

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 27 aug 2019, kl 08.30-13.30 i "Maskin"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

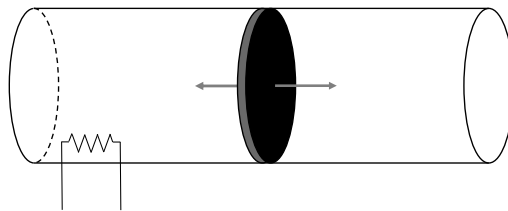
Jourhavande lärare: Magnus Rahm, tel. 031-772 33 88

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 32 poäng, 5:a minst 44 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Tisdag 10 sep 2019, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. Luft är instängd i en cylindrisk behållare (se figur). Med hjälp av en kolv är behållaren uppdelad i två delar. Kolven är tättslutande men lätt rörlig, dvs den rör sig friktionsfritt. Både cylindern och kolven är värmeisolerade, och varken cylinderns väggar eller kolven släpper igenom någon värmeenergi.



Från början är kolvens läge i mitten av cylindern och luften i de båda delarna har samma tryck 0.1 MPa, samma volym 1 dm³ och samma temperatur 273 K. Med hjälp av ett elektriskt motstånd i den vänstra delen hettas därefter luften upp i denna del tills dess trycket är 0.2 MPa. Beräkna slutvolym och sluttemperatur för luften i både den vänstra och den högra delen! Luften får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. Hur mycket elektrisk energi tillfördes vid denna process?

2. Betrakta två system A_1 och A_2 . Båda systemen har den temperaturberoende värmekapaciteten, $C = a$, där a är en konstant. Från början har systemen begynnelse-temperaturerna T_1 respektive T_2 (i Kelvin). Vi utnyttjar nu dessa två system för att utvinna arbete med hjälp av en värmemotor. Hur mycket arbete kan maximalt utvinnas fram till dess att systemen antagit en gemensam sluttemperatur? Vad blir sluttemperaturen?
3. Energinivåerna för vibrationsrörelsen för en tvåatomig molekyl ges av uttrycket

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

där ω är vinkelfrekvensen för den molekylära vibrationsrörelsen.

(a) Härled utgående från detta uttrycket för vibrationsbidraget till värmekapacitiveteten för en tvåatomig gas som funktion av temperaturen!

(b) Vibrationsbidraget till värmekapacitiveteten för en viss tvåatomig gas uppmättes till 3.5 J/mol·K vid temperaturen 1000 K. Utgående från detta uppmätta värde avgör om det är syrgas, kvävgas eller klorgas!

4. Med hjälp av halvledarteknik kan man skapa system där elektronerna begränsas till att röra sig i ett två-dimensionellt plan. Elektronerna bildar då en så kallad två-dimensionell elektrongas (2DEG). Elektronernas energitillstånd ges av uttrycket

$$\varepsilon_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2); \quad n_x, n_y \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

där m_e är elektronens massa och $A = L^2$ är arean av det tvådimensionella planet. Typiska tätheter för elektronerna i en sådan 2DEG kan vara $n_e = 10^{13}$ elektroner/cm².

(a) Bestäm systemets tillståndstäthet $g(\epsilon)$ i energirummet!

(b) Utgående från detta härled ett uttryck för systemets Fermienergi ϵ_F ! Vad blir motsvarande värde på Fermitemperaturen T_F i Kelvin med ovanstående värde för elektrontätheten?

5. En svart plan yta med temperaturen T_H är parallell med en annan svart plan yta med temperaturen T_L . Avståndet mellan plattorna är litet jämfört med den lineära dimensionen av plattorna. Mellan plattorna är det vakuum. Energiflödet mellan de två ytorna är då

$$J = \sigma (T_H^4 - T_L^4)$$

enligt Stefan-Boltzmanns lag. (a) Antag nu att en tredje platta placeras mellan dessa två ytor. Den är också svart. Bestäm temperaturen för denna tredje platta när energiflödet blivit konstant! Hur förhåller sig detta energiflöde till det ursprungliga flödet? (b) Placera nu två plattor mellan de två plana svarta ytorna. Båda dessa plattor är svarta. Hur förhåller sig nu detta energiflöde till det ursprungliga flödet?

