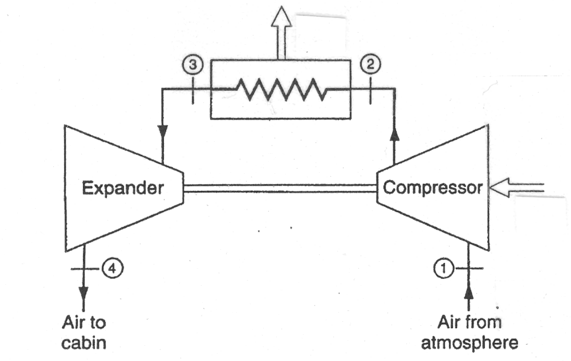
Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 28 aug 2018, kl 08.30-13.30 i "Maskin"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Gustav Åvall, tel. 0768796731.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Onsdag 12 sep 2017, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. En järnbit som väger 1,0 kg med temperaturen 70 °C kyls till 20 °C genom att sänkas ned i ett stort vattenbad med temperature 20 °C. Beräkna totala entropiändringen! Gör lämpliga antaganden och ta data från Physics Handbook.

2. Figuren illustrerar en vanlig princip för luftkonditionering i flygplan. Kall uteluft komprimeras adiabatiskt i en kompressor och därefter avger luften värme vid konstant tryck. Slutligen expanderar den adiabatiskt genom en rotor ("Expander"), som dessutom hjälper till att driva kompressorn. Luften kan behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet och kompressionen och expansionen kan antas ske kvasistatiskt. Antag att uteluften har temperaturen -30 °C och trycket 30 kPa, att den i kompressorn komprimeras till trycket 200 kPa och att den när den kommer in i kabinen har temperaturen 20 °C och trycket 100 kPa. Bestäm det nettoarbete per kilogram luft som krävs för att driva luftkonditioneringsapparaten!



3. Bestäm värmekapaciteten C_V för ett system med enbart två tillstånd med energierna $-\epsilon$ och $+\epsilon$. Ange på enklast möjliga form en ekvation vars lösning ger temperaturen vid vilken värmekapaciteten har ett

maximum. Bestäm en approximativ numerisk lösning till denna ekvation och ange temperaturen som funktion av ϵ vid vilken värmekapaciteten antar ett maximum.

4. Betrakta ett system av N icke-växelverkande elektroner, en elektrongas, innesluten i en volym V. Tillståndstätheten ges då av uttrycket

$$g(\epsilon) = 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} V\sqrt{\epsilon}$$

där ϵ är energin och m_e elektronens massa. Antag temperaturen $T = 0$.

(a) Bestäm systemets Fermienergi ϵ_F utgående från uttrycket på tillståndstätheten!

Elektronen har ett magnetiskt moment och z-komponenten av det magnetiska momentet kan anta två olika värden, "spinn upp" respektive "spinn ned". I närvaro av ett externt magnetfält B i z-riktningen minskar energin med $\mu_B B$ för varje elektron med spinn upp och energin ökar med $\mu_B B$ för varje elektron med spinn ned. Magnetiseringen ges av uttrycket

$$M = \mu_B(N_\uparrow - N_\downarrow)$$

där $N_\uparrow$ och $N_\downarrow$ är antalet elektroner med spinn upp respektive spinn ned.

(b) Teckna ett uttryck för tillståndstätheten i närvaro av ett magnetfält B och bestäm magnetiseringen vid temperaturen $T = 0$ under antagandet att $\mu_B B \ll \epsilon_F$! Uttryck magnetiseringen som funktion av antal elektroner N, magnetiska momentet μ_B, Fermienergi ϵ_F samt det yttre pålagda magnetfältet B!

5. En svart plan yta H med temperaturen T_H är parallell med en svart plan yta L med temperaturen T_L, där $T_H > T_L$. Energiflödet i vacuum mellan de två ytorna är

$$J = \sigma\left(T_H^4 - T_L^4\right)$$

enligt Stefan-Boltzmanns lag.

