,(3z^2 - r^2)\,d^3\vec{r},$$

Q är mått på "icke-sfäricitet"

som är första ordningens paritetsbevarande avvikelse från sfärisk symmetri. Om man mäter kvadrupolmomentet Q kan avvikelsen från sfärisk form på atomkärnan avgöras. Om $\rho(\vec{r})$ är sfäriskt symmetrisk måste $eQ = 0$! Det gör att om $eQ \neq 0$ så är $\rho(\vec{r})$ icke-sfäriskt.

I uppgift 8.5 kan man visa att om

$Q < 0$ oblat kärna ("frisbee")

$Q > 0$ prolat kärna ("amerikansk fotboll").

Från skalmodellen får vi att

$$Q \approx -R^2 \frac{2j-1}{2(j+1)},$$

← R = kärnradien

Se figur 8.7

där j är totalt spinn för en proton i en enpartikel-orbital $n\ell_j$.

α-sönderfall (8.6)

En α-partikel är en ^4He-isotop.

$$\underset{(Z,A)}{M} \longrightarrow \underset{(Z-2,A-4)}{D} + \underset{(Z=2,A=4)}{\alpha}$$

α-sönderfall sker för tyngre kärnor där $A \gtrsim 100$.

Q-värdet för sönderfallet är

$$Q_\alpha = (m_M - m_D - m_\alpha)c^2 = E_D + E_\alpha,$$

Scanned with CamScanner

~MeV

kan använda klassisk mekanik

där

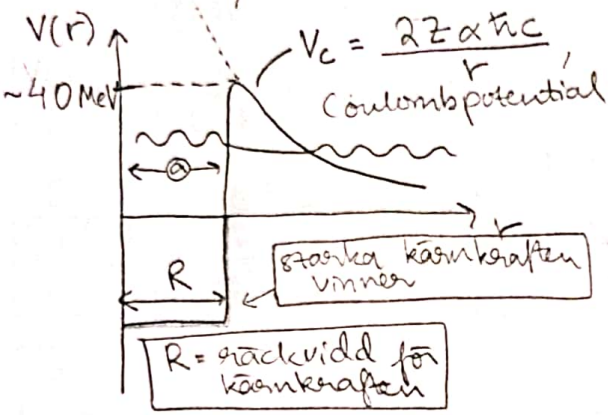
$$E_\alpha = m_D \frac{Q_\alpha}{m_\alpha + m_D}$$

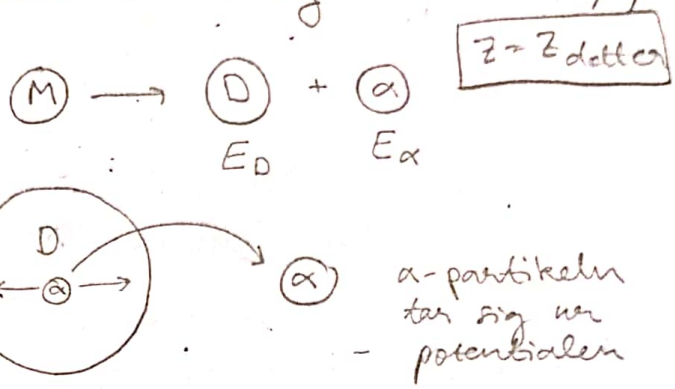
Geiger-Nuttalrelationen är en empirisk observation som lyder

$$\log_{10} t_{1/2} = a + bZE_\alpha^{1/2}$$

som visar känsligt beroende för halveringstiden $t_{1/2}$ av kinetiska energin E_α.

α-sönderfall är kvantmekanisk tunnling. Betrakta följande:





Coulombbarriärens höjd kan beräknas genom att undersöka **arbetet som krävs för att föra en α-partikel** från "$r = \infty$" till ytan på $^{238}_{92}U$ (t.ex.). Det motsvaras av (Coulomb-) energin

Z = 2

$$E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cdot Ze^2}{R} = \{\text{i fallet för } ^{238}_{92}U\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cdot 92e^2}{R_{^{238}U}} = \frac{2\cdot 92}{1\cdot 2\cdot 238^{1/3}}\alpha\hbar c \approx 36\ \text{MeV} \sim 40\ \text{MeV}$$

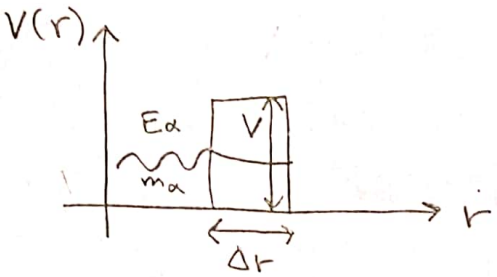
För att α-partikeln skall kunna komma över barriären borde de detekterade α-partiklarna ha $E_\alpha \gtrsim 40$ MeV klassiskt sett. Men de α-partiklar som detekteras har $E_\alpha \sim 4$ MeV, vilket beror på tunnling.

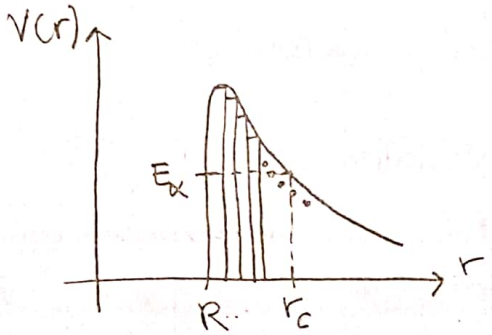
Scanned with CamScanner

Nu vill vi beräkna sannolikheten för sönderfall per tidsenhet, dvs

$$\lambda = w(\alpha)\left[\frac{v}{2R}\right]T \qquad (8.54)$$

- $w(\alpha)$: sannolikhet att α-partikel spontant bildas i dotterkärnan
- $\left[\frac{v}{2R}\right]$: kollisionsfrekvens för α-partikel mot barriär
- T: sannolikhet för tunnling





Transmissionssannolikheten ges av

$$T \approx e^{-2\kappa\Delta r}$$

där

$$(\hbar\kappa)^2 = 2m(V - E_\alpha),$$

$$m = \frac{m_\alpha m_D}{m_\alpha + m_D} \approx m_\alpha.$$

Kan skriva

$$T = e^{-G},$$

där Gamowfaktorn ges av

$$G = \frac{2}{\hbar}\int_R^{r_c}\left[2m|V_c(r) - E_\alpha|\right]^{1/2} dr$$

och

$$E_\alpha = V_c(r_c).$$

Vi har att

$$V_c(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_c} = E_\alpha, \qquad V_c(r) = \frac{r_c}{r}E_\alpha,$$

så

$$G = \frac{2(2mE_\alpha)^{1/2}}{\hbar}\int_R^{r_c}\left(\frac{r_c}{r} - 1\right)^{1/2} dr.$$

Den evaluerade integralen syns i (8.52). Med $r_c \gg R$ (typ $E_\alpha \sim 5$ MeV och barriären är ~40 MeV)

fås

$$G \approx 4\pi\alpha\frac{Z}{\beta}$$

där

$$\beta = \frac{v_\alpha}{c}, \qquad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}}.$$

Scanned with CamScanner

Det gäller alltså att

$$G \propto \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}}.$$

Vi har alltså

$$\lambda = \omega(\alpha)\left[\frac{v}{2R}\right]e^{-G}.$$

v: abstrakt v, för hastigheten för α i dotterkärnan, en konstant

Eftersom $\lambda = \ln 2 / t_{1/2}$ gäller

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\omega(\alpha)}\frac{2R}{v}e^{G} \Rightarrow$$

$$\ln(t_{1/2}) = a + bZE_\alpha^{-1/2}$$

a beror på sannolikheten $W(\alpha)$, dvs beror på kärnan

Vi kom fram till Geiger-Nuttalrelationen! Har att $b \sim 1{,}8$.

210423 — 9

Kvarkar (3.2)

Kvarkars växelverkan med varandra beskrivs med kvantkromodynamik (QCD). Kvarkar är elementarpartiklar som alltid binder via stark kraft till ytterligare minst en annan kvark (q).

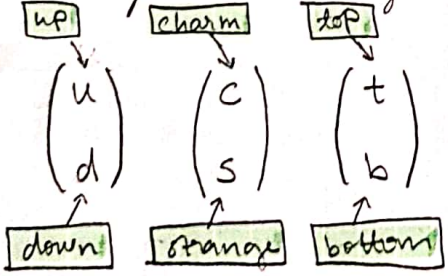
$|q\,q\,q\rangle$ Baryon, t.ex. protoner och neutroner

$|q\,\bar{q}\rangle$ Meson, t.ex. pioner

} Hadroner, dvs partiklar som består av kvarkar.

Kvarkar växelverkar via stark, svag, elektromagnetisk och gravitationell kraft. Gravitationen försummas.

Det finns sex stycken kända kvarkar;



Kvarkar har spinn 1/2

Kvarkarna har kvanttal med samma namn

och är de enda elementarpartiklar som gör det!

som delas in i tre generationer.