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN 2019–08–27

FTF140 TERMODYNAMIK OCH STATISTISK MEKANIK

Magnus Rahm

2019–08–27

Uppgift 1

Från början gäller att tryck, volym och temperatur för varje del är $P_0 = 0,1 \text{ MPa}$, $V_0 = 1 \text{ dm}^3$ och $T_0 = 273 \text{ K}$. Mängden gas i varje del förblir konstant $n = n_0$ genom processen. Beteckna motsvarande storheter vid sluttillståndet med P_V, V_V, T_V, P_H, V_H och T_H , där index $V(H)$ står för vänster (höger). För luft (tvåatomig idealgas) gäller att

$$\begin{aligned}U &= \frac{5}{2}nRT \\C_V &= \frac{5}{2}nR \\C_P &= C_V + nR = \frac{7}{2}nR \\ \gamma &= \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Sluttrycket i vänster kammare är: $P_V = 2P_0$ (givet i uppgiften).

Eftersom kolven rör sig friktionslöst kommer trycket att hela tiden vara samma i de båda kammarna. Sluttrycket i den högra kammaren blir då också $P_H = 2P_0$. Eftersom inget värme utbyts varken mellan kamrarna eller med omgivningen genomgår den högra kammaren en adiabatisk kompression. För denna process gäller att $PV^\gamma = \text{konstant}$, det vill säga

$$\begin{aligned}P_0V_0^\gamma &= P_HV_H^\gamma \\P_0V_0^\gamma &= 2P_0V_H^\gamma \\V_H &= 2^{-1/\gamma}V_0 \approx 0,61 V_0\end{aligned}$$

Eftersom den totala volymen är konstant, lika med $2V_0$, är

$$V_V = 2V_0 - V_H = (2 - 2^{-1/\gamma})V_0 \approx 1,39 V_0$$

Återstår att bestämma sluttemperaturerna. Eftersom antalet mol inte ändras medför ideala gaslagen att $PV/T = \text{konstant}$ för varje kammare, dvs

$$\begin{aligned}\frac{P_0V_0}{T_0} &= \frac{P_HV_H}{T_H} \\T_H &= \frac{P_HV_H}{P_0V_0}T_0 = \frac{2P_02^{-1/\gamma}V_0}{P_0V_0}T_0 = 2^{1-1/\gamma}T_0 \approx 1,22 T_0\end{aligned}$$

och

$$T_V = \frac{P_V V_V}{P_0 V_0} T_0 = 2(2 - 2^{-1/\gamma}) T_0 \approx 2,78 T_0$$

Vad var den tillförda elektriska energin? Eftersom systemet är isolerat mot omgivningen kommer den tillförda elektriska energin vara lika med ökningen av den inre energin för totala systemet. Före processen har vi för de båda kamrarna tillsammans

$$U_f = \frac{5}{2} n_0 R T_0 + \frac{5}{2} n_0 R T_0 = 5 n_0 R T_0$$

Efter processen har temperaturen stigit och

$$U_e = \frac{5}{2} n_0 R T_V + \frac{5}{2} n_0 R T_H = \frac{5}{2} n_0 R [2(2 - 2^{-1/\gamma}) + 2^{1-1/\gamma}] T_0 = 10 n_0 R T_0$$

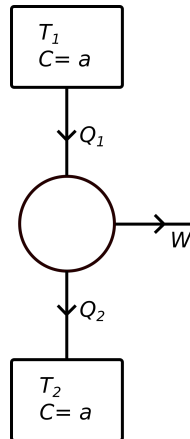
Den tillförda elektriska energin blir därför

$$W_{el} = U_e - U_f = 10 n_0 R T_0 - 5 n_0 R T_0 = 5 n_0 R T_0 = 5 P_0 V_0$$

Svar:

$V_V = 1,39 V_0 = 1,39 \text{ dm}^3$	$V_B = 0,61 V_0 = 0,61 \text{ dm}^3$
$T_V = 2,78 T_0 \approx 759 \text{ K}$	$T_H = 1,22 T_0 \approx 333 \text{ K}$
$W_{el} = 5 P_0 V_0 = 5 \text{ kJ}$	