(a) Antag nu att en tredje plan ogenomskinlig svart yta A placeras mellan de två andra. Beräkna nu effektflödet från H till L när ett stationärt flödestillstånd har ställt in sig. Hur förhåller sig detta till det ursprungliga effektflödet J?

(b) Antag nu att ytterligare en ogenomskinlig svart yta B placeras mellan A och L. Beräkna åter effektflödet från H till L när ett stationärt flödestillstånd har ställt in sig. Hur förhåller sig detta nya flöde till det ursprungliga effektflödet J?

Både A och B är tunna så att det är vacuum mellan alla ytorna i både fall (a) och (b).

Termodynamiska relationer

Inom termodynamiken kan en mängd olika exakta relationer mellan olika termodynamiska storheter härledas. För system som kan beskrivas med två tillståndsvariabler och där tryck-volym arbete är det enda relevanta arbetet gäller att

$$\begin{aligned} dU &= C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV \\ &= C_V dT + \left[\frac{T\beta}{\kappa_T} - P \right] dV \\ dS &= \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV \\ &= \frac{C_V}{T} dT + \frac{\beta}{\kappa_T} dV \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} dH &= C_P dT + \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dP \\ &= C_P dT + \left[V - TV\beta \right] dP \\ dS &= \frac{C_P}{T} dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP \\ &= \frac{C_P}{T} dT - V\beta dP \end{aligned}$$

Notera att vi här har uttryckt ändringen i energin U, entalpin H samt entropin S i mätbara storheter. Denna typ av relationer utnyttjas då man experimentellt önskar bestämma värden för dessa tillståndsfunktioner. Vidare gäller att

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T &= T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V \\ \left(\frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T &= -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} C_P - C_V &= T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\ &= \frac{TV\beta^2}{\kappa_T} \end{aligned}$$

Denna relation är användbar då man önskar bestämma C_V eftersom C_P, β och κ_T är enklare att experimentellt bestämma.

tenta 20180828, FTF140 termodynamik och statistisk mekanik

Gustav Åvall

September 11, 2018

1.

Från physics handbook finner vi $C_{\mathrm{Fe}} = 449$ J kg^{-1}K^{-1}. Ändring i entropi för järn ges av

$$\Delta S_{\mathrm{Fe}} = mC_{\mathrm{Fe}} \int_{T_i}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = mC_{\mathrm{Fe}} \ln \frac{T_f}{T_i} = -70.7 \text{ J/K}. \tag{1}$$

Vattenbadet antas agera som en reservoar och dess temperatur är konstant. Dock så kommer järnet avge värme Q under nedkylningen, detta höjer entropin i vattnet. Värmen som avges till badet är

$$Q = mC_{\mathrm{Fe}}(T_i - T_F), \tag{2}$$

ändringen i entropi i badet är då

$$\Delta S_{\mathrm{W}} = \frac{Q}{T} = \frac{mC_{\mathrm{Fe}}(T_i - T_F)}{T_F} = 76.6 \text{ J/K}. \tag{3}$$

Den totala entropiändringen är då

$$\Delta S = \Delta S_{\mathrm{Fe}} + \Delta S_{\mathrm{W}} = 5.9 \text{ J/K}. \tag{4}$$

2.

$$\begin{aligned} T_1 &= -30^\circ\mathrm{C} = 243 \text{ K}, \;\; P_1 = 30 \text{ kPa} \\ T_2 &= \text{okänd}, \;\; P_2 = 200 \text{ kPa} \\ T_3 &= \text{okänd}, \;\; P_3 = P_2 \\ T_4 &= 20^\circ\mathrm{C} = 293 \text{ K}, \;\; P_4 = 100 \text{ kPa} \end{aligned} \tag{5}$$