Scanned with CamScanner

Det finns även **antikvarkar**:

$$\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{d}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\bar{c}\\ \bar{s}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\bar{t}\\ \bar{b}\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Q: -\frac{2}{3}e \\ Q: +\frac{1}{3}e \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Q: +\frac{2}{3}e \\ Q: -\frac{1}{3}e \end{matrix}$$

Fermioner (har spinn $\frac{1}{2}$), har elektrisk laddning Q

Protonen: $|uud\rangle$, dvs laddning $\left(+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)e = e$

Neutronen: $|udd\rangle$, dvs laddning $\left(+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)e = 0$

Kvarkmassorna är estimerade från hadrondata och modeller för kvarkväxelverkan. (se tabell 3.2).

toppkvarken har så kort livstid att den bara kan undersökas via dess sönderfallsprodukter

Kort om **Feynmandiagram**

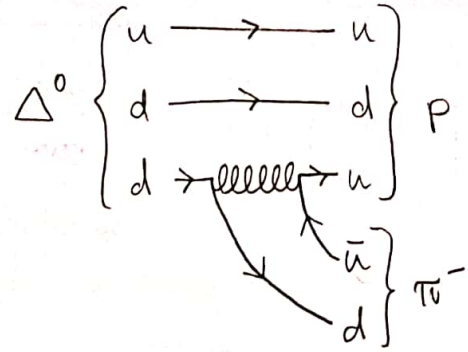
- Tiden ritas åt höger: $\longrightarrow t$
- Fermionpartiklar ritas åt höger: $f \longrightarrow f$
- Fermionantipartiklar ritas åt vänster: $\bar{f} \longleftarrow \bar{f}$
- Foton ritas vågigt: $\overset{\gamma}{\sim\sim\sim}$ EM
- Gluonen ritas som spiral: ⋯⋯ stark kraft
- t.ex fås $e^- \rightarrow \sim\sim \rightarrow e^-$, $u \rightarrow \sim\sim \rightarrow u$.

Exempel

Δ: Baryon

$$\Delta^0 \longrightarrow p^+ + \pi^-$$

kan ritas



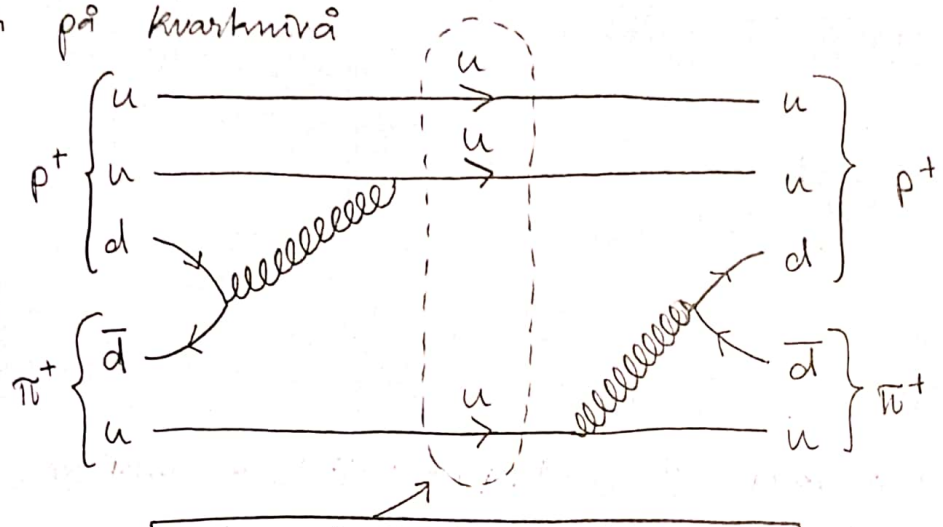
Förklarar vad som händer i en växelverkansprocess på kvarknivå!

Scanned with CamScanner

Exempel

$$p^+ + \pi^+ \longrightarrow \Delta^{++} \longrightarrow p^+ + \pi^+$$

är på kvarknivå



under ett kort ögonblick finns bara $|uuu\rangle$, dvs Δ^{++} ← ++, ty $Q = 3 \cdot \frac{2}{3}e = 2e$

- Reaktionssannolikheterna eller kvarkdiagrammen vi kan teckna begränsas av bevarningslagar (energi och rörelsemängd).
- Stark och EM växelverkan mellan kvarkar kan endast skapa q-$\bar{q}$-par, dvs

$$e^+ + e^- \longrightarrow c + \bar{c} \quad \text{OK!} \quad (*)$$

$$e^+ + e^- \longrightarrow c + \bar{u} \quad \underline{\text{EJ}} \text{ OK!}$$

Kan bara skapa q-$\bar{q}$-par av samma typ:

q:	u	d	c	s	t	b
$\bar{q}$:	$\bar{u}$	$\bar{d}$	$\bar{c}$	$\bar{s}$	$\bar{t}$	$\bar{b}$

"flavour"

Stark och EM kraft bevarar kvarktal smakvis, där u, d, c, s, t, b är smaker. Smakkvantstalet definieras av

$$N_f \equiv N(f) - N(\bar{f})$$

antalet f — antalet $\bar{f}$

Svag växelverkan bevarar kvarktal - oberoende av smak dvs bevarar # kvarkar - #antikvarkar

Så eftersom $(*)$ har $N(c) = 1$, $N(\bar{c}) = 1$ måste $N_c = 0$ både före och efter reaktionen.

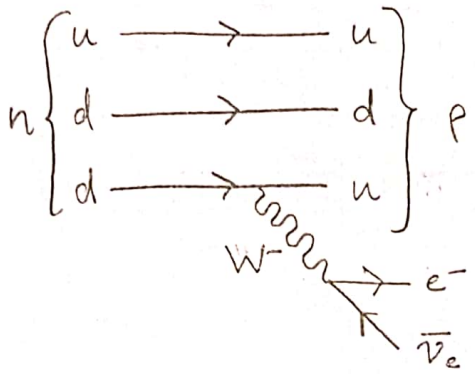
Scanned with CamScanner

information om kvarkar finns i tabell 3.2

Betrakta

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

Kvarkinnehållet är:



← svag växelverkan

men i stark och EM måste det även bevaras smakvis

Det totala kvarktalet $N_q \equiv N(q) - N(\bar{q})$ är alltid bevarat. Baryontalet är $B \equiv \frac{N_q}{3}$. Protonen är den lättaste hadronen med $B = 1$. Eftersom B alltid är bevarat kan p^+ inte sönderfalla till något, dvs protonen är stabil.

Hadroner (3.3)

Den starka kraften beror inte på kvarksmak, så den starka kraften mellan d och s är samma som mellan c och s, t.ex. Betrakta de lättaste kvarkarna u och d: $m_u \approx m_d$, dvs u- och d-kvarkarna har nästan samma massa, $m_d - m_u = 3 \pm 1$ MeV/c². Vi vet ju att $V_{nn} \approx V_{pp} \approx V_{np}$. Symmetrin mellan u- och d-kvarkar kallas isospinnsymmetri. Nukleonen kan betraktas som en partikel $N = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ med isospinnkvanttal $I = \frac{1}{2}$. Om projektionen av isospinnet (m-kvanttal) $I_3 = +\frac{1}{2}$ har vi en proton, om $I_3 = -\frac{1}{2}$ har vi en neutron.

Se figur 3.13: spegelkärnor är kärnor med omvända Z och N

Scanned with CamScanner

s. 111-113 verkar inte relevanta

Isospinnkvanttalet på kvarknivå definieras som

$$I_3 = \frac{1}{2}\left((n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}})\right).$$

Vi har

π : π^+, π^-, π^0

där

	π^+ : $u\bar{d}$	π^- : $d\bar{u}$	π^0 : $\frac{1}{\sqrt{2}}\left((u\bar{u}) - (d\bar{d})\right)$
I_3 :	1	−1	0

proton: uud ⇒ $I_3 = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$
neutron: udd ⇒ $I_3 = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}$

De olika projektionerna ger alltså $I = 1$. Har att $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 140$ MeV/c² och $m_{\pi^0} = 135$ MeV/c².

Man kan inte konstruera motsvarande isospinn kvanttal för c, s respektive t, b eftersom de har för stora masskillnader. Däremot inför vi:

$$S = N(\bar{s}) - N(s)$$
$$C = N(c) - N(\bar{c})$$
$$\tilde{B} = N(\bar{b}) - N(b)$$
$$T = N(\bar{t}) - N(t)$$

Smakkvanttalen har samma tecken som tecknet för den den elektriska laddningen.

simple quark model: baryon $|qqq\rangle$, antibaryon $|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$, meson $|q\bar{q}\rangle$

observ. tecken

Kan nu införa en hyperladdning Y enligt

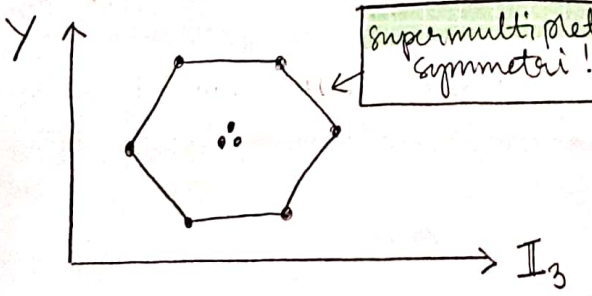
$$Y \equiv B + S + C + \tilde{B} + T$$

baryoner: halvtalsspinn
mesoner: heltalsspinn

Baryontal

Det här ger ett viktigt exempel på symmetri. Om vi tittar på mesoner $|q\bar{q}\rangle$ där $q = u, d, s$ finns $3 \cdot 3 = 9$ mesoner (kvarkpar), med $L = 0$, $\pi_q = +$, $\pi_{\bar{q}} = -$, har vi $J^\pi = 1^-$, där $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Det ger:

kvarkar och antikvarkar har olika paritet



supermultiplett, symmetri!

Se figur 3.15

J=1 för S=1

Scanned with CamScanner

Protonen är stabil för att den är den lättaste partikeln med nollskilt baryontal och baryontalet bevaras under växelverkan

Sönderfall, tidsskalor och invariant massa (3.3.3)

Betrakta en reaktion (detekteras)

$$N + \pi \xrightarrow[\text{skapar}]{} \Delta \xrightarrow[\text{sönderfaller } \sim 10^{-24}\,\text{s}]{} N + \pi, \qquad m_\Delta = 1232\ \text{MeV}/c^2.$$

Hur detekterar man Δ och verifierar dess existens?

