Chalmers tekniska högskola
Fysik
Henrik Grönbeck

Tentamen Termodynamik och statistisk mekanik (FTF141/FTF140/FYP300)

Tid: 4 januari 2023
Examinator: Henrik Grönbeck (070-2862459)
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, av Chalmers godkänd miniräknare
Betygsgränser FTF140 (med inlämningsuppgifter): Betyg 3: 17 p, betyg 4: 25 p, betyg 5: 31 p.
Betygsgränser FTF141 (med inlämningsuppgifter): Betyg 3: 17 p, betyg 4: 25 p, betyg 5: 31 p.
Betygsgränser FYP300 (med inlämningsuppgifter): Betyg G: 17 p, betyg VG 28 p.

---

1. Ideal gas är ett viktigt modellsystem inom termodynamik och statistisk fysik för att exemplifiera olika begrepp. Dessutom kan många gaser faktiskt kan beskrivas som ideala.

   (a) Vad är de grundläggande approximationerna för en ideal gas? (1p)
   (b) Beskriv makro- och mikrotillstånd för en ideal gas. (1p)
   (c) Vad menas med multiplicitet inom termodynamik och hur är multiplicitet relaterad till entropi? (1p)
   (d) Vad innebär termodynamisk jämvikt för en ideal gas? (1p)
   (e) Hur kan fasövergångar beskrivas med tillståndsekvationen för en ideal gas? (1p)

   Lösning:

   Tillståndsekvationen för en ideal gas är:

   $$P = \frac{k_B N T}{V}$$

   De två grundläggande approximationerna är att i) egenvolymen för partiklarna kan försummas samt att ii) partiklarna inte växelverkar.

   Mikrotillståndet för en ideal gas ges av alla partiklarnas hastigheter och posioner. Makrotillståndet ges av trycket, volymen och temperaturen. (Antalet partiklar är då givet av tillståndsekvationen.) Makrotillståndet kan även beskrivas med gasens energi, volym och antal partiklar.

   Antalet tillgängliga mikrotillstånd givet ett makrotillstånd betecknas multiplicitet (Ω). Multipliciteten kan bestämmas givet tillståndsvariablerna.

   $$\Omega = \Omega(N, V, U ...)$$

   Boltzmanns definition av entropi (S) är:

   $$S \equiv k_B \ln \Omega$$

Ett system är i jämvikt om varje del av systemet har samma tillstånd, såsom temperatur, tryck eller densitet.

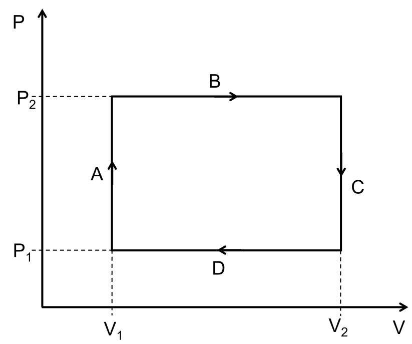
Fasövergångar kan inte beskrivas med ideala gaslagen. För att beskriva fasövergång till vätska behövs växelverkan mellan partikarna. Fasövergång kan simuleras med van der Waals ekvationen:

$$P = \frac{k_B N T}{V - Nb} - a\frac{N^2}{V^2}$$

2. En enatomig gas är innesluten i en behållare. Gasen kan behandlas som en ideal gas bestående av N atomer. Gasen genomgår en cyklisk process enligt figuren nedan. Samtliga delprocesser kan anses vara kvasistatiska. Låt $P_1 = P_0$ och $V_1 = V_0$ samt att $P_2 = 2P_0$ och $V_2 = 3V_0$. (4p)

   (a) Ange för varje delprocess om tillfört värme och arbete är positivt, negativt eller noll.

   (b) Beräkna kvoten $\Delta U_A/\Delta U_B$ där ΔU_A och ΔU_B är ändringen i energi för gasen i processerna A och B. Ditt svar skall vara numeriskt (får inte innehålla N, P_0 eller V_0).



Lösning:

För en monoatomis gas gäller enligt ekvipartitionsteoremet och ideala gaslagen att energin ges av:

$$U = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}PV$$

Arbetet ges för en kvasistatisk process av:

$$W = -P\Delta V$$

Värmet erhålles genom första huvudsatsen:

$$\Delta U = Q + W$$

Process A:

$$W_A = 0$$

$$Q_A = \Delta U_A - W_A = \Delta U_A = \frac{3}{2}(2P_0V_0 - P_0V_0) = \frac{3}{2}P_0V_0 > 0$$

Process B:

$$W_B = -2P_0(3V_0 - V_0) = -4P_0V_0 < 0$$

$$Q_B = \Delta U_B - W_B = \frac{3}{2}(2P_03V_0 - 2P_0V_0) - (-4P_0V_0) = 10P_0V_0 > 0$$

Process C:

$$W_C = 0$$

$$Q_C = \Delta U_C = \frac{3}{2}(P_0 3V_0 - 2P_0 3V_0) = -\frac{9}{2}P_0V_0 < 0$$

