Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Måndag 7 jan 2019, kl 08.30-13.30. "Maskin"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 32 poäng, 5:a minst 44 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Fredag 18 jan 2019, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln, västra ingången.

1. Man vill sänka temperaturen för en gas genom att utsätta den för följande process ett antal gånger: Isoterm kompression till halva volymen följd av en adiabatisk expansion tillbaka till den ursprungliga volymen. Hur många gånger måste processen genomlöpas för att sänka temperaturen till 1/10 av den ursprungliga? Gasen är enatomig och den får behandlas som en idealgas.

2. Mättad vätska av kylmedlet HFC-134a med temperaturen 45,0 °C pressas genom en strypventil. Trycket sjunker då till 8,0 bar. Bestäm entropiändringen för denna process med hjälp av bifogad tabell! Strypventilen är värmeisolerad från omgivningen.

3. Gjutjärn existerar vid höga temperaturer i två faser α-järn (stabil under 900 °C och över 1400 °C) och γ-järn (stabil mellan 900 °C och 1400 °C). I temperaturintervallet 900-1400 °C kan värmekapacitiviteten C_P för respektive fas approximeras med ett konstant värde, 780 J/kg K (α-fasen) respektive 690 J/kg K (γ-fasen). Bestäm övergångsvärmet vid de två fasomvandlingarna!

4. Betrakta ett system som består av två energinivåer, med energierna $E_1 = \epsilon$ respektive $E_2 = 2\epsilon$. De undre nivån är tvåfaldigt degenererad medan den övre nivån är icke degenererad, det vill säga $g_1 = 2$ och $g_2 = 1$. Systemet är i termisk kontakt med en omgivning vid temperaturen T. Bestäm systemets entropi som funktion av temperaturen, $S(T)$! Studera därefter entropin vid låga respektive höga temperaturer. Enligt 3:e huvudsatsen ska entropin gå mot noll vid då $T \to 0$. Stämmer det? Kommentera! Visa att för höga temperaturer gäller att

$$S(T \to \infty) = k\left[a + bx + \mathcal{O}(x^2)\right]$$

där $x \equiv \epsilon/kT \ll 1$, och a och b är två konstanter. Bestäm a och b!

5. För en fotongas gäller att

$$\bar{n}_{Pl}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

och

$$g(\epsilon) = \frac{8\pi}{(ch)^3} V \epsilon^2$$

där $\bar{n}_{Pl}(\epsilon)$ är Planck-fördelningen, $g(\epsilon)$ tillståndstätheten och ϵ fotonens energi. Bestäm utgående från dessa två uttryck den total energin $U(T, V)$ för en fotongas innesluten i volymen V och med temperaturen T! Du kan ha användning av följande numeriska värden

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = n!\ \zeta(n+1)$$

där $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$ och $\zeta(8) = \pi^8/9450$. Baserat på detta härled också ett uttryck för entropin $S(T, V)$!

P (bar)	T (°C)	H_{liquid} (kJ)	H_{gas} (kJ)	S_{liquid} (kJ/K)	S_{gas} (kJ/K)
1.0	−26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	−18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	−10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

Table 4.3. Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at −40°C. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

		Temperature (°C)		
P (bar)		40	50	60
8.0	H (kJ)	274	284	295
	S (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	H (kJ)	269	280	291
	S (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	H (kJ)		276	287
	S (kJ/K)		0.916	0.953

Table 4.4. Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

LÖSNINGAR TILL TENTA 20190107

FTF140 TERMODYNAMIK OCH STATISTISK MEKANIK 2018

Gustav Åvall 2019-01-07

Uppgift 1

Gasen startar vid en temperatur T och volym V. Den komprimeras sedan isotermt till en volym $V/2$. Därefter sker en adiabatisk expansion till ursprungsvolymen. Gasen är ideal och under det adiabatiska steget i processen gäller

$$VT^{f/2} = konstant. \tag{1}$$

Låt temperaturen efter första cykeln vara T_1, då är

$$VT_1^{f/2} = \frac{V}{2}T^{f/2} \Longrightarrow T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/f} T. \tag{2}$$

Efter andra cykeln är temperaturen T_2 och

$$VT_2^{f/2} = \frac{V}{2}T_1^{f/2} \Longrightarrow T_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/f} T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/f}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/f} T. \tag{3}$$

På samma vis finner vi temperaturen för för cykel n

$$T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n/f} T. \tag{4}$$

Med $T_n = T/10$ har vi

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n/f} \Longrightarrow \frac{2n}{f} = \frac{\ln 1/10}{\ln 1/2} \Longrightarrow n = \frac{f}{2}\frac{\ln 10}{\ln 2} \tag{5}$$

Antalet frihetsgrader är 3, ty gasen är enatomig. Vi finner då

$$n = \frac{3}{2}\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 5. \tag{6}$$