Om Δ har bildats så är det en partikel med väldefinierade kvanttal och massa m_Δ. Då kan man beräkna

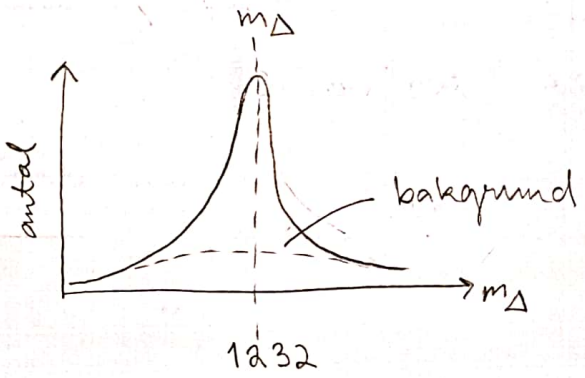
$$E_\Delta = E_\pi + E_N$$
$$\vec{p}_\Delta = \vec{p}_\pi + \vec{p}_N$$

4-RM (uppmätta)

Hadroner kan bara sönderfalla via stark växelverkan om det existerar lättare tillstånd sammansatta endast av andra hadroner med samma kvanttal

Total P är bevarad i $\Delta \longrightarrow \pi + N$ så

$$P_\Delta = P_\pi + P_N = (E_\pi + E_N,\ \vec{p}_\pi + \vec{p}_N) \Rightarrow$$
$$P_\Delta^2 = m_\Delta^2.$$



Mäter hur många invarianta m_Δ vi kan konstruera utifrån data från N och π.

Typiska livstider i tabell 3.4

Kvantkromodynamik (QCD) (5.1, 5.2)

Betrakta en baryon $\Omega^- = |sss\rangle$. Man har konstaterat att $S = -3$, $J = \frac{3}{2}$, $L = 0$, $m_s + m_s + m_s = +\frac{3}{2}$. $\uparrow^{m_s = \frac{1}{2}}$ $\uparrow\uparrow\uparrow$

särkvanttal Den här situationen med tre identiska kvarktyper och m_s leder till en symmetrisk vågfunktion ψ_{Ω^-}! Det bryter mot Pauliprincipen!

Scanned with CamScanner

"colour"

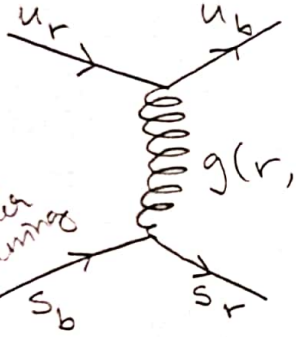
Det behövs en ny frihetsgrad: Färg! Det finns tre färger: röd (r), grön (g), blå (b). Vi har att $\Omega^- = |sss\rangle_{rgb}$. I QCD finns tre färgladdningar: $r/\bar{r}$, $g/\bar{g}$, $b/\bar{b}$. Vi observerar endast färglösa tillstånd (färgsinglетter); röd, grön och blå ger färglöst. Det gäller:

"colour charge"

- QCD: masslösa gluoner g, ~~~~, kopplar till färgladdning! Gluoner är färgladdade.
- QED: masslösa fotoner γ, ~~~, kopplar till elektrisk laddning! Fotoner är neutrala.

stor skillnad!

Att g är färgladdade och γ neutrala får stora konsekvenser. Betrakta kvarkväxelverkan:



tar med dessa laddningar

väldigt approximativt

gluoner är "tvåfärgade"

gluon byter färgerna för de två kvarkarna

fria kvarkar observeras inte

konsekvenser av att gluoner har färgladdningar

- Colour confinement, "färginneslutning", "färglösa hadroner"
- Asymptotic freedom; "asymptotisk frihet". Stark kraft starkare vid små avstånd / höga energier.

gluoner färgladdade ⟹ kan inte observeras fria

gluoner kopplar till färgladdade ⟹ gluoner kopplar till gluoner

Se tabell 5.1

$$\Psi = \psi_{rum}(\vec{r})\,\psi_{spinn}\,\psi_{färg}$$

antisymmetrisk för att Pauli skall hålla

Scanned with CamScanner

med A. Heinz: på engelska

210426 — 10

Fission (2.7, 9.1)

○ kärna i grundtillstånd eller exciterat tillstånd

⬭ första sadelpunkten

⬭⬭ andra sadelpunkten

∞ scissionspunkt

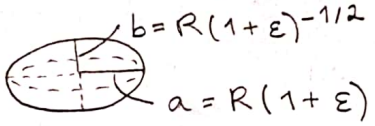
liquid drop model

←○ ○→ två exciterade fissionsfragment

I den semiempiriska formeln hade vi

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sym}\frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

Interplay mellan dessa termer centralt för att beskriva fission



Har att

$$\varepsilon = \beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}, \qquad V = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Om vi ökar ytans area fås

$$S = 4\pi R^2\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right).$$

Vi får att de nya termerna i SEMF (efter deformation) blir

$$E_S = a_S A^{2/3}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right)$$

$$E_C = a_C Z^2 A^{-1/3}\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots\right)$$

Skillnaden i energi blir

$$\Delta E = B(\varepsilon) - B(\varepsilon = V) = -a_S A^{2/3}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) - a_C Z^2 A^{-1/3}\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} \approx$$

$$\approx \left(-\frac{2}{5}a_S A^{2/3} + \frac{1}{5}a_C Z^2 A^{-1/3}\right)\varepsilon.$$

Då sker en deformation som påverkar dessa termer

Scanned with CamScanner

ΔE är positiv för

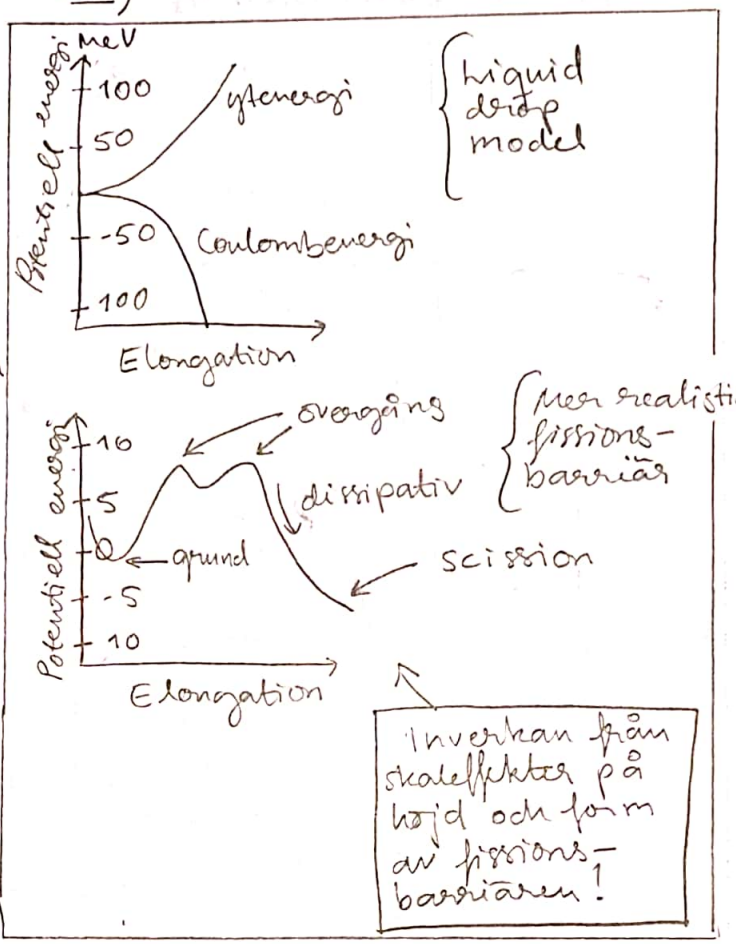
$$\frac{1}{5} a_c Z^2 A^{-1/3} > \frac{2}{5} a_s A^{2/3}$$

använder a_c, a_s $\Rightarrow$

$$\frac{Z^2}{A} > 47$$

fissilitet: hur sannolikt det är att fission sker

Fissionsbarriären är modulerad av kärnskalstruktur av den deformerade kärnan! Supertunga ämnen existerar pga detta!



Kan också tunnla genom fissionsbarriärer, men inte så vanligt. Laddade vätskedroppar delas symmetriskt, men skaleffekter ger upphov till asymmetrisk fission.

Hur en kärna delas: den sammansatta kärnan

- Den kinetiska energin av den inkommande partikeln fördelas till alla nukleoner

ung kula i skål

- Den sammansatta kärnan har inget "minne" av hur den skapades
- Karaktäriseras av dess antal protoner och neutroner, dess energi, rörelsemängdsmoment och paritet.

Scanned with CamScanner

Fission och par

Neutroninducerad fission:

$$n + {}^{235}U \longrightarrow \text{fission},$$

det ger

$$E^* = [m({}^{236}U^*) - m({}^{236}U)]c^2,$$

där

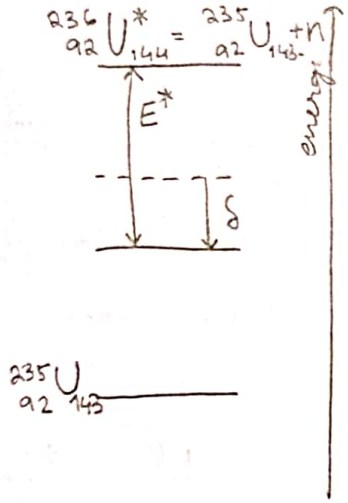
$$m({}^{236}U^*) = m({}^{235}U) + m_n = 236,052589\ u.$$

Vi har alltså att

$$E^* = 6,5\ MeV, \qquad B_f({}^{236}U) = 6,2\ MeV,$$

barriärenergi

så den kommer över barriären!