Process D:

$$W_D = -P_0(V_0 - 3V_0) = 2P_0V_0 > 0$$

$$Q_D = \Delta U_D - W_D = \frac{3}{2}(P_0V_0 - P_0 3V_0) - (2P_0V_0) = -5P_0V_0 < 0$$

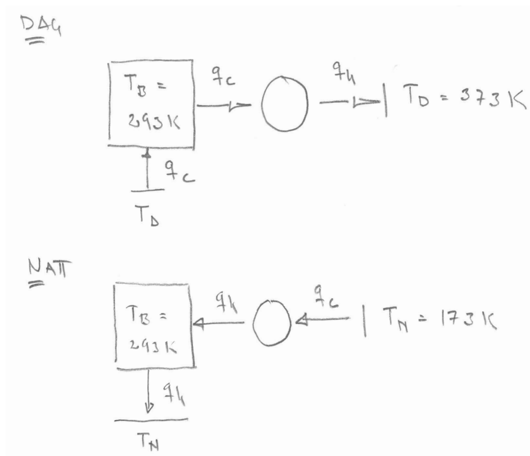
Den sökta kvoten är:

$$\frac{\Delta U_A}{\Delta U_B} = \frac{1}{4}P_0V_0$$

3. Antag att man vill ha innetemperaturen 20 °C i ett hus som ligger på en plats där dagstemperaturen är 100 °C och nattemperaturen -100 °C. Innetemperaturen skall regleras med en värmepump. Värmeläckaget i huset kan antas vara 0.6 kW per grad temperaturskillnad. Vilken är den minsta möjliga effekt som krävs för att driva värmepumpen på dagen respektive natten? (4p)

Lösning:

Huset skall ha en temperatur (T_B) på 293 K under både dag och natt. Under dagen är utetemperaturen 373 K (T_D. Under natten är utetemperaturen 173 K (T_N). Under dagen används värmempumpen för att kyla huset medan värme läcker in i huset.



Värmeläckaget under dagen ges av:

$$q_c = 0.6\,(T_D - T_B)kW = 48\,\mathrm{kW}$$

För att huset skall behålla sin temperatur måste värmepumpen kyla huset med samma hastighet som värme läcker in i huset. Första huvudsatsen ger då för värmepumpen:

$$q_h = w + q_c$$

Andra huvudsatsen ger för en ideal värmepunp:

$$\frac{q_c}{T_B} = \frac{q_h}{T_D}$$

Detta ger:

$$w = q_h - q_c = (\frac{T_D}{T_B} - 1)q_c = 13\,\mathrm{kW}$$

Under natten läcker värme ut från huset:

$$q_h = 0.6\,(T_B - T_N)kW = 72\,\mathrm{kW}$$

$$q_h = q_c + w$$

Andra huvudsatsen ger för en ideal värmepunp:

$$\frac{q_c}{T_N} = \frac{q_h}{T_B}$$

Detta ger:

$$w = q_h - q_c = (1 - \frac{T_N}{T_B})q_h = 29\,\mathrm{kW}$$

4. Grafit och diamant är två allotroper (former) av kol. Vid höga tryck kan grafit omvandlas till diamant.

   (a) Givet datan i tabellen nedan, vilken allotrop är stabil vid rumstemperatur och atmosfärstryck? Motivera svaret. (1p)

   (b) Betrakta allotroperna vid rumstemperatur och atmosfärstryck. Genom att öka trycket vid konstant temperatur kommer grafit och diamant att komprimeras och deras volymer att minska. Bestäm volymminskningen av grafit och diamant som funktion av trycket. Kompressibiliteten kan anses vara konstant.(2p)

   (c) Bestäm Gibbs fria energi som funktion av trycket för grafit och diamant vid konstant temperatur.(1p)

   (d) Härled ett utryck för det tryck som måste anbringas för att omvandla grafit till diamant vid rumstemperatur.(1p)

	Grafit	Diamant
h (kJ/mol)	0	1.89
s (J/mol K)	5.74	2.37
v (cm^3/mol)	5.30	3.42
c_p (J/mol K)	8.53	6.11
κ_T (1/GPa)	0.029	0.0018

Tabell 1: h: Entalpi per mol, s: entropi per mol, v: specifik volym, c_p isobar värmekapacitivitet och κ_T isoterm kompressibilitet. Värdena är givna vid 25 °C och 100 kPa.

Lösning:

Vilken form som är stabil ges av minimum i Gibbs fria energi:

$$G = H - TS$$

Per mol har vi för grafit:

$$g_{gr} = 0 - 298 \cdot 5.74 \cdot 10^{-3} = -1.71\,\mathrm{kJ/mol}$$

Per mol för diamant:

$$g_d = 1.89 - 298 \cdot 2.37 \cdot 10^{-3} = -1.18\,\mathrm{kJ/mol}$$

Grafit är den stabila formen.