Uppgift 2

Ändringen i entropi ges av

$$\Delta S = S_{ut} - S_{in}. \tag{7}$$

Vidare, i en strypventil är entalpin bevarad, $H_{in} = H_{ut}$. I tabellen finns ej värden angivna för 45.0° C. Vi gör därför en linjär interpolering med hjälp av de tabellerade värdena vid 39.4° C och 46.3° C. Låt

$$H = kT + m. \tag{8}$$

Detta ger oss

$$k = \frac{\Delta H}{\Delta T} = \frac{116-105}{46.3-39.4} = 1.59\,\mathrm{kJ/K} \tag{9}$$

och

$$m = H - kT = 105 - \frac{116-105}{46.3-39.4}39.4 = 42.2\,\mathrm{kJ} \tag{10}$$

På samma vis gör vi med entropin, ansätt

$$S = k'T + m' \tag{11}$$

med

$$k' = \frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{416-384}{46.3-39.4} = 4.6\,\mathrm{J/K^2} \tag{12}$$

och

$$m' = S - \frac{\Delta S}{\Delta T} = 384 - \frac{416-384}{46.3-39.4}39.4 = 201\,\mathrm{J/K}. \tag{13}$$

Detta ger oss

$$H_{in} = H(T = 45.0) = k \cdot 45.0 + m = 114\,\mathrm{kJ} \tag{14}$$

och

$$S_{in} = S(T = 45.0) = k' \cdot 45.0 + m' = 410\,\mathrm{J/K}. \tag{15}$$

Då vi pressat vätskan genom strypventilen så sänks trycket till 8.0 bar, vi ser i tabellen att vid ett tryck på 8.0 bar så är $H_{\text{vätska}} = 93$ kJ och $H_{\text{gas}} = 264$ kJ. Ingen av dessa är lika med H_{in}, när vätskan pressats stryupventilen får vi istället en blandning av vätska och gas. Låt x vara andelen vätska, vi har då

$$H_{in} = xH_{\text{vätska}} + (1-x)H_{\text{gas}} \Longrightarrow x = \frac{H_{in} - H_{\text{gas}}}{H_{\text{vätska}} - H_{\text{gas}}} = 0.88. \tag{16}$$

Detta ger oss S_{ut}

$$S_{ut} = xS_{\text{vätska}} + (1-x)S_{\text{gas}} = 346 \cdot 0.88 + 907(1-0.88) = 415\,\mathrm{J/K}. \tag{17}$$

Vi får då ändringen

$$\Delta S = S_{ut} - S_{in} = 5\,\mathrm{J/K}. \tag{18}$$

Uppgift 3

Jämvikt bestäms av Gibbs funktion

$$G = H - TS. \tag{19}$$

Vi har

$$\begin{aligned} T_1 &= 900^\circ\,\mathrm{C} = 1173\,\mathrm{K} \quad C_P^\alpha = 780\,\mathrm{J/kg \cdot K} \\ T_2 &= 1400^\circ\,\mathrm{C} = 1673\,\mathrm{K} \quad C_P^\gamma = 690\,\mathrm{J/kg \cdot K} \end{aligned} \tag{20}$$

Vid jämvikt mellan faserna gäller

$$\begin{cases} G^\alpha(T_1) = G^\gamma(T_1) \\ G^\alpha(T_2) = G^\gamma(T_2) \end{cases} \tag{21}$$

Övergångsvärmet ges av ändringen i entalpi

$$\begin{cases} L_1^{\alpha\to\gamma}(T_1) = H^\gamma(T_1) - H^\alpha(T_1) \\ L_2^{\alpha\to\gamma}(T_2) = H^\gamma(T_2) - H^\alpha(T_2) \end{cases} \tag{22}$$

Med 19 och 21 får vi

$$\begin{cases} L_1^{\alpha\to\gamma}(T_1) = T_1(S^\gamma(T_1) - S^\alpha(T_1)) \\ L_2^{\alpha\to\gamma}(T_2) = T_2(S^\gamma(T_2) - S^\alpha(T_2)) \end{cases} \tag{23}$$

Vi måste nu bestämma entropierna. Vi har

$$\mathrm{d}S = \frac{C_P}{T} \Longrightarrow S(T) = S(T_1) + \int_{T_1}^{T} \frac{C_P}{T'}\mathrm{d}T' = S(T_1) + C_P \ln\frac{T}{T_1}. \tag{24}$$

För Gibbs funktion, vid konstant tryck, gäller

$$\mathrm{d}G = -Sd\mathrm{T}, \tag{25}$$

vilket ger oss

$$\begin{aligned} G(T_2) - G(T_1) &= -\int_{T_1}^{T_2} \left(S(T_1) + C_P \ln\frac{T}{T_1}\right)\mathrm{d}T \\ &= -\left(S(T_1)(T_2 - T_1) + C_P\left(T_2 \ln\frac{T_2}{T_1} - (T_2 - T_1)\right)\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Vi tillämpar nu detta på båda faserna. Notera att enligt 21.