Stegen $1 \to 2$ och $3 \to 4$ sker via en adiabatisk kompression/expansion. I en adiabatisk process gäller

$$TP^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{konstant}, \tag{6}$$

där $\gamma = 1.4$ för en diatomär idealgas. Detta ger oss

$$T_1 P_1^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_2 P_2^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Longrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 417.8 \text{ K}. \tag{7}$$

På samma sätt finner vi

$$T_3 = T_4 \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 357.2 \text{ K}. \tag{8}$$

Arbetet för kompression:

$$W_{\mathrm{komp}} = C_p(T_2 - T_1) = 176548 \text{ J/kg} \tag{9}$$

Arbete för expansion:

$$W_{\mathrm{exp}} = C_p(T_3 - T_4) = 64813 \text{ J/kg}, \tag{10}$$

där $C_p = 1010$ J kg^{-1}K^{-1} använts. Totala arbetet för att driva hela processen är då

$$W = W_{\mathrm{komp}} - W_{\mathrm{exp}} = 112 \text{ kJ/kg}. \tag{11}$$

3.

Vi har tillståndssumman

$$Z = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}, \tag{12}$$

där $x = \beta\epsilon = \epsilon/k_B T$. Vidare:

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\epsilon\frac{\partial \ln Z}{\partial x} = -\epsilon\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) = -\epsilon\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = -\epsilon \tanh x. \tag{13}$$

Värmekapaciteten ges av

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = -\frac{\epsilon}{k_B T^2}\frac{\partial U}{\partial x} = k_B x^2 (1 - \tanh^2 x). \tag{14}$$

Ett maximum måste uppfylla villkoret

$$\frac{\partial C_V}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial C_V}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

villket ger oss

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(1 - \tanh^2 x)\right] = -2x(\tanh^2 x + x \tanh x \, \mathrm{sech}^2 x - 1) = 0. \tag{16}$$

Med $\mathrm{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ kan detta förenklas och ger då ekvationen

$$\tanh x = \frac{1}{x}. \tag{17}$$

$1/x$ är 1 då $x = 1$ och avtar sedan mot 0. $\tanh x$ är 0 i origo och går sedan snabbt mot 1. Alltså bör svaret ligga nära $x = 1$, om man undersöker några värden finner man att $x = 1.2$ ger en bra lösning.

4.

a) Antalet partiklar N vid $T = 0$ ges av

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon = g_0 \int_0^{\epsilon_F} \sqrt{\epsilon}\mathrm{d}\epsilon = \frac{2g_0}{3}\epsilon_F^{3/2}, \tag{18}$$

där

$$g_0 = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}. \tag{19}$$

Detta ger oss Fermi-energin

$$\epsilon_F = \left(\frac{3N}{2g_0}\right)^{2/3}. \tag{20}$$

b) Låt $\Delta\epsilon = \mu_B B$. För en elektron med spinn-upp så ökar energin med $\Delta\epsilon$ då ett magnetfält läggs på, för en elektron med spinn-ner minskar istället energin med $\Delta\epsilon$. Vi har tillståndsfunktionerna för spinn-upp respektive spinn-ner

$$\begin{aligned} g_\uparrow &= \frac{g_0}{2}\sqrt{\epsilon + \Delta\epsilon}, \;\; \epsilon \geq -\Delta\epsilon \\ g_\downarrow &= \frac{g_0}{2}\sqrt{\epsilon - \Delta\epsilon}, \;\; \epsilon \geq \Delta\epsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Betäckna Fermi-energin då magnetfältet lagts på med ϵ_M. Vi har då beräkna antalet elektroner i spinn-upp tillståndet

$$N_\uparrow = \int_{-\Delta\epsilon}^{\epsilon_M} g_\uparrow \mathrm{d}\epsilon = \frac{g_0}{2}\int_{-\Delta\epsilon}^{\epsilon_M} \sqrt{\epsilon + \Delta\epsilon}\mathrm{d}\epsilon. \tag{22}$$