Den isoterma kompressibiliteten ges av:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$$

Vid konstant temperatur:

$$\frac{dV}{V} = -\kappa_T\,dP$$

Integration ger:

$$\ln \frac{V}{V_0} = -\kappa(P - P_0)$$

V_0 och P_0 är volym och tryck vid standard tryck och temperatur.

$$V(P) = V_0 \, e^{(-\kappa_T (P-P_0))}$$

Volymminskningen vid ett tryck P ges av:

$$V(P) - V_0 = V_0 \, (e^{(-\kappa_T (P-P_0))} - 1)$$

Använd den termodynamiska identiteten:

$$dG = -SdT + V dP$$

Vid konstant temperatur:

$$dG = V dP$$

Integration ger:

$$\int_{G_0}^{G} dG' = \int_{P_0}^{P} V(P') \, dP'$$

$$G(P) = G_0 + \frac{V_0}{\kappa_T}(1 - e^{(-\kappa_T (P-P_0))})$$

Det tryck som måste anbringas erhålles genom att lösa ekvationen (per mol):

$$g_{0\,gr} + \frac{v_{0\,gr}}{\kappa_{T\,gr}}(1 - e^{(-\kappa_{T\,gr} (P-P_0))}) = g_{0\,d} + \frac{v_{0\,d}}{\kappa_{T\,d}}(1 - e^{(-\kappa_{T\,d} (P-P_0))})$$

5. Betrakta ett system med N partiklar där varje partikel kan ha tre energinivåer: 0, ε och 2ε. Systemet har en volym V och är i termisk jämvikt med en reservoar med temperatur T. Antag att partikarna inte växelverkar och att de kan beskrivas med Boltzmannstatistik.

   (a) Ange tillståndssumman för en partikel i systemet. (1p)

   (b) Vad är medelenegin för en partikel? (1p)

   (c) Vid vilken temperatur är sannolikheten att en partikel är i grundtillståndet dubbelt så stor som att partikeln är i tillsåndet med energin 2ε? (1p)

   (d) Beräkna värmekapaciteten (C_V) för systemet. Skissa kvalitativt hur C_V beror av temperaturen. (2p)

Lösning:

Tillståndssumman ges av:

$$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i/k_B T} = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}$$

$$Z = 1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}$$

Medelenergin ges av:

$$\overline{E} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \varepsilon\frac{e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}}$$

Sannoliketen för att en partikel är i ε_i är:

$$P(\varepsilon_i) = \frac{1}{Z}e^{-\beta\varepsilon_i}$$

Vi har således:

$$\frac{P(0)}{P(2\varepsilon)} = \frac{1}{e^{-2\beta\varepsilon}} = 2$$

Vilket ger:

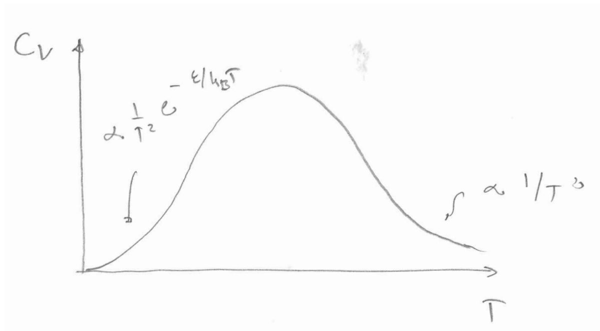
$$T = \frac{2\varepsilon}{k_B \ln 2}$$

Värmekapaciteten ges av:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = N\frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = N\frac{\partial \overline{E}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial T}$$

$$C_V = \frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2}\frac{e^{-\beta\varepsilon} + 4e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}}{(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon})^2}$$

Värmekapaciteten som funktion av temepraturen är skissad i figuren nedan.



6. Instrålningen från solen till jorden är 1370 W/m^2. Avståndet mellan Venus och solen är 70 % av avståndet mellan solen och jorden. Venus omges av moln som reflekterar omkring 80 % av den inkommande strålningen.

   (a) Beräkna Venus temperatur genom att bortse från Venus atmosfär samt reflektion av inkommande strålning i molnen. (2p)

   (b) Beräkna Venus temperatur om reflektionen av inkommande strålning beaktas. Bortse från reflektion i molnen av strålning *från* Venus. (1p)

Lösning:

Beteckna instrålningen från solen till jorden med γ_J och instrålningen från solen till Venus med γ_V. Effekten skall vara samma vilket ger:

$$\gamma_V = (\frac{R_J}{R_V})^2 \, \gamma_J$$

Där R_J och R_V är avstånden mellan jorden och solen samt Venus och solen. Om vi antar att Venus är en svart kropp så är utstrålningen i jämvikt med instrålning:

$$\gamma_V \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

R är Venus radie och σ Stefan-Boltzmanns konstant. Venus temperatur ges då av:

$$T = (\frac{\gamma_V}{4\,\sigma})^{1/4} = 333\,\mathrm{K}$$

Om 80 % av den inkommande strålningen reflekteras når endast 20 % venus vilket ger temperaturen:

$$T = (0.2\,\frac{\gamma_V}{4\,\sigma})^{1/4} = 223\,\mathrm{K}$$