Uppgift 2



Vi antar (helt generellt) att $T_1 > T_2$. När de båda kropparna har samma temperatur kan vi inte längre utvinna mer arbete. Beteckan denna sluttemperatur T_S . Med beteckningar och riktningar enligt figur får vi

$$Q_1 = - \int_{T_1}^{T_S} a dT = a(T_1 - T_S) \quad (1)$$

$$Q_2 = \int_{T_2}^{T_S} a dT = a(T_S - T_2) \quad (2)$$

Första huvudsatsen ger

$$Q_1 = Q_2 + W \quad (3)$$

så att

$$W = Q_1 - Q_2 = a(T_1 + T_2 - 2T_S). \quad (4)$$

Maximalt arbete betyder att det inte får ske någon entropiökning. Andra huvudsatsen ger därför $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$, det vill säga

$$\int_{T_1}^{T_S} \frac{a dT}{T} + \int_{T_2}^{T_S} \frac{a dT}{T} = 0 \quad (5)$$

så att

$$a \left(\ln \frac{T_S}{T_1} + \ln \frac{T_S}{T_2} \right) = 0 \quad (6)$$

vilket ger sluttemperaturen

$$T_S = \sqrt{T_1 T_2}. \quad (7)$$

Insatt i Eq. (4) får vi

$$W = a \left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} \right). \quad (8)$$

Resultatet verkar rimligt såtillvida att det alltid är positivt (eller 0); det aritmetiska medelvärdet är alltid större än (eller lika med) det geometriska (se till exempel https://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_of_arithmetic_and_geometric_means).

Uppgift 3

(a) Tillståndssumman ges av

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta \hbar \omega \right] = e^{-\beta \hbar \omega / 2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta \hbar \omega})^n = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}. \quad (9)$$

Detta ger medelenergin

$$\bar{E} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\beta \hbar \omega}{2} + \ln (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right] = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{e^{-\beta \hbar \omega} \hbar \omega}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (10)$$

och värmekapaciteten

$$c = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = -k\beta^2 \frac{-\hbar \omega}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^2} e^{\beta \hbar \omega} \hbar \omega = \boxed{k \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}} \quad (11)$$

där $x = \beta \hbar \omega$.

(b) Vibrationsenergierna för syrgas, kvävgas och klorgas finns listade under "Diatomic molecules" i Physics Handbook. Dessa värden kan konverteras till lämpliga enheter och sättas in i formeln (11) för värmekapaciteten tillsammans med temperaturen 1000 K. Följande värden fås:

Ämne	Vibrationsenergi (meV)	Värmekapacitet c (J/mol · K)
O ₂	196,92	5,48
N ₂	292,43	3,44
Cl ₂	69,39	7,88

Bara ett av värdena ligger nära det uppmätta värdet (3,5 J/mol · K) så vi kan sluta oss till att det rör sig om kvävgas.

Uppgift 4

(a)

Tillståndstätheten $g(\epsilon)$ är den funktion vi använder för att beräkna egenskaper genom integration i energirummet istället för direkt räkning av tillstånd. Vi söker alltså den funktion som gör att vi kan göra ersättningen

$$\sum_{\text{tillstånd}} \dots \rightarrow \int_0^\infty g(\epsilon) d\epsilon \dots \quad (12)$$

där prickarna kan utgöra vilken funktion som helst.

Tillstånden ges här av alla par av positiva heltal, n_x, n_y . Dessutom har vi att göra med elektroner, det vill säga partiklar med spinn 1/2. Summeringen över alla tillstånd kan alltså skrivas

$$\sum_{\text{tillstånd}} \dots = 2 \sum_{n_x, n_y} \dots \quad (13)$$

Vi approximerar summan med en integral

$$2 \sum_{n_x, n_y} \dots = 2 \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \dots = 2 \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty dn_x \int_{-\infty}^\infty dn_y \dots = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\infty n dn \dots \quad (14)$$

där vi i sista steget gick över till polära koordinater med $n^2 = n_x^2 + n_y^2$. För att ta oss hela vägen till en integral i energirummet måste vi byta ut n mot ϵ . Givet i uppgiften är