Utför variabelsubstitutionen $x = \epsilon + \Delta\epsilon$,

$$N_\uparrow = \frac{g_0}{2}\int_0^{\epsilon_M + \Delta\epsilon} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{g_0}{3}\epsilon_M^{3/2}\left(1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^{3/2}. \tag{23}$$

På motsvarande vis finner vi

$$N_{\downarrow} = \frac{g_0}{3}\epsilon_M^{3/2}\left(1 - \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^{3/2}. \tag{24}$$

Med $\mu_B B = \Delta\epsilon \ll \epsilon_M$ kan vi expandera dessa kring $\Delta\epsilon/\epsilon_M = 0$:

$$\begin{aligned} N_{\uparrow} &= \frac{g_0}{3}\epsilon_M^{3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \frac{3}{8}\left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 + \ldots\right) \\ N_{\downarrow} &= \frac{g_0}{3}\epsilon_M^{3/2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \frac{3}{8}\left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 - \ldots\right) \end{aligned} \tag{25}$$

Antalet elektroner är då

$$N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = \frac{g_0}{3}\epsilon_M^{3/2}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 + \ldots\right). \tag{26}$$

Till första ordning är då $N = 2g_0\epsilon_M^{3/2}/3$ och

$$\epsilon_M = \left(\frac{3N}{2g_0}\right)^{2/3} = \epsilon_F. \tag{27}$$

Magnetiseringen ges av

$$M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = \frac{\mu_B g_0}{3}\epsilon_M^{3/2}\left(3\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \ldots\right) \approx \mu_B g_0 \epsilon_F^{3/2}\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_F} = \frac{3\mu_B^2 NB}{2\epsilon_F}. \tag{28}$$

5.

a) Låt A ha temperaturen T_A. Effektflödet från H till A ges av

$$J_{H\longrightarrow A} = \sigma(T_H^4 - T_A^4), \tag{29}$$

samt mellan L och A:

$$J_{A\longrightarrow L} = \sigma(T_A^4 - T_L^4). \tag{30}$$

Då flödet är stationärt gäller $J' = J_{H\longrightarrow A} = J_{A\longrightarrow L}$, detta ger oss en ekvation för T_A:

$$T_H^4 - T_A^4 = T_A^4 - T_L^4 \Longrightarrow T_A^4 = \frac{1}{2}(T_H^4 + T_L^4). \tag{31}$$

Vi kan nu beräkna det stationära effektflödet

$$J' = \sigma(T_H^4 - T_A^4) = \sigma\left(T_H^4 - \frac{T_H^4 + T_L^4}{2}\right) = \frac{\sigma}{2}(T_H^4 - T_L^4) = \frac{J}{2}. \tag{32}$$

b) Låt B ha temperaturen T_B. På samma sätt har vi

$$\begin{aligned} J_{H\longrightarrow A} &= \sigma(T_H^4 - T_A^4), \\ J_{A\longrightarrow B} &= \sigma(T_A^4 - T_B^4), \\ J_{B\longrightarrow L} &= \sigma(T_B^4 - T_L^4). \end{aligned} \tag{33}$$

Vid stationärt flöde är dessa lika. Sätter vi $J_{B\longrightarrow L} = J_{A\longrightarrow B}$ finner vi $T_A^4 = 2T_B^4 - T_L^4$, sätt in detta i $J_{H\longrightarrow A}$ och sett detta lika med $J_{B\longrightarrow L}$, vi finner då att

$$\begin{aligned} T_A^4 &= \frac{1}{3}(2T_H^4 + T_L^4), \\ T_B^4 &= \frac{1}{3}(T_H^4 + 2T_L^4), \end{aligned} \tag{34}$$

Vi får då effektflödet

$$J' = J_{A\longrightarrow B} = \frac{\sigma}{3}(2T_H^4 + T_L^2 - T_H^4 - 2T_L^4) = \frac{\sigma}{3}(T_H^4 - T_L^4) = \frac{J}{3}. \tag{35}$$