----- utan par

δ är energiskillnad med par (från partern i SEMF)

Vanligast

Det finns två typer av neutroner: "Prompt" neutroner och "β-delayed" - neutroner. β-fördröjda neutroner (ca 1 %) möjliggör kontrollerade kedjereaktioner.

Scanned with CamScanner

Fusion

Hur genereras energi i stjärnor?

- I rumstemperatur är $k_B T = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ eV
- Inuti en stjärna är $k_B T = 1{,}3$ keV
- I en supernova är $k_B T = 431$ keV.
- Kärnkollisioner har $k_B T = 3$ MeV.

Kinetisk energi kan konverteras till motsvarande temperatur (med k_B).

Fusionstvärsnitt: Tvärsnitt för kärnreaktioner i stjärnor är väldigt små. Varför? Hur mäter vi dem?

- Varför: I stjärnor sker mer tumling eftersom det finns så många partiklar.
- Hur mäter vi dem? Det kan vi inte! Det tar för lång tid. Vi extrapolerar istället: Behöver den astrofysikaliska S-faktorn.

Reaktionshastigheter i stjärnor:

$$r = N_x N_y \, v \, \sigma(v), \qquad [r] = \left[\frac{\text{reaktioner}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}}\right]$$

μ = reducerad massa
T = temperatur

Reaktionshastighet per partikelpar:

$$\langle \sigma(v) \rangle = \int_0^\infty \phi(v) \, \sigma(v) \, dv, \qquad \phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2 k_B T}}$$

$$\langle \sigma(v) \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi k_B}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) \, e^{-\frac{\mu v^2}{2 k_B T}} \, dv.$$

Med E_{CM} fås

$$\langle \sigma(v) \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{1/2} \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty \sigma(E) \, E \, e^{-\frac{E}{k_B T}} \, dE$$

$$r = \frac{1}{1 + \delta_{xy}} N_x N_y \langle \sigma(v) \rangle$$

Scanned with CamScanner

Tunnlingssannolikhet:

$$p = e^{-2G},$$

där

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int [V(r) - Q]^{1/2} dr$$

inte riktigt samma som Martin/Shaw

Approximation:

$$2\pi\eta = 31{,}29 \cdot Z_1 : Z_2 \left(\frac{\mu}{E}\right)^{1/2},$$

Sommerfeld parameter

så

$$p = e^{-2\pi\eta}.$$

Bra approximation speciellt för lätta kärnor. Har att

$$\sigma(E) \propto \pi\lambda^2 \propto \frac{1}{E} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma(E) = \frac{1}{E} e^{-2\pi\eta} \underbrace{S(E)}_{\text{astrofysikaliska S-faktorn}}}$$

Gamowfönstret: Maxwell-Boltzmannfördelningen beskriver kärnenergierna i kärnor.

Gamowpeaken är <u>inte</u> konstant utan beror på temperaturen i stjärnans inre.

Scanned with CamScanner

Kvarkar och QCD (5.4)

Vi har tre kvarkfärger: röd, grön, blå. $N_c = 3$.

Varför finns det just tre färger? Kan göra experiment med spridning:

$$e^+ + e^- \longrightarrow q + \bar{q}$$

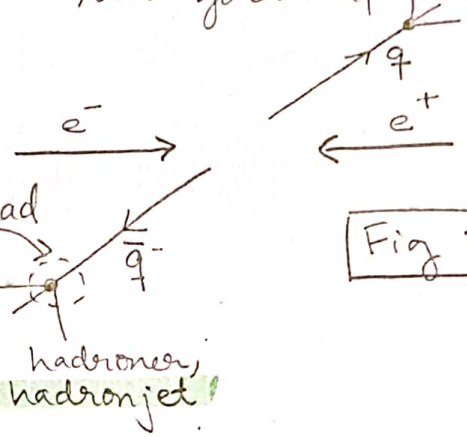
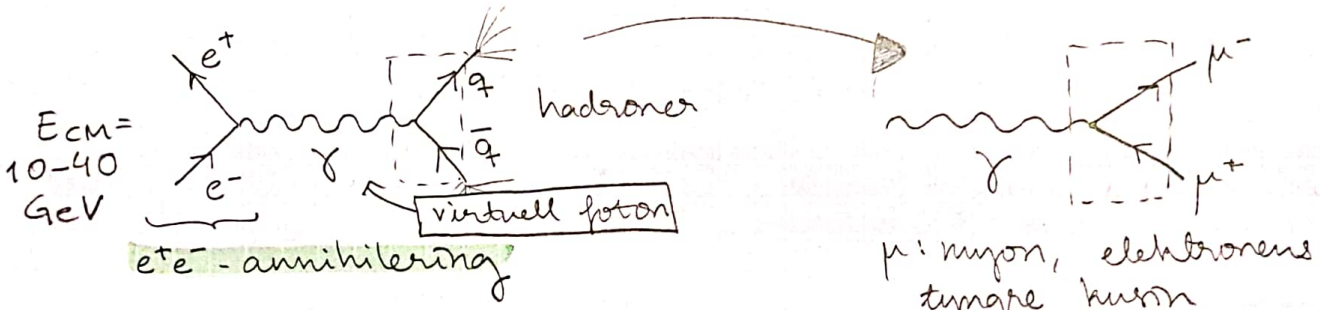


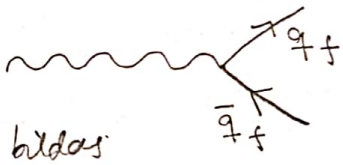
Fig 3.10

Får motriktade kaskader av hadronjets.

Om vi mäter $\sum_i p_i$, $i \in \{\text{hadroner i jets}\}$.

$$e^+ + e^- \longrightarrow \text{hadroner} \qquad (5.5)$$



EM-process där eller  där smaken är $f = udcsb(t)$ (t kan inte bildas pga sin massa). Har ett tvärsnitt

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \quad \text{och} \quad \sigma(e^+e^- \to \bar{q}_f q_f).$$

Kan skriva

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \propto \left| e_\mu e_e \frac{e^2}{E_{CM}} \right|^2$$

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}_f q_f) \propto \left| e_f e_e \frac{e^2}{E_{CM}} \right|^2,$$

$$|e_e|^2 = |e_\mu|^2 = 1,$$

Scanned with CamScanner

laddning för fermion

Så förhållandet (ration) är

$$R_f = \frac{\sigma(e^+e^- \to \bar{q}_f q_f)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = |e_f|^2,$$

Så det totala är

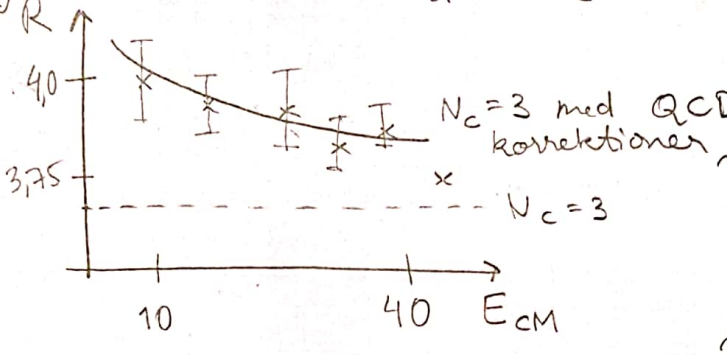
$$R = \sum_f |e_f|^2, \quad f = (u, d, c, s, b).$$

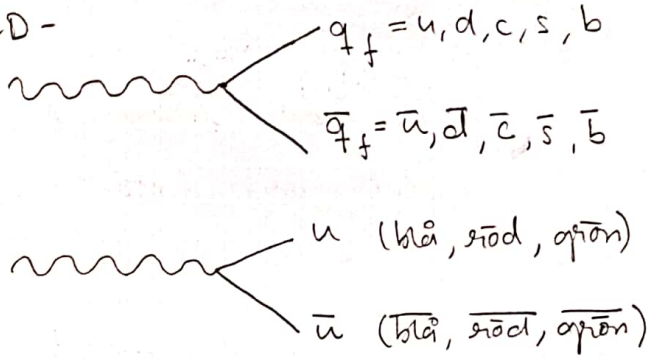
Får att

$$R = \left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 \right] \approx 1,22$$

$u \quad d \quad c \quad s \quad d$

ratio





$N_c = 3$ ger

$N_c = 3$

$$R = N_c \sum_f |e_f|^2 = 3,66.$$

Så vi observerar att N_c måste vara tre!

passar mycket bra med datan!

Leptoner (3.1)

Leptoner är punktformiga partiklar. Det finns sex leptoner:

			Q:
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$	0 −1

Se tabell 3.1

m: 0,511 105,7 1777,0 [MeV/c^2]

stabil instabil instabil

Tre generationer, sex leptonomaker. Finns även antileptoner:

			Q:
$\begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}$	1 0

de laddade leptonerna ($e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm$) har bara EM och svag växelverkan, medan neutrinos bara växelverkar svagt

Scanned with CamScanner

elektrontalet

Vi definierar ett leptontal! $L_e \equiv N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e)$

$L_\mu \equiv N(\mu^-) - N(\mu^+) + N(\nu_\mu) - N(\bar{\nu}_\mu)$

$L_\tau \equiv N(\tau^-) - N(\tau^+) + N(\nu_\tau) - N(\bar{\nu}_\tau)$

Vi har att

e^-: $L_e = 1$

e^+: $L_e = -1$

Adderas över flera partiklar

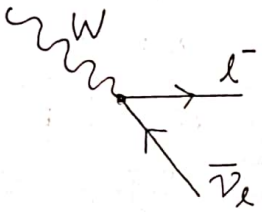
Betrakta t.ex:

$$\tau^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$$

L_τ:	1	0	0	1
L_e:	0	1	-1	0

Det finns inga tecken på reaktioner som bryter mot bevarandet av leptontal. L_e, L_μ, L_τ bevaras i alla kända reaktioner.

Betrakta nu neutrinon.

