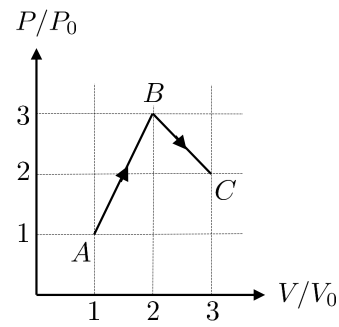
Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 19 dec 2017, kl 08.30-13.30 i "Maskin"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Måndag 15 jan 2018, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. Betrakta en behållare med n mol kvävgas som genomgår en kvasistatisk process $A \to B \to C$ (se figur med tryck P som funktion av volym V). Temperaturen i punkten A är T_0. (a) Bestäm tillfört/bortfört arbete och värme för processen! Var noga med att ange om arbetet respektive värmet är bortfört eller tillfört. Du får behandla kvävgasen som en idealgas med konstant värmekapacitet $C_V = (5/2)nR$, där n är antalet mol och R allmänna gaskonstanten. (b) Bestäm därefter entropiändringen för gasen vid processen, dvs från A till C! Dina svar får endast innehålla variablerna n, R och T_0.



2. Betrakta två system A och B. Systemen har temperaturoberoende värmekapaciteter, $C_A = a$ och $C_B = b$, för system A respektive B, och där a och b är två konstanter. Från början har system A begynnelsetemperaturen T_A och system B begynnelsetemperaturen T_B, där $T_A > T_B$. Vi utnyttjar nu dessa två system för att utvinna arbete med hjälp av en värmemotor. Hur mycket arbete kan maximalt utvinnas fram till dess att systemen har antagit en gemensam sluttemperatur?

3. En tank innehåller en vätska med massan m och den konstanta värmekapacitiviteten c. Vätskan, som från början har temperaturen T_0, fyller upp hela tanken. Energi tillförs därefter till vätskan med konstant effekt P_0 under omrörning. Temperaturen i vätskan kan därför antas vara homogen. Tanken är inte termiskt isolerad utan vätskan avger energi i form av värme till omgivningen. Den avgivna effekten ges av uttrycket $hA(T - T_0)$, där h är en konstant, A tankens area, T vätskans momentana temperatur och T_0 omgivningens temperatur. (a) Vad blir sluttemperaturen för vätskan? Själva tankens

värmekapacitet kan försummas och vätskan får antas vara inkompressibel. Effekter från värmestrålning kan också försummas. (b) Ställ upp en differentialekvation som anger hur temperaturen T beror av tiden t samt lös denna! (c) Bestäm därefter vätskans entropi som funktion av tiden t! Beteckna entropin vid $t = 0$ med S_0. Vad blir entropin då $t \to \infty$?

4. I en så kallad jonfälla kan man med elektriska och/eller magnetiska fält fånga och behålla enskilda joner i fritt tillstånd inom en begränsad volym. Jonfällor kan utnyttjas för olika slag av precisionsspektroskopi och för studier av grundläggande kvantmekaniska fenomen. Till en första approximation kan man anta att den instängda jonen rör sig i en tredimensionell harmonisk oscillator potential. Energinivåerna för denna ges av uttrycket

$$E_{n_1,n_2,n_3} = (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})\ \hbar\omega \ , \quad n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

där ω är vinkelfrekvensen för små svängningar kring jämviktsläget. Man kan minska jonens rörelseenergi genom laserkylning. Man utnyttjar då resonans mellan laserstrålen och optiska övergångar i jonen. Vid ett sådant experiment studerade man en Hg^+ jon. Den aktuella jonfällan kan beskrivas med en tredimensionell potential med vinkelfrekvensen ω=18,6·10^6 radianer/s. Experimentalisterna hävdade att de lyckades kyla ned jonen så mycket att den var i grundtillståndet 90 % av tiden. Vilken temperatur motsvarar det?