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 \quad (15)$$

vilket genom derivering ger

$$d\epsilon = \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n dn. \quad (16)$$

Vi kan lösa nu ut $n dn$ och göra den önskade substitutionen,

$$\pi \int_0^\infty n dn \dots = L^2 \frac{m_e}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty d\epsilon \dots \quad (17)$$

och genom att jämföra med (12) ser vi att

$$\boxed{g(\epsilon) = A \frac{m_e}{\pi \hbar^2}; \epsilon \geq 0} \quad (18)$$

där vi utnyttjade att arean $A = L^2$.

(b)

Fermienergin ϵ_F kan definieras enligt

$$N_e \equiv \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon. \quad (19)$$

där N_e är antalet elektroner. Med $g(\epsilon)$ från (a) får vi direkt

$$N_e = A \frac{m_e}{\pi \hbar^2} \epsilon_F \quad (20)$$

det vill säga (med $n_e \equiv N_e/A$),

$$\epsilon_F = n_e \frac{\pi \hbar^2}{m_e} \quad (21)$$

och

$$T_F \equiv \frac{1}{k} \epsilon_F = n_e \frac{\pi \hbar^2}{k m_e}. \quad (22)$$

Med $n_e = 10^{13}$ el/cm² fås

$$T_F = 278 \text{ K}. \quad (23)$$

Uppgift 5

(a) Om mittenplattan har temperaturen T_M så ges flödet från den varma plattan till mittenplattan av

$$J_{H \rightarrow M} = \sigma(T_H^4 - T_M^4),$$

och flödet från mittenplattan till den kalla plattan av

$$J_{M \rightarrow L} = \sigma(T_M^4 - T_L^4).$$

När dessa flöden är lika stora har mittenplattan nått sin stationära temperatur och energiflödet ändrar sig inte längre. Denna temperatur ges därför av ekvationen

$$J_{H \rightarrow M} = J_{M \rightarrow L} \Leftrightarrow \sigma(T_H^4 - T_M^4) = \sigma(T_M^4 - T_L^4) \Leftrightarrow 2T_M^4 = T_H^4 + T_L^4 \Leftrightarrow T_M = \left(\frac{T_H^4 + T_L^4}{2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (24)$$

Det nya flödet från $J_{H \rightarrow L}$ ges nu av antingen $J_{H \rightarrow M}$ eller $J_{M \rightarrow L}$ (de är ju lika stora):

$$J_{H \rightarrow L} = J_{H \rightarrow M} = \sigma(T_H^4 - T_M^4) = \sigma\left(T_H^4 - \frac{T_H^4 + T_L^4}{2}\right) = \frac{\sigma(T_H^4 - T_L^4)}{2} = \frac{J}{2},$$

det vill säga hälften av det ursprungliga flödet.

(b) Vi har nu två "mittenplattor". Beteckna mittenplattan intill den varma plattan T_{MH} och mittenplattan nära den kalla T_{ML} . Resultatet (24) från (a)-uppgiften kan tillämpas på dessa två plattor,

$$2T_{MH} = T_H^4 + T_{ML}^4 \quad (25)$$

$$2T_{ML} = T_L^4 + T_{MH}^4. \quad (26)$$

Vi kan lösa ekvationssystemet för T_{MH} ,

$$T_{MH}^4 = \frac{2}{3}T_H^4 + \frac{1}{3}T_L^4. \quad (27)$$

Återigen är energiflödet samma i alla delar av systemet. Vi kan titta på flödet från den varmaste plattan till plattan intill:

$$J_{H \rightarrow MH} = \sigma(T_H^4 - T_{MH}^4) = \sigma\left(T_H^4 - \frac{2}{3}T_H^4 - \frac{1}{3}T_L^4\right) = \sigma\left(\frac{1}{3}T_H^4 - \frac{1}{3}T_L^4\right) = \frac{1}{3}J \quad (28)$$

det vill säga en tredjedel av det ursprungliga flödet.