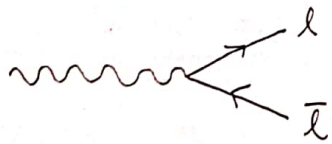


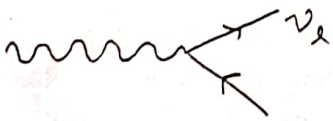
$l = e, \mu, \tau$

Z_0/N-boson: "massiv kusin till fotonen"

l och ν_l växelverkar likadant oavsett l

Växelverkan är lika stark oavsett $l = e, \mu, \tau$. Detta kallas "lepton universality". ← & ekvation (3.9). ← universality $\Rightarrow K_l = K^0$





Detaljerade experimentella och teoretiska studier av Z^0-sönderfall indikerar att det inte finns någon 4:e leptongeneration.

de tre neutrinerna är väldigt lika, men de tre laddade leptonerna är väldigt olika

Scanned with CamScanner

Neutrinoegenskaper (3.1.3, 3.1.4)

antar vi är masslös i Standardmodellen, $m_\nu = 0$

β^--sönderfall:

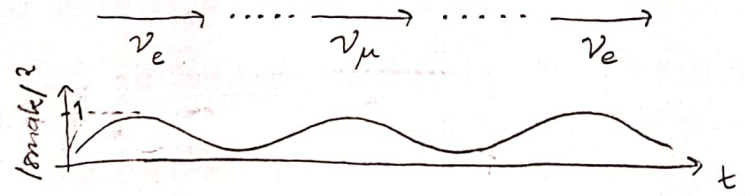
$$(Z, N) \longrightarrow (Z+1,\ N-1) + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Hur kan vi vara säkra på $m_\nu \neq 0$? ν växelverkar svagt. I solen sker fusionsreaktioner och det bildas stora mängder ν_e, ~10-tals miljarder per $cm^2 s$ (typ) vid jordytan. ν_e har fri medelvägslängd på 1 miljon km innan den växelverkar svagt. 1960 utförde Davis ett inverst β-sönderfallsexperiment:

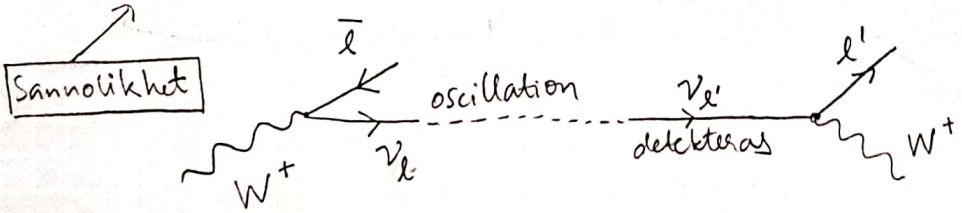
$$\nu_e + {}^{37}Cl \longrightarrow {}^{37}Ar + e^- \quad (\text{"solar neutrino detection"})$$

Vi har en sol-Standardmodell; och med experimentell detektion av ν_e på jorden observerades att hälften av alla ν_e vi förväntades detektera saknades! Kallas "solar neutrino problem". Löst: Detekterat neutrino oscillationer. Får att neutrinoer inte är masslösa! Det existerar alltså fysik bortom Standardmodellen! Neutrinooscillation gav Nobelpris 2015.

En neutrinooscillation är en smakoscillation. Har ν_e, ν_μ, ν_τ



Smaken förändras över tid!



Scanned with CamScanner

"Typen av laddad lepton (l eller l') från samma vertex som ν_l eller $\nu_{l'}$ definierar neutrinons smak. Definiera ett smaktillstånd $|\nu_l\rangle$, $l = e, \mu, \tau$, och ett masstillstånd $|\nu_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$. Om ν_i hade kunnat "väga" en neutrino ν_l så hade vi kunnat erhålla massorna m_{ν_1}, m_{ν_2}, m_{ν_3} med olika sannolikhet. Har att

$$|\nu_l\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{li} |\nu_i\rangle, \quad U \text{ är amplituden,}$$

så

$$U = \begin{bmatrix} u_{e1} & u_{e2} & u_{e3} \\ u_{\mu 1} & u_{\mu 2} & u_{\mu 3} \\ u_{\tau 1} & u_{\tau 2} & u_{\tau 3} \end{bmatrix}, \quad \text{unitär leptonmixingmatris.}$$

enklare, och ofta bra approximation

Följer boken: Har två smaker, $l = \alpha, \beta$ med smaktillstånd $|\nu_\alpha\rangle$, $|\nu_\beta\rangle$ och två masstillstånd $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$.

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} \\ u_{\beta 1} & u_{\beta 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|\nu_\alpha\rangle = u_{\alpha 1}|\nu_1\rangle + u_{\alpha 2}|\nu_2\rangle,$$
$$|\nu_\beta\rangle = u_{\beta 1}|\nu_1\rangle + u_{\beta 2}|\nu_2\rangle.$$

En unitär matris U parameteriseras med en vinkel (tre fasen):

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

i boken: $i \leftrightarrow 1$, $j \leftrightarrow 2$, $\theta_{ij} \leftrightarrow \theta$

Det ger att

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.$$

(3.20 - 3.21)

Scanned with CamScanner

mixningsvinkel, fås från experiment

så alla kan inte vara noll!

rörelsemängd

Om nu $\theta \neq 0$ och $m_1 \neq m_2$ fås neutrinooscillationer.

Vid $t=0$ antar vi att det bildas en neutrino $|\nu_\alpha, \vec{p}\rangle$

$\xrightarrow[\vec{p}]{\nu_\alpha}$ sönderfallar $\longrightarrow |\nu_\beta\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle$

där

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle \xrightarrow{t>0} |\nu_\alpha\rangle = a_1(t)\nu_1\cos\theta + a_2(t)\nu_2\sin\theta$$

$$a_1(t) = e^{-iE_1t/\hbar}, \quad a_2(t) = e^{-iE_2t/\hbar}. \qquad (3.23)$$

Så

$$|\nu_1\rangle = \cos\theta|\nu_\alpha\rangle - \sin\theta|\nu_\beta\rangle$$
$$|\nu_2\rangle = \sin\theta|\nu_\alpha\rangle + \cos\theta|\nu_\beta\rangle \qquad (*)$$

Kan utnyttja (*) genom att sätta in i (3.23) för att uttrycka tidsberoendet för ett mixat smaktillstånd.

$[A(t)|\nu_\alpha\rangle + B(t)|\nu_\beta\rangle]$ vid $t \neq 0$

Nu söker vi $A(t)$ och $B(t)$.

$A(t)$: $[a_1(t)\cos^2\theta + a_2(t)\sin^2\theta]|\nu_\alpha\rangle +$

$B(t)$: $[(\sin\theta\cos\theta)(a_2(t) - a_1(t))]|\nu_\beta\rangle$

så $|A(t)|^2$ är sannolikheten att vi har $|\nu_\alpha\rangle$

(3.27 - 3.28)

Får att

$$|B(t)|^2 = \sin^2(2\theta)\sin^2[(E_2 - E_1)t/2\hbar] \qquad (3.29)$$

Vi har alltså beräknat sannolikheten att finna $|\nu_\beta\rangle$ vid tid $t \neq 0$. Kräver $\theta \neq 0$, $E_2 \neq E_1$! Det här är hela logiken bakom neutrinooscillation.

Scanned with CamScanner

210506 — 12

I förra föreläsningen kom vi fram till sannolikheten

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = |B(t)|^2 = \sin^2(2\theta)\sin^2\left[\frac{E_2 - E_1}{2\hbar}t\right] \quad (3.29)$$

$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) \equiv 0$ om $E_2 = E_1$ (om neutrinomassorna är identiska) eller $\theta = 0$. ← ingen oscillation sker!

$$E_j - E_i = (m_j^2c^4 + p^2c^2)^{1/2} - (m_i^2c^4 + p^2c^2)^{1/2} =$$
$$= pc\left[\left(\frac{m_j^2c^4}{p^2c^2} + 1\right)^{1/2} - \left(\frac{m_i^2c^4}{p^2c^2} + 1\right)^{1/2}\right].$$

Från β-sönderfall vet vi att $m_\nu \lesssim 1\ eV/c^2$, $p \gg m_\nu$, $v \approx c$, $t = \frac{L}{c}$, så

$$E_j - E_i \approx \frac{(m_j^2 - m_i^2)c^4}{2pc}.$$

oscillationslängd $= \frac{L}{L_0}$

Så

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) \approx \sin^2(2\theta)\sin^2\left[\underbrace{\frac{(m_j^2 - m_i^2)c^2}{2pc}}_{=E}\ \frac{L}{c}\ \frac{1}{2\hbar}\right],$$

där

$$L_0 = \frac{4E(\hbar c)}{\underbrace{(m_j^2 - m_i^2)c^4}_{\Delta m_{ji}^2}}.$$

Med $E \sim GeV$ har vi $L \sim km$.

Experiment:

Atmosfäriska neutriner

$\begin{cases} \bar{\nu}_\mu & \nu_\mu \\ \bar{\nu}_e & \nu_e \end{cases}$

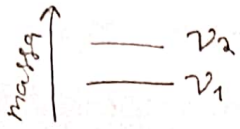
ν-strålar, solneutriner, reaktorneutriner... Ger oss möjligheter att anpassa Δm_{ij}^2, θ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Får att

$$(1{,}9 \lesssim |\Delta m_{32}^2| \lesssim 3) \cdot 10^{-3}\ [eV/c^2].$$

Solneutriner ger $\Delta m_{21}^2 = +7{,}5 \cdot 10^{-5}\ [eV/c^2]$. Vet även

Scanned with CamScanner

att $|\Delta m^2_{13}| \approx |\Delta m^2_{23}| \approx 2 \cdot 10^{-3}$ [eV/c²]. Har att $\Delta m^2_{21} > 0$.