5. Betrakta ett system bestående av två identiska partiklar. Systemet kan beskrivas med hjälp av tre en-partikel tillstånd ("single-particle states"), två med energin $e = 0$ och ett med energin $e = \epsilon$. Systemet är i jämvikt vid en temperatur T. Bestäm tillståndssumman Z, medelenergin E samt numrera (visualisera) alla möjliga konfigurationer för vart och ett av nedanstående två fall: (a) partiklarna är fermioner och (b) partiklarna är bosoner. Vad blir medelenergin i dessa två fall då $T \to \infty$?

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN
FTF140 TERMODYNAMIK OCH STATISTISK MEKANIK 2017

Magnus Rahm 2017-12-19

Uppgift 1

Följande gäller för vår gas:

$$PV = nRT \quad \text{(ideala gaslagen)} \tag{1}$$
$$C_V = \frac{5}{2}nR \quad \text{(givet i uppgiften, förväntat värde för diatomig gas)} \tag{2}$$
$$C_P = \frac{7}{2}nR \quad \text{(ty } C_P = C_V + nR \text{ för ideal gas)} \tag{3}$$
$$U = \frac{5}{2}nRT \quad \text{(ty } U = C_V T \text{ för ideal gas).} \tag{4}$$

(a)

Vi beräknar först temeperaturen med hjälp av ideala gaslagen. I punkt A har vi givet att

$$T_A = T_0 \tag{5}$$

vilket innebär att

$$T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}. \tag{6}$$

I punkt B har vi

$$nRT_B = 3P_0 \cdot 2V_0 = 6nRT_0 \quad \Rightarrow \quad T_B = 6T_0 \tag{7}$$

och på samma sätt för punkt C,

$$nRT_C = 2P_0 \cdot 3V_0 = 6nRT_0 \quad \Rightarrow \quad T_C = 6T_0. \tag{8}$$

Vi beräknar arbetet och värmet först från A till B, sedan från B till C.

$\mathbf{A \to B}$

Tillfört arbtete ges av arean under grafen från A till B:

$$W_{A\to B} = -\int_A^B PdV = -2P_0V_0 = -2nRT_0. \tag{9}$$

Minustecknet innebär att systemet har utfört ett arbete på omgivningen. Ändringen i inre energi ges av

$$\Delta U_{A\to B} = U_B - U_A = \frac{5}{2}nR6T_0 - \frac{5}{2}nRT_0 = \frac{25}{2}nRT_0. \tag{10}$$

Det tillförda värmet kan nu beräknas med hjälp av första huvudsatsen,

$$Q_{A\to B} = \Delta U_{A\to B} - W_{A\to B} = \frac{25}{2}nRT_0 - (-2nRT_0) = \frac{29}{2}nRT_0. \tag{11}$$

Positivt tecken innebär att värme har tillförts systemet.

B → C

Tillfört arbete:

$$W_{B\to C} = -\int_B^C P dV = -\frac{5}{2}P_0 V_0 = -\frac{5}{2}nRT_0. \tag{12}$$

Ändring i inre energi:

$$\Delta U_{B\to C} = U_C - U_B = 0. \tag{13}$$

Tillfört värme:

$$Q_{B\to C} = \Delta U_{B\to C} - W_{B\to C} = \frac{5}{2}nRT_0. \tag{14}$$

Totalt

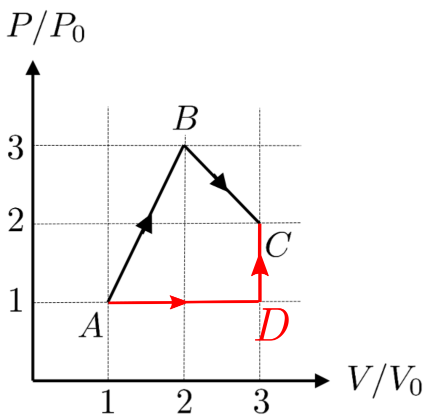
Sammanlagt har vi

$$W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C} = -\frac{9}{2}nRT_0, \tag{15}$$

