Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 7 jan 2020, kl 08.30-13.30 i Samhällsbyggnad.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 32 poäng, 5:a minst 44 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Måndag 27 jan 2020, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. En sfärisk ballong innehåller 1 kmol heliumgas vid temperaturen 300 K. Ballongens material har en sådan elasticitet så att trycket inuti ballongen hela tiden är proportionellt mot dess diameter. Heliumgasen värms därefter upp långsamt tills dess volymen har ökat med en faktor 2. Vad blir sluttemperaturen och hur mycket värme tillförs under denna process?

2. En järnstav med massan 10 kg och temperaturen 400 °C sänks ned och kyls av i en välisolerad behållare med 200 liter vatten, som från början har temperaturen 25 °C. Bestäm entropiändringen i denna process! Behållarens uppvärmning kan försummas och likaså får antas att inget vatten kokar bort. Nödvändiga data tas från Physics Handbook.

3. Två ämnen A och B blandar sig fullständigt med varandra både i vätske- och gas-fasen. Den övre respektive undre begränsningslinjen av tvåfasområdet i fasdiagrammet ges av uttrycken

$$T = T_1 - (T_1 - T_2)x^2$$

och

$$T = T_1 - (T_1 - T_2)x(2 - x)$$

där T är temperaturen och x betecknar koncentrationen av ämne B. T_1 och T_2 är två konstanter med dimensionen temperatur. Vätska med sammansättningen x_v^0 värms upp och vid en viss temperatur börjar vätskan att koka. Ångan har då koncentrationen x_g^0. Man fortsätter att värma och vid en viss tidpunkt gäller att ångans koncentration har minskat med 20%, dvs $x_g = 0.8\ x_g^0$. Vad är då koncentrationen av ämne B i vätskan uttryckt i x_v^0? Det får antas att jämvikt hela tiden hinner ställa in sig. Rita även ett fasdiagram som beskriver blandningen av A och B!

4. Ett paramagnetiskt material består av N oberoende partiklar med spinn 1. Varje partikel har det magnetiska momentet m. I ett yttre magnetfält B blir orienteringen av de magnetiska momenten kvantiserad till tre riktningar parallellt, vinkelrät och antiparallellt med fältet. Detta ger energierna $-mB$, 0 respektive mB per partikel. Bestäm systemets värmekapacitet vid konstant magnetfält som funktion av temperaturen då $kT \gg mB$!

5. En atomkärna består av ett antal nukleoner; protoner och neutroner. Dessa två partiklar har spinn 1/2 och är därför fermioner. Växelverkan mellan nukleonerna kan approximativt försummas och de kan då behandlas som en Fermigas innesluten i en volym V, atomkärnans storlek. Varje energinivå kan ockuperas av fyra nukleoner, proton eller neutron och med spinn upp eller spinn ned. Atomkärnan kan antas vara sfärisk med radien

$$R = r_0 A^{1/3}$$

där A är antalet nukleoner och $r_0 = 1.25$ fm. Nukleonens massa är $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg. Behandla nukleonerna icke-relativistiskt och bestäm Fermienergin ϵ_F uttryckt i MeV samt motsvarande Fermitemperatur. Är det rimligt att behandla nukleonerna icke-relativistiskt, dvs är $\epsilon_F \ll mc^2$, där c är ljushastigheten?

Lösningar till tentamen 2020–01–07

FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Magnus Rahm 2020–01–07

Uppgift 1

Trycket är proportionellt mot radien och därmed kubikroten ur volymen,

$$P \propto V^{1/3}. \tag{1}$$

Om volymen dubbleras kan vi alltså skriva

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/3} = 2^{1/3}. \tag{2}$$

Vidare är helium till en god approximation en ideal gas, $PV = nRT$, så vi kan skriva den nya temperaturen

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} T_1 = 2^{1/3} \cdot 2 T_1 = 2^{4/3} T_1 \approx \boxed{756\,\mathrm{K}.} \tag{3}$$

För att beräkna tillfört värme beräknar vi först förändring i inre energi och tillfört arbete, för att slutligen använda första huvudsatsen. Helium har tre frihetsgrader (translation), så vi kan skriva

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR \left(T_2 - T_1\right) = \frac{3}{2} nRT_1 \left(2^{4/3} - 1\right). \tag{4}$$