Δm^2_{32} har okänt tecken. Antingen gäller

$\underbrace{m_2 > m_1 > m_3}_{\text{inverterad}}$ eller $\underbrace{m_3 > m_2 > m_1}_{\text{normal}}$

Hur mycket väger en e^--neutrino? $m_i \lesssim 2\,eV/c^2$.

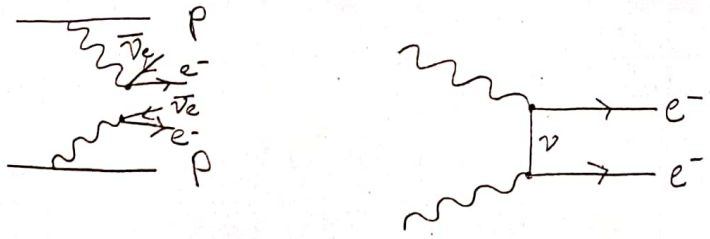
Varför har neutriner så liten massa? Har ju $m_e \approx 511\,000\,eV/c^2$.

Neutriner kan alltså oscillera, och det visar att de inte alla kan vara masslösa! Men om de har massa, varför är den så liten? En teori för neutriner säger att $\bar{\nu} = \nu$ (se 10.4.1). (majoranapartikel)

Det finns dubbelt β-sönderfall

$$(Z, A) \xrightarrow{\beta\beta} (Z+2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e.$$

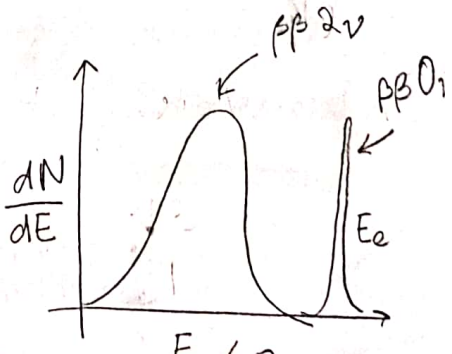
Om $\bar{\nu} = \nu$ fås (se fig 10.7)



$\beta\beta$-sönderfall med 0ν

En process där inga neutriner fås:

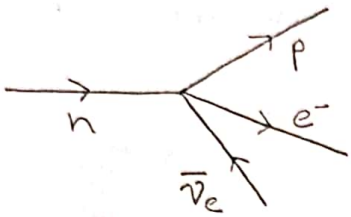
$$(Z, A) \longrightarrow (Z+2, A) + 2e^- + \cancel{2\bar{\nu}_e}$$



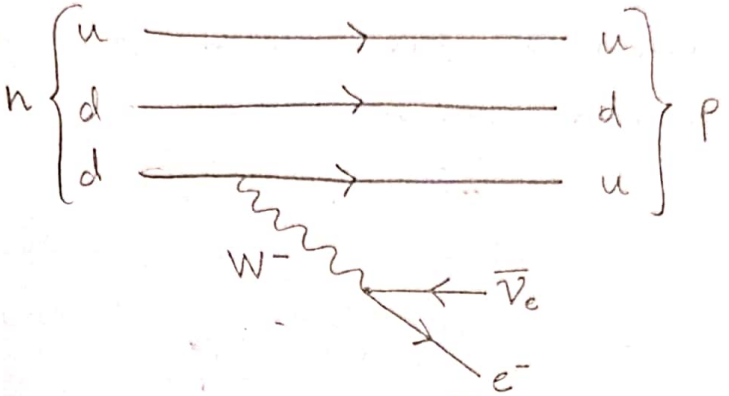
eftersöks just nu! Söker toppen till höger. Då skulle man få att leptontalet är brutet. Med kärnfysik kan man alltså få fysik bortom standardmodellen.

Scanned with CamScanner

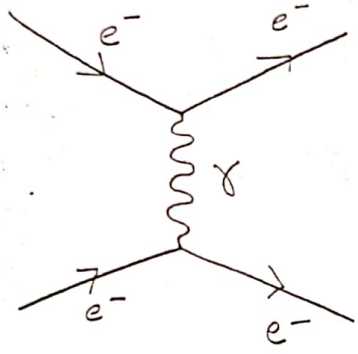
Svag växelverkan



β-sönderfall



EM:

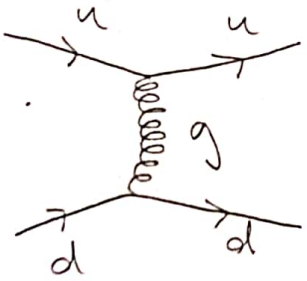


leptontal
total laddning
baryontal
} bevarade

smakvis kvarktal } ej bevarat, ty svag inte stark VxV

	Q	spinn	
W^+	+1	1	bosoner
W^-	−1	1	
Z^0	0	1	

QCD:



Svaga kraftbärare:

W^+, W^-, Z^0

massa: 81, 81, 91 GeV/c^2

extremt tunga kraftbärarpartiklar

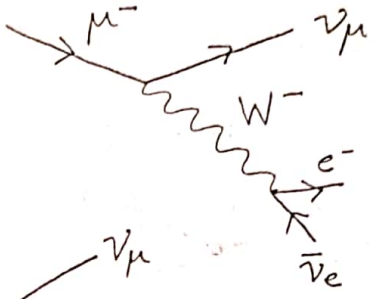
- Elektrisk och magnetisk växelverkan är förenade i Maxwells teori för elektromagnetism
- På samma sätt kan man förena EM och svag växelverkan i så kallad elektrosvag teori! Så vi kan sätta $Z^0 \approx \gamma$: överallt där ett γ-utbyte kan ske, kan även ett Z^0-utbyte ske!

γ, Z^0 elektriskt neutrala

Scanned with CamScanner

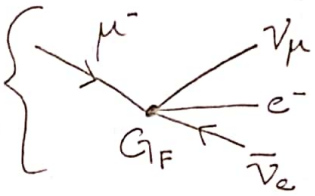
Vi har alltså att $W^{\pm}$, Z^0 (γ) förmedlar elektrosvag kraft enligt bevarandet av leptontal L och elektrisk laddning Q.

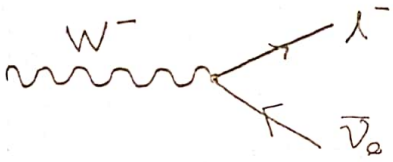
$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu$$



Precis som nukleoner kan beskrivas utan kvarkar, kan ett svagt sonderfall beskrivas med ett vertex.

svagt sonderfall





$l = e, \mu, \tau$

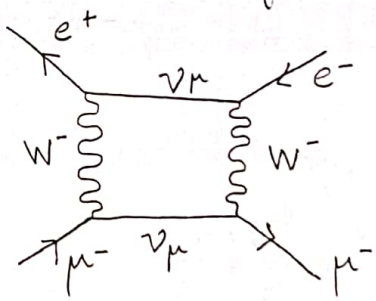
Går inte igenom 6.2.2 – 6.2.4 : Ignoreras i den här kursen.

Elektrosvag växelverkan

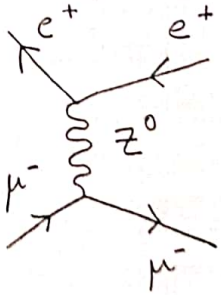
$M_Z \sim 91$ GeV/c^2. Betrakta

$$e^+ + \mu^- \longrightarrow e^+ + \mu^-.$$

Figur 6.22



ger teoretiska problem, med oändliga integraler. Om vi ser det här...

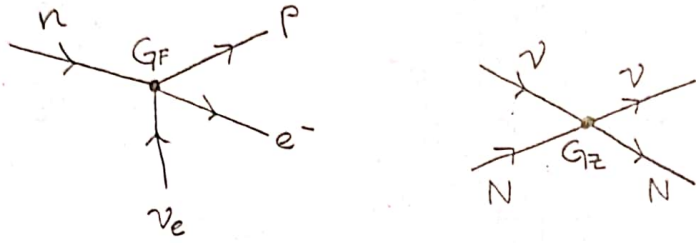


... mårta vi ha det här!

Scanned with CamScanner

I lågenergiexperiment ($E \ll M_{W,Z}$) kan man mäta svaga reaktionstvärsnitt för Z^0- och W^--reaktioner, och därmed fastställa värdet på respektive kopplingskonstant G_F, G_Z.

($g_W = G_F$ för lägre energier)



I formuleringen av elektrosvag teori kan man relatera G_F och G_Z enligt

kan mäta → $\frac{G_F}{G_Z} = \sin^2\theta_W$ ← svag mixningsvinkel

kan mäta

kan indirekt mätas

Har att $\sin^2\theta_W \approx 0{,}23$. Från samma teori fås att

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos\theta_W.$$

En teoretisk förutsägelse var att

$$\begin{cases} M_W^2 \sim \dfrac{\alpha}{G_F \sin^2\theta_W} \\ M_Z^2 \sim \dfrac{\alpha}{G_F \sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} \end{cases}$$

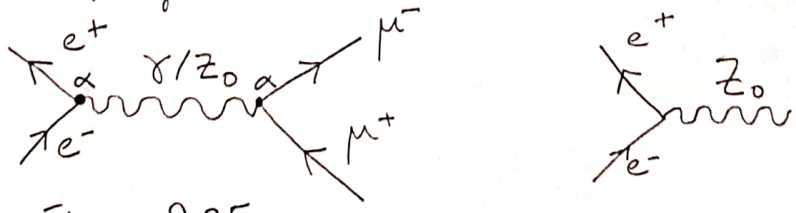
G_F, θ_W kan mätas
(α är finstrukturkonstanten)

med teori fås alltså

$$\begin{cases} M_W \approx 78 \text{ GeV} \\ M_Z \approx 88 \text{ GeV}, \end{cases}$$

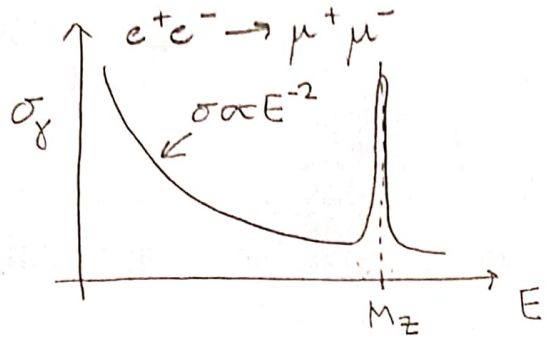
vilket stämmer fantastiskt bra med experiment.