$\boxed{\text{alltså har systemet uträttat det totala arbetet } \frac{9}{2}nRT_0}$ och

$$Q_{A\to C} = Q_{A\to B} + Q_{B\to C} = \frac{34}{2}nRT_0, \tag{16}$$

$\boxed{\text{alltså har } 17nRT_0 \text{ tillförts systemet i form av värme.}}$



(b)

Tack vare att entropi är en tillståndsfunktion (dess värde beror bara på vilket tillstånd vi befinner oss i och inte hur vi hamnade där) kan vi beräkna entropiändringen från A till C längs vilken kurva vi vill (jämför detta med värme och arbete i uppgift (a) där det spelar roll vilken väg vi tar – värme och arbete är *inte* tillståndsfunktioner). Eftersom $\Delta S = Q/T$ gör man klokt i att välja en väg där man enkelt kan uttrycka Q som en förändring i T. En sådan kurva är inritad i figuren ovanför – längs A till D har vi konstant tryck och längs D till C konstant volym, och vi får då använda C_P respektive C_V:

$$S_C - S_A = \int_A^D \frac{C_P dT}{T} + \int_D^C \frac{C_V dT}{T} = \frac{7}{2}nR\ln\frac{T_D}{T_A} + \frac{5}{2}nR\frac{T_C}{T_D}. \tag{17}$$

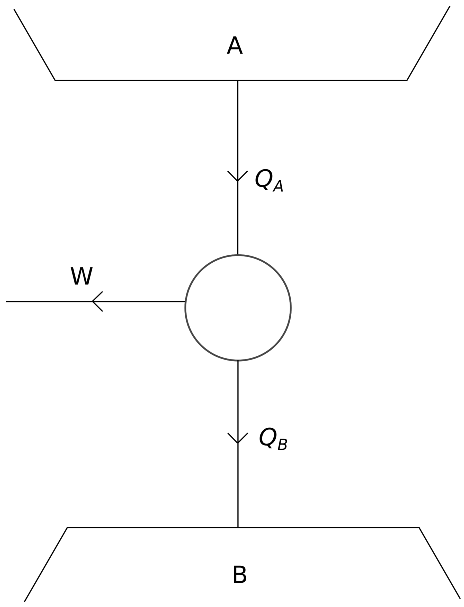
Temperaturen i D ges av ideala gaslagen,

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = \frac{P_0 \cdot 3V_0}{nR} = 3T_0. \tag{18}$$

Alltså har vi

$$S_C - S_A = \frac{7}{2}nR\ln 3 + \frac{5}{2}nR\ln 2 = \boxed{\left(\frac{7}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 2\right)nR.} \tag{19}$$

Uppgift 2



Med pilar definierade enligt figur kan vi skriva första huvudsatsen som

$$Q_A = W + Q_B \tag{20}$$

Vi betecknar sluttemperaturen T_f och kan beräkna värmet enligt

$$Q_A = -\int_{T_A}^{T_f} a dT = a\,(T_A - T_f) \tag{21}$$

$$Q_B = \int_{T_B}^{T_f} a dT = b\,(T_f - T_B)\,. \tag{22}$$

Minustecknet för A kommer av att vi definierat värme som positivt när det flödar *ut ur* system A (det flödar förvisso in i motorn, men det är temperaturen i system A vi integrerar över).

Entropiändringarna blir

$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_f} \frac{adT}{T} = a \ln \frac{T_f}{T_A} \tag{23}$$

$$\Delta S_B = \int_{T_B}^{T_f} \frac{bdT}{T} = b \ln \frac{T_f}{T_B}. \tag{24}$$

(Observera att det inte kommer in några minustecken här. Om man vill kan man tänka att det för pil ut ur systemet blir två minustecken som tar ut varandra enligt $\Delta S = \frac{-Q}{T} = \frac{-(-CdT)}{T} = \frac{CdT}{T}$.)