Arbetet ges av

$$\begin{aligned} W &= -\int_{V_1}^{V_2} P(V)\,\mathrm{d}V = -P_1 \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{V}{V_1}\right)^{1/3} \mathrm{d}V = \left\{\alpha = V/V_1\right\} = -P_1 V_1 \int_1^2 \alpha^{1/3}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= -P_1 V_1 \frac{3}{4}\left(2^{4/3} - 1\right) = -\frac{3}{4} nRT_1 \left(2^{4/3} - 1\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Slutligen fås det tillförda värmet av

$$Q = \Delta U - W = \frac{9}{4} nRT_1 \left(2^{4/3} - 1\right) = \boxed{8.5\,\mathrm{MJ}.} \tag{6}$$

Uppgift 2

Jämvikt har ställt in sig när järnet och vattnet antagit samma temperatur. Denna temperatur kan bestämmas av att värmet som lämnat järnet måste vara lika med värmet som tagits upp av vattnet,

$$c_{\text{järn}} m_{\text{järn}} \left(T_0^{\text{järn}} - T_{\text{slut}} \right) = c_{\text{vatten}} m_{\text{vatten}} \left(T_{\text{slut}} - T_0^{\text{vatten}} \right). \tag{7}$$

Vi löser ut sluttemperaturen och tar data från Physics Handbook,

$$\begin{aligned} T_{\text{slut}} &= \frac{c_{\text{vatten}} m_{\text{vatten}} T_0^{\text{vatten}} + c_{\text{järn}} c_{\text{järn}} T_0^{\text{järn}}}{c_{\text{vatten}} m_{\text{vatten}} + c_{\text{järn}} m_{\text{järn}}} \\ &= \frac{4190 \cdot 200 \cdot (273{,}15 + 25) + 449 \cdot 10 \cdot (273{,}15 + 400)}{4190 \cdot 200 + 449 \cdot 10}\,\mathrm{K} \\ &\approx 300{,}15\,\mathrm{K} \approx 27{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{8}$$

Entropiförändringen i vattnet är därmed

$$\Delta S_{\text{vatten}} = \int_{T^{\text{vatten}}}^{T_{\text{slut}}} \frac{c_{\text{vatten}} m_{\text{vatten}}}{T}\,\mathrm{d}T = 4190 \cdot 200 \cdot \ln\left(\frac{300{,}15}{298{,}15}\right)\,\mathrm{J/K} \approx 5598{,}5\,\mathrm{J/K} \tag{9}$$

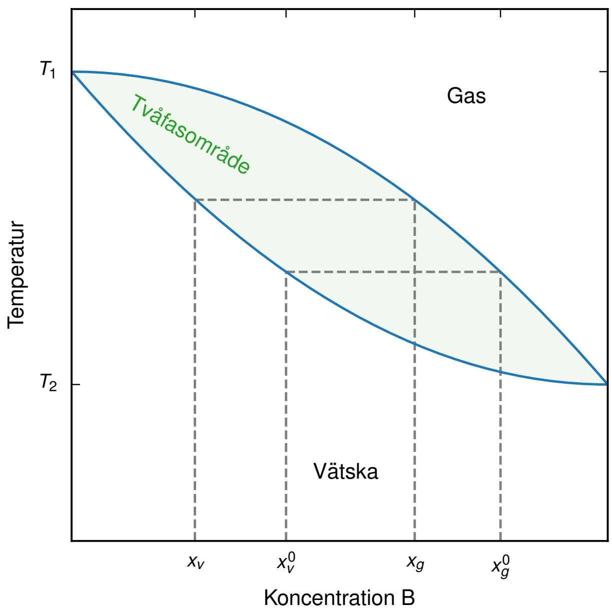
och på samma sätt för järnet

$$\Delta S_{\text{järn}} = \int_{T^{\text{järn}}}^{T_{\text{slut}}} \frac{c_{\text{järn}} m_{\text{järn}}}{T}\,\mathrm{d}T = 449 \cdot 10 \cdot \ln\left(\frac{334{,}4}{673{,}15}\right)\,\mathrm{J/K} \approx -3626{,}5\,\mathrm{J/K}. \tag{10}$$

Den totala entropiförändringen är alltså

$$\Delta S_{\text{tot}} \approx 5598{,}5\,\mathrm{J/K} - 3626{,}5\,\mathrm{J/K} \approx \boxed{1972\,\mathrm{J/K}.} \tag{11}$$

Uppgift 3



Tvåfasområdets begränsningslinjer ges av

$$T_{\text{övre}}(x) = T_1 - (T_1 - T_2)x^2 = T_1 - \Delta T x^2 \tag{12}$$

$$T_{\text{undre}}(x) = T_1 - (T_1 - T_2)x(2-x) = T_1 - \Delta T x(2-x). \tag{13}$$

Från uppgiftsbeskrivningen vet vi att gasens koncentration av ämne B minskar vid kokning, vilket medför att $T_2 < T_1$ (se figuren ovan). Vidare har vi att $x_g = \alpha x_g^0$, där $\alpha = 0{,}8$.