Med $Z^0 \sim \gamma$ fås



Figur 2.25

Scanned with CamScanner



$$\sigma_\gamma \approx \alpha^2 \frac{(\hbar c)^2}{E^2}$$

Genom den här typen av e^+-e^--annihilering kan M_Z mätas.

210510 — 13

Symmetribrott i elektrosvag teori

Paritet (1.3.1)

Paritet definieras enligt

$$\hat{P}\,\Psi(\vec{r},t) \equiv P\Psi(-\vec{r},t),$$

där P är egenvärdet. Det gäller att

$$\hat{P}^2\Psi(\vec{r},t) = P\hat{P}\Psi(-\vec{r},t) = P^2\Psi(\vec{r},t) \implies P = \pm 1$$

Enligt konvention är

$$\begin{cases} P_{lepton} = +1, & P_{\overline{lepton}} = -1, \\ P_{kvark} = +1, & P_{\overline{kvark}} = -1. \end{cases}$$

paritet multipliceras!
ex:
$e^- + e^+ \to \mu^+ + \mu^-$
P: $(1)\cdot(-1)(-1)^L$ $(-1)\cdot(1)(-1)^L$

Om vi har

$$\hat{P}\,\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, t) = P_1 P_2 P_3 \dots \Psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, -\vec{r}_3, \dots).$$

Stark och elektromagnetisk växelverkan bevarar paritet!

Laddnings konjugering (1.3.2)

Laddningskonjugering: Byt en partikel mot motsvarande antipartikel,

$$\hat{C}\,|\mu^-\rangle = |\mu^+\rangle.$$

$\hat{C}$: växlar alla laddningar.

Scanned with CamScanner

Har att

$$\hat{C}|\gamma\rangle = C|\gamma\rangle, \quad \hat{C}^2|\gamma\rangle = C^2|\gamma\rangle \Rightarrow C = \pm 1.$$

Tidsreversering (1.3.3)

Tidsreversering är transformationen

$$\hat{T} : t \longrightarrow -t$$

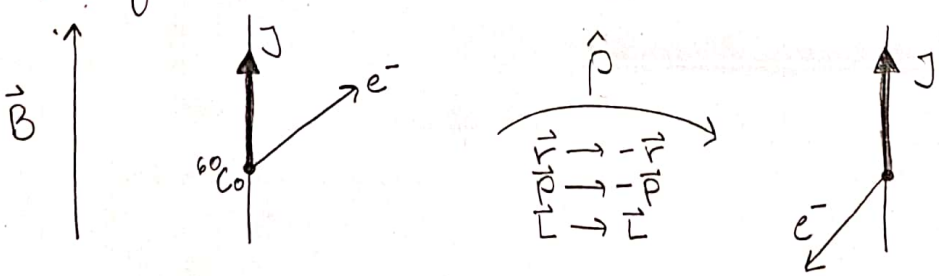
CPT-teoremet: En relativistisk fältteori är invariant under CPT, dvs om man opererar samtidigt med operatorerna C, P och T fås samma teori. Det gäller att om vi har CPT-brott behövs T-brott för att få CPT-symmetri.

P-brott, C-brott och CP-bevarning (7.1)

Madame Wu visade 1957 att svag växelverkan inte bevarar paritet: P-brott. Det gjordes genom att studera

$$^{60}Co \longrightarrow {}^{60}Ni^* + e^- + \bar{\nu}_e.$$

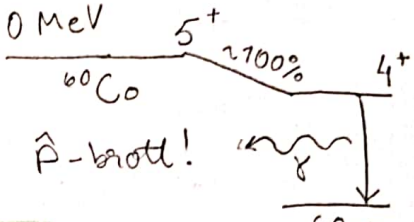
För att påvisa paritetsbrott definieras en riktning i rummet. Wu kylde ner ^{60}Co till $T = 0{,}01$ K. Med ett pålagt magnetfält lägger sig ^{60}Co i samma riktning:



Om processen är P-invariant borde lika många e^- detekteras i båda riktningar! Men antalet e^-

Scanned with CamScanner

i en uppriktning var inte lika många som i en nedriktning! Väldigt förvånande.



C-brott i svag växelverkan

Vi har påvisat P̂-brott i svag växelverkan.

Har

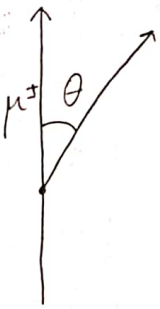
$$\hat{C}|\mu^+\rangle = |\mu^-\rangle,$$

$$\begin{cases} \mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ \mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \end{cases}$$

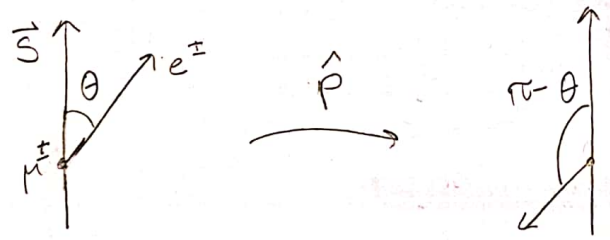
Vinkelfördelningen av $e^\pm$ i $\mu^\pm$ vilosystem har formen

$$\Gamma_\mu \pm C\cos\theta = \frac{1}{2}\Gamma_\pm\left(1 - \frac{\xi_\pm}{3}\cos\theta\right),$$

där θ är vinkeln mellan spinnvektorn för μ och $\vec{p}$ för elektronen. Om vi har Ĉ-bevarning har μ^+-sönderfall och μ^--sönderfall samma kanetecken, bl.a. samma vinkelfördelning. Då måste vi ha $\xi_+ = \xi_-$ och $\Gamma_+ = \Gamma_-$.



Om vi har P̂-bevarning borde vi ha



$$\Gamma_{\mu^\pm}(\cos\theta) = \Gamma_{\mu^\pm}(-\cos\theta), \quad \text{med} \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\Rightarrow \xi_\pm = 0.$$

Experiment visar att

$$\begin{cases} \Gamma_+ = \Gamma_- & \text{C-brott} \\ \xi_- = \xi_+ = 1{,}00 \pm 0{,}04 & \text{P-brott} \end{cases}$$

Men om vi har CP-bevarning betyder det att

Scanned with CamScanner

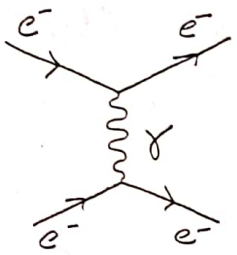
$$T_{\mu^+}(\cos\theta) = T_{\mu^-}(-\cos\theta) \Rightarrow T_+ = T_-, \quad \xi_+ = -\xi_-.$$

Så CP är bevarat i svag växelverkan (mellan leptoner). CP är nästan bevarat för svagt växelverkande hadroner.

All VxV som kan ske med γ kan ske med Z^0.

$\gamma \longleftrightarrow Z^0$

Växelverkan	EM	svag
Paritet	bevarad	ej bevarad
Energi	låg	hög



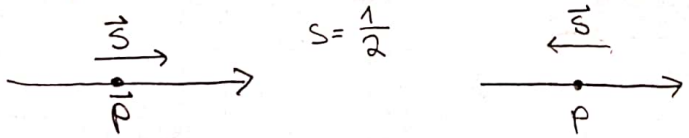
$e^- e^- \longrightarrow e^- e^-$

Paritetsbrytande elektronspridning (PVE scattering) är känslig för neutronfördelningen i en atomkärna, vilket kan ge neutrondensiteten.

$$e^- + N \longrightarrow e^- + N \Rightarrow \rho_N(\vec{r}).$$

Neutriner och CP-invarians (7.2)

Betrakta en massles partikel:



Högerhänt (R) Vänsterhänt (L)

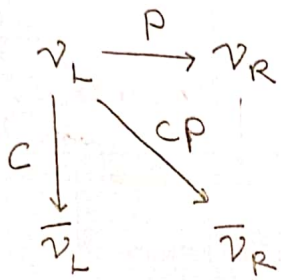
För en massiv partikel är "händhet" inte en rörelsekonstant. Vi kan dock alltid projicera ut andelen R respektive L för ett specifikt tillstånd

Scanned with CamScanner

ν_L: vänsterhänt neutrino

ν_R: högerhänt neutrino

Vi har att



I universum observerar vi endast ν_L och $\bar{\nu}_R$!

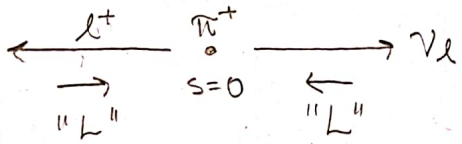
I en ultrarelativistisk gräns ($E \gg m$) är alla fermioner vänsterhänta och alla antifermioner är högerhänta!

ν_L, $\bar{e}_L$, ...

ν_R, $\bar{e}_R$, ...

"Förbjudna fermioner" (dvs högerhända) kommer understrykas med $\sim \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$. Experimentella belägg:

$\pi^+ \longrightarrow l^+ + \nu_l \quad (l = e, \mu)$



Med $l = \mu$, $m_\mu \approx 107\ MeV/c^2$, $m_\pi \approx 138\ MeV/c^2$,

eller $l = e$, $m_e \approx 0{,}511\ MeV/c^2$, $m_\pi \approx 138\ MeV/c^2$.