Andra huvudsatsen ger nu att

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B \geq 0. \tag{25}$$

Maximalt arbete ges vid likhet, då vi alltså har

$$a \ln \frac{T_f}{T_A} + b \ln \frac{T_f}{T_B} = 0 \tag{26}$$

så att

$$\left(\frac{T_f}{T_A}\right)^a \left(\frac{T_f}{T_B}\right)^b = 1 \tag{27}$$

ur vilket vi kan lösa ut sluttemperaturen

$$T_f = (T_A^a T_B^b)^{\frac{1}{a+b}}. \tag{28}$$

Vi kan nu beräkna det maximala arbetet:

$$\begin{aligned} W_{\max} = Q_A - Q_B = a\,(T_A - T_f) - b\,(T_f - T_B) &= aT_A + bT_B - (a+b)T_F \\ &= \boxed{aT_A + bT_B - (a+b)(T_A^a T_B^b)^{\frac{1}{a+b}}.} \end{aligned} \tag{29}$$

Uppgift 3

Vi har för värmeflödet att

$$\dot{Q}_{\text{in}} = P_0, \tag{30}$$

$$\dot{Q}_{\text{ut}} = hA\left[T(t) - T_0\right]. \tag{31}$$

(a)

Sluttemperaturen T_s nås då det flödar in lika mycket värme som det flödar ut, $\dot{Q}_{\text{in}} = \dot{Q}_{\text{ut}}$, det vill säga

$$P_0 = hA(T_s - T_0) \tag{32}$$

ur vilket vi kan lösa ut sluttemperaturen

$$\boxed{T_s = T_0 + \frac{P_0}{hA}.} \tag{33}$$

(b)

Nettoflödet av värme in i tanken ger upphov till en temperaturökning,

$$\dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{ut}} = mc\dot{T} \tag{34}$$

Vänsterledet kan vi skriva

$$\dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{ut}} = P_0 - hA\left[T(t) - T_0\right] = hA\left[T_s - T(t)\right]. \tag{35}$$

Vår differentialekvation kan nu skrivas

$$hA\left[T_s - T(t)\right] = mc\frac{dT}{dt} \tag{36}$$

vilket är en separabel differentialekvation,

$$\int_0^t dt' = \frac{mc}{hA}\int_{T_0}^{T} \frac{dT'}{T_s - T'}. \tag{37}$$

Vi sätter $\tau \equiv \frac{mc}{hA}$ och löser integralerna,

$$t = -\tau\left[\ln|T_s - T'|\right]_{T_0}^{T} \tag{38}$$

vilket ger

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\frac{T_s - T}{T_s - T_0} \tag{39}$$

så att

$$e^{-t/\tau} = \frac{T_s - T}{T_s - T_0} \tag{40}$$

så lösningen ges av

$$\boxed{T(t) = T_s - (T_s - T_0)e^{-t/\tau}.} \tag{41}$$

Notera att $T(t = 0) = T_0$ och $T(t \to \infty) = T_s$ som förväntat.

(c)

Entropiändringen ges av

$$dS = \frac{mc\,dT}{T} \tag{42}$$

vilket vi direkt kan integrera,

$$\int_{S_O}^{S(t)} dS = \int_{T_0}^{T(t)} \frac{mc\,dT}{T}. \tag{43}$$

Vi får

$$S(t) - S_0 = mc \ln \frac{T(t)}{T_0} \tag{44}$$

och kan nu sätta in uttrycket för $T(t)$ som vi beräknade i (b),

$$\boxed{S(t) = S_0 + mc \ln \left\{ \frac{T_s}{T_0} - \left(\frac{T_s}{T_0} - 1 \right) e^{-t/\tau} \right\}.} \tag{45}$$

Vi ser direkt att $\boxed{S(t \to \infty) = S_0 + mc \ln \frac{T_s}{T_0}.}$.