Ur figuren ser vi att vi kan skriva sambanden

$$T_{\text{undre}}(x_v) = T_{\text{övre}}(x_g) \tag{14}$$

$$T_{\text{undre}}(x_v^0) = T_{\text{övre}}(x_g^0) \tag{15}$$

vilket ger

$$x_v(2-x_v) = (\alpha x_g^0)^2 \tag{16}$$

$$x_v^0(2-x_v^0) = (x_g^0)^2. \tag{17}$$

Vi dividerar ekvationerna med varandra,

$$\frac{x_v(2-x_v)}{x_v^0(2-x_v^0)} = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad 2x_v - x_v^2 = \alpha^2 x_v^0(2-x_v^0) \quad \Rightarrow \quad x_v^2 - 2x_v + \alpha^2 x_v^0(2-x_v^0) = 0. \tag{18}$$

Detta är en andragradsekvation i x_v och den enda lösningen med $x_v < 1$ är

$$\boxed{x_v = 1 - \sqrt{1 - \alpha^2 x_v^0(2-x_v^0)} \quad (\alpha = 0{,}8).} \tag{19}$$

Uppgift 4

Tillståndssumman för en (1) partikel ges av

$$Z = e^{-mB\beta} + 1 + e^{mB\beta} \tag{20}$$

Tillståndssumman för hela systemet ges av

$$Z_{\text{tot}} = Z^N = \left(e^{-mB\beta} + 1 + e^{mB\beta}\right)^N . \tag{21}$$

Värmekapaciteten ges av

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{kT^2}\frac{\partial^2 \ln Z_{\text{tot}}}{\partial \beta^2} \\
&= \frac{N}{kT^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{-e^{-mB\beta} + e^{mB\beta}}{e^{-mB\beta} + 1 + e^{mB\beta}} mB\right) \\
&= \frac{NmB}{kT^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{-1 + e^{2mB\beta}}{1 + e^{mB\beta} + e^{2mB\beta}}\right) \\
&= \frac{N(mB)^2}{kT^2}\frac{2e^{2mB\beta}\left(1 + e^{mB\beta} + e^{2mB\beta}\right) - \left(-1 + e^{2mB\beta}\right)\left(e^{mB\beta} + 2e^{2mB\beta}\right)}{\left(1 + e^{mB\beta} + e^{2mB\beta}\right)^2} \\
&\approx Nk\left(\frac{mB}{kT}\right)^2 \frac{2\cdot(1+1+1) - (-1+1)(1+2)}{3^2} \\
&= \boxed{\frac{2}{3}Nk\left(\frac{mB}{kT}\right)^2 .}
\end{aligned} \tag{22}$$

Uppgift 5

Tillståndstätheten för en tre-dimensionell, icke-relativistisk Fermigas ges av

$$g(\epsilon) = \gamma 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\sqrt{\epsilon} \tag{23}$$

där vi har degenerationsgrad $\gamma = 4$ och

$$V = 4\pi R^3/3 = 4\pi r_0^3 A/3. \tag{24}$$

Fermienergin ϵ_F är definierad enligt

$$A = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)\,\mathrm{d}\epsilon = 4\cdot 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{4\pi r_0^3 A}{3} \int_0^{\epsilon_F} \sqrt{\epsilon}\,\mathrm{d}\epsilon = A\frac{32\pi^2}{3}\left(\frac{2mr_0^2}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3}\epsilon_F^{3/2}. \tag{25}$$

Ur denna ekvation kan vi lösa ut

$$\epsilon_F = \left[\frac{9}{64\pi^2}\left(\frac{h^2}{2mr_0^2}\right)^{3/2}\right]^{2/3} = \frac{3}{32\pi}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{h^2}{mr_0^2}. \tag{26}$$

Med numeriska värden får vi

$$\epsilon_F \approx 4{,}944\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} \approx \boxed{30{,}9\,\mathrm{MeV.}} \tag{27}$$

Fermitemperaturen blir

$$T_F = \epsilon_F/k = \boxed{3{,}58\cdot 10^{11}\,\mathrm{K}}. \tag{28}$$

Vi ska nu jämföra vårt värde för ϵ_F med

$$mc^2 \approx 937\,\mathrm{MeV} \gg \epsilon_F \tag{29}$$

vilket betyder att den icke-relativistiska approximationen är rimlig.