Scanned with CamScanner

Higgspartikeln (6.5)

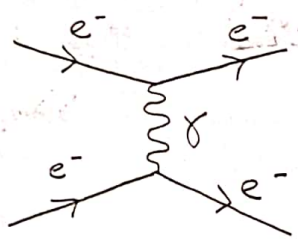
Vi har nu många frågor inom fundamental partikelfysik:

- Varför är neutriner så lätta, nästan masslösa $m_\nu \approx 0$?
- Varför ser vi endast ν_L och $\bar{\nu}_R$? (Majorana? 10.4.)
- Varför är $M_{W,Z} >> 0$? Jämför $M_\gamma = M_g = 0$.
- I standardmodellen förutsätter man masslösa fermioner, masslösa bosoner.

Leder till Higgsmekanismen.

Higgsmekanismen

Växelverkan mellan elementarpartiklar beskrivs väl av



kvantfältteorier som är gaugeinvarianta, dvs teorin är invariant under

$$\Psi(\vec{r},t) \longrightarrow e^{iqf(\vec{r},t)}\Psi(\vec{r},t),$$

där q är laddning och $f(\vec{r},t)$ är en godtycklig kontinuerlig funktion. motsvarar växelverkanstermer

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + \dots$$

Med Gaugesymmetri kan man generera växelverkanstermer!

$$e^- \longrightarrow e^- \Longrightarrow e^- \longrightarrow e^-\gamma$$

$$e^- \longrightarrow \nu_e \Longrightarrow e^- \longrightarrow W^-\nu_e$$

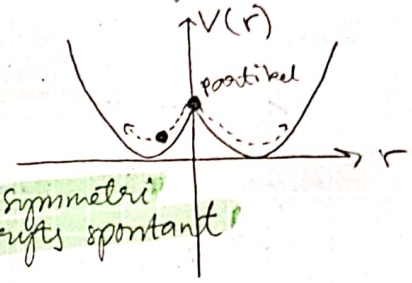
I gaugeteorier är $M_{\text{gaugeboson}} = 0$! Det funkar med $M_\gamma = 0$, $M_g = 0$, men inte $M_{W,Z}$!

Scanned with CamScanner

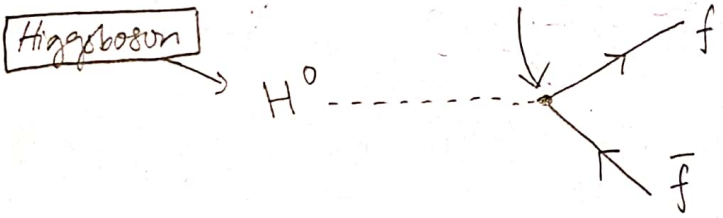
För att generera massiva W, Z - bosoner och massiva fermioner behöver vi introducera ytterligare ett kvantfält: Higgsfältet! Det sker spontant symmetribrott, se appendix D.

Spontant symmetribrott innebär att växelverkan lyder under symmetri, men det lägsta energitillstånd gör inte det! Higgsmekanismen genererar spontant elektrosvagt symmetribrott! Higgspotentialen har icke-trivial vakuumstruktur. Det här leder till gaugeinvarianta masstermer via växelverkan med Higgsfältet. Vi behöver observera kvanta av Higgsfältet: Higgsbosonen! Higgsbosonen detekterades 2012, vilket gav Nobelpris 2013.

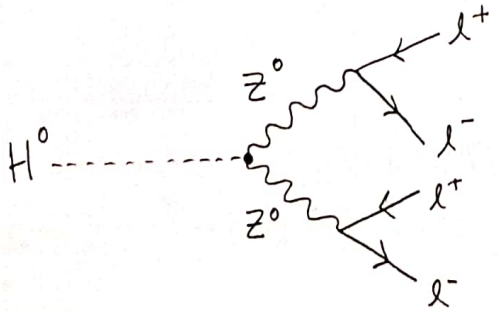
$M_{W,Z} \gg 0$
$M_\gamma = 0$



$g_{Hff} = \sqrt{2}\, g_W (m_f / M_W)$



Higgsbosonen kopplar starkare till mer massiva partiklar, varför W, Z och t-kvarkar är viktiga kanaler vid detektion.



$H^\circ \longrightarrow 4l$

$M_H = 125\ \mathrm{GeV}/c^2.$

Bokens framsida!

Scanned with CamScanner

210517 — 14

Hubbleparametern $H(t)$ ges av

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}$$ ← dimensionslös skalningsparameter som beskriver universums storlek

där

$$R = \frac{1}{1+z}, \qquad z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}}$$ (rödskift)

Friedmanekvationen lyder

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{1}{3}\Lambda c^2\right] R^2 = -kc^2$$

- G: gravitationskonstant
- ρ: densitet
- Λ: kosmologiska konstanten
- k: krökningen av rumtiden

Man kan undersöka expansionen av universum som funktion av tiden. Densiteten ρ ges av

$$\rho = \rho_m + \rho_{rel},$$

- ρ_m: materia
- ρ_{rel}: relativistiska partiklar

men ger inte hela bilden. Rymdens kurvatur fås från

$$\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_{rel} + \Omega_\Lambda = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_{rel}}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$$

$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$

ρ_c: kritisk densitet → densitet för $k=0$

så vi har vanlig materia, mörk materia och mörk energi. Energidensiteten av en svarthropp är

$$u = aT^4.$$

Det gäller att

$$R(t)^4 u_{rad}(t) = R(t_0)^4 u_{rad}(t_0),$$

så med $R(t_0) = 1$ fås

$$R^4 a T^4 = a T(t_0)^4 \Rightarrow T(t_0) = RT \Rightarrow R(t)^3 \rho(t) = R(t_0)^3 \rho(t_0)$$

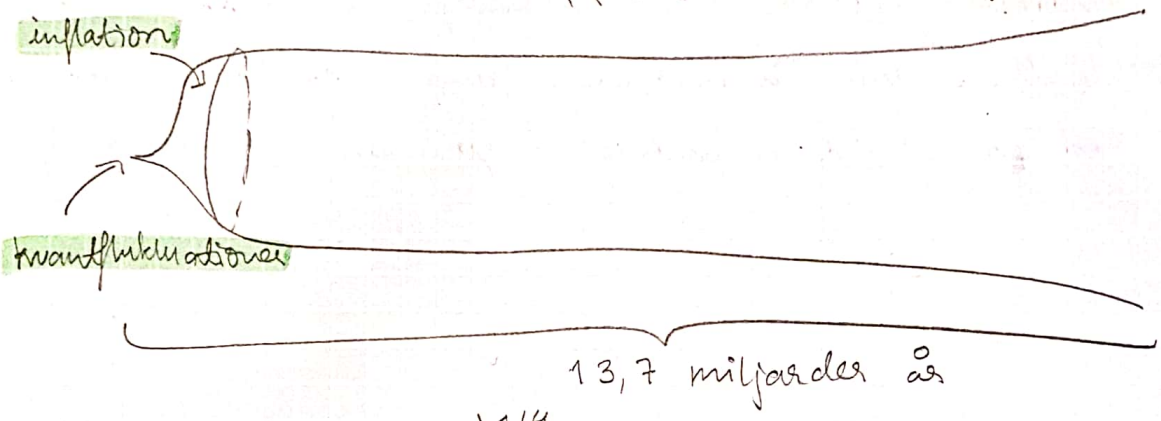
$$\Rightarrow R \approx \left(\frac{\rho_m(t=0)}{\rho_m}\right)^{1/3} = 3{,}47 \cdot 10^{-9}.$$

Scanned with CamScanner

$T(t_0) = RT(R) \approx 3,47\ K$,

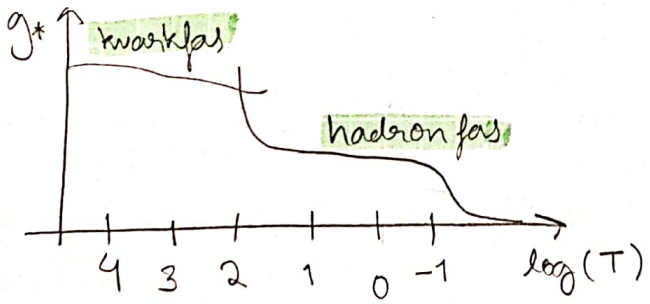
vilket är ganska nära 2,75 K (expansionsvärdet).

I universum finns 30 miljoner kluster med cirka 1000 galaxer. En galax har typiskt $10^{10} - 10^{12}$ solmassor. För att bilda dessa stora strukturer måste det finnits någon klumpighet:



$$T(t) = \left(\frac{3c^2}{16\pi G g_* a}\right)^{1/4} t^{-1/2},$$

$$g_* = \sum_{\text{bosoner } i} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermioner } i} g_i \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4.$$



$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-(m_n - m_p)c^2 / k_B T}$$

$p + \bar{\nu}_e \longleftrightarrow n + e^+$

$n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^-$

"Area of recombination": Photons decouple.

Scanned with CamScanner

Fusion i solen: Första steget är $p(p, e^+\nu)d$, där svagmaxelverkan spelar in.

Trippel-α-processen

Hur skapas kol?

$$^4He + {}^4He \longrightarrow {}^8Be^*$$

$$^8Be^* + {}^4He \longrightarrow {}^{12}_6C^*$$

$${}^{12}_6C^* \longrightarrow {}^{12}C + \gamma + \gamma$$

Tre α-partiklar behöver interagera för att ge ^{12}C.

- Jämvikt mellan fria α-partiklar och ^8Be etableras
- Fusion med en tredje α-partikel ger ett exciterat ^{12}C.

Scanned with CamScanner