Uppgift 4

Vi har att energin ges av

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

där $\omega = 18{,}6 \times 10^6$ rad/s. Att jonen befinner sig i grundtillståndet 90 % av tiden innebär att sannolikheten att den befinner sig i grundtillståndet, P_0, är $0{,}9$. För grundtillståndet gäller vidare att $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Tillståndssumman ges av

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_1,n_2,n_3} e^{-E_{n_1,n_2,n_3}/kT} && (46)\\ &= e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega/kT} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-n_1\hbar\omega/kT} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-n_2\hbar\omega/kT} \sum_{n_3=0}^{\infty} e^{-n_3\hbar\omega/kT} && (47)\\ &= \frac{e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega/kT}}{(1 - e^{-\hbar\omega/kT})^3} && (48) \end{aligned}$$

där vi i sista ledet använt oss av att varje delsumma motsvaras av en geometrisk serie. Sannolikheten att jonen befinner sig i grundtillståndet är

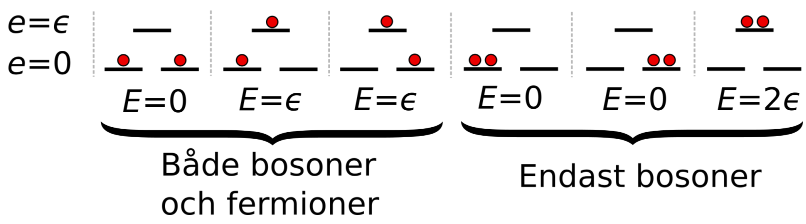
$$0{,}90 = \frac{e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega/kT}}{Z} = (1 - e^{-\hbar\omega/kT})^3$$

vilket ger temperaturen

$$T = -\frac{\hbar\omega}{k}\frac{1}{\ln(1 - 0{,}90^{1/3})} = \boxed{4{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}.}$$

Uppgift 5

I figuren nedan är samtliga möjliga tillstånd visualiserade.



(a) Fermioner

För att beräkna tillståndssumman behöver vi summera över alla tillstånd som systemet kan befinna sig i om partiklarna är fermioner, det vill säga alla systemtillstånd där partiklarna befinner sig i *olika* enpartikeltillstånd,

$$Z = \sum_{\text{tillstånd}} e^{-E_i/kT} = e^{-0/kT} + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-\varepsilon/kT} = 1 + 2e^{-\varepsilon/kT}. \tag{49}$$

För medelenergin har vi

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\text{tillstånd}} E_i e^{-E_i/kT} = \frac{e^{-0/kT} + \varepsilon e^{-\varepsilon/kT} + \varepsilon e^{-\varepsilon/kT}}{1 + 2e^{-\varepsilon/kT}} = \frac{2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}}{1 + 2e^{-\varepsilon/kT}} \tag{50}$$

vilket eventuellt kan snyggas till en aning genom att muliplicera täljaren och nämnaren med en Boltzmannfaktor.

Då $T \to \infty$ går Boltzmannfaktorerna mot 1, så $\langle E \rangle \to \frac{2}{3}\varepsilon$.

(b) Bosoner

Den enda skillnaden jämfört med fermion-fallet är att vi nu måste summera över fler systemtillstånd,

$$Z = e^{-0/kT} + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-0/kT} + e^{-0/kT} + e^{-2\varepsilon/kT} = 3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}. \tag{51}$$

Medelenergin blir

$$\langle E \rangle = \frac{3 \cdot 0e^{-0/kT} + 2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} + 2\varepsilon e^{-2\varepsilon/kT}}{3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}} = 2\varepsilon \frac{1 + e^{-\varepsilon/kT}}{3e^{\varepsilon/kT} + 2 + e^{-\varepsilon/kT}}. \tag{52}$$

För bosoner har vi därför att $\langle E \rangle \to 2\varepsilon\frac{2}{6} = \frac{2}{3}\varepsilon$ då $T \to \infty$.

Notera att i båda fall går $\langle E \rangle$ mot medelenergin av de tillgängliga tillstånden då $T \to \infty$. Detta är förstås inte en slump, utan en konsekvens av att alla tillstånd är lika sannolika vid oändlig temperatur.