$$G^\alpha(T_2) - G^\alpha(T_1) = G^\gamma(T_2) - G^\gamma(T_1) \tag{27}$$

eller

$$S^\alpha(T_1)(T_2 - T_1) + C_P^\alpha\left(T_2 \ln\frac{T_2}{T_1} - (T_2 - T_1)\right) = S^\gamma(T_1)(T_2 - T_1) + C_P^\gamma\left(T_2 \ln\frac{T_2}{T_1} - (T_2 - T_1)\right), \tag{28}$$

Vilket ger oss

$$S^\gamma(T_1) - S^\alpha(T_1) = (C_P^\alpha - C_P^\gamma)\left[\frac{T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} - 1\right]. \tag{29}$$

Med ekvation 23 får vi

$$L_1^{\alpha\to\gamma} = (C_P^\alpha - C_P^\gamma)\left[\frac{T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} - 1\right]. \tag{30}$$

Med ekvation 24 finner vi

$$S^\gamma(T_2) - S^\alpha(T_2) = (C_P^\gamma - C_P^\alpha)\ln\frac{T_2}{T_1} + (C_P^\alpha - C_P^\gamma)\left[\frac{T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = (C_P^\alpha - C_P^\gamma)\left[\frac{T_1}{T_2 - T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} - 1\right], \tag{31}$$

och

$$L_2^{\alpha\to\gamma}(C_P^\alpha - C_P^\gamma)\left[\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} - T_2\right]. \tag{32}$$

Numeriskt gås

$$\begin{cases} L_1^{\alpha\to\gamma} = 20\,\mathrm{kJ/kg} \\ L_2^{\alpha\to\gamma} = -25\,\mathrm{kJ/kg} \end{cases} \tag{33}$$

eller $L_2^{\gamma\to\alpha} = 25\,\mathrm{kJ/kg}$.

Uppgift 4

Tillståndssumman för systemet är

$$Z = 2\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT} + \mathrm{e}^{-2\varepsilon/kT} = \left(2 + \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}. \tag{34}$$

Från fria energin

$$F = -kT\ln Z = -kT\ln\left(2 + \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\right) + \varepsilon \tag{35}$$

får vi entropin

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k\ln\left(2 + \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\right) + \frac{kT}{2 + \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}}\left(\frac{\varepsilon}{kT^2}\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT} = k\left(\ln\left(2 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{x}{2\mathrm{e}^x + 1}\right), \tag{36}$$

med $x = \varepsilon/kT$.

Vi studerar först gränsen $T \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow \infty$ och $\mathrm{e}^{-x} \longrightarrow 0$, och får direkt

$$S = k\ln 2. \tag{37}$$

Då $T = 0$ är sannolikheten för partikeln att befinna sig i grundtillståndet 1. Entropin ges allmänt av $S = k\ln\Omega$, där Ω är antalet mikrotillstånd som ger upphov till samma makrotillstånd. Då grundtillståndet är tvåfaldigt degenererat finns det alltid två sätt att ockupera grundtillståndet. Alltså förväntar vi oss att detta systemet uppvisar en entropi på $S = k\ln 2$ vid $T = 0$.

För att undersöka gränsen $T \longrightarrow \infty, x \longrightarrow 0$, så Taylorutvecklar vi kring $x = 0$ och finner

$$\begin{aligned} \ln\left(2 + \mathrm{e}^{-x}\right) &= \ln 3 - \frac{1}{3}x + \mathcal{O}(x^2) \\ \frac{x}{2\mathrm{e}^x + 1} &= 0 + \frac{1}{3}x + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned} \tag{38}$$

Detta ger oss

$$S(T \longrightarrow \infty) = k\left(\ln 3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \mathcal{O}(x^2)\right) = k\left(\ln 3 + \mathcal{O}(x^2)\right). \tag{39}$$

Således är $a = \ln 3$ och $b = 0$.

5

Totala energin ges av

$$U(T,V) = \int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon)\bar{n}_{Pl}(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{8\pi}{(ch)^3}V\int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{\mathrm{e}^{\varepsilon/kT} - 1}\mathrm{d}\varepsilon. \tag{40}$$

Utför variabelsusbistionen $x = \varepsilon/kT$:

$$U(T,V) = \frac{8\pi(kT)^4V}{(ch)^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{8\pi(kT)^4V)}{(ch)^3}3!\zeta(4) = \frac{8\pi^5k^4T^4V}{15(ch)^3}. \tag{41}$$

Entropin får vi genom värmekapacitansen

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{32\pi^5k^4T^3V}{15(ch)^3}, \tag{42}$$

vilket ger entropin

$$S(T) = \int_0^T \frac{C_V}{T}\mathrm{d}T = \frac{32\pi^5k^4T^3V}{45(ch)^3}. \tag{43}$$