Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 22 aug 2017, kl 08.30-13.30 i "Maskin"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Onsdag 6 sep 2017, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. Man kan bestämma koefficienten $\gamma = C_P/C_V$ för en gas genom att studera en odämpad svängningsrörelse orsakad av adiabatiska expansioner och kompressioner av gasen. Betrakta en gas som är innesluten i en vertikal cylinder med hjälp av en fritt rörlig kolv med massan m. Kolvens tvärsnittsarea är A och omgivningens tryck är lika med P_0. När kolven är i jämvikt under inverkan av omgivningens tryck och tyngden av kolven är gasens volym V_0. Kolven förskjuts nu något från jämvikt och börjar oscillera harmoniskt med frekvensen ν. Oscillationerna av kolven är tillräckligt långsamma för att den inneslutna gasen hela tiden är i jämvikt, men tillräckligt snabba så att gasen inte hinner utbyta värme med omgivningen. Gasens variation av tryck och volym är därför adiabatisk. Härled ett uttryck för γ uttryckt i m, g, A, P_0, V_0 och ν! Gasen får behandlas som en klassisk idealgas och g betecknar tyngdaccelerationen.

2. Du har tillgång till en eldriven värmepump och önskar producera varmvatten vintertid med temperaturen $+50\,^\circ$C till ditt fritidshus. I närheten ligger en sjö och du utnyttjar bottenvattnet med temperaturen $+4\,^\circ$C som lågtemperaturreservoar. Antag att värmepumpen arbetar helt idealt. Vad blir verkningskoefficienten, dvs hur mycket värmeenergi kan du tillföra husets varmvatten per förbrukad elektrisk energi? Du ska härleda ditt svar utgående från första och andra huvudsatsen och du ska illustrera energiflöderna i en figur!

3. Betrakta ett system av N lokaliserade partiklar som var och en kan befinna sig i fyra olika energinivåer med energierna 0, ϵ, 2ϵ och 3ϵ. Degenerationsgraden för respektive nivå är 1, 3, 3, och 1. Helmholtz fria energi F kan skrivas på formen

$$F = -\alpha NkT \ln\left[1 + \exp\left(-\epsilon/kT\right)\right] \quad ,$$

där T är temperaturen och k Boltzmanns konstant. Bestäm värdet på konstanten α!

4. Med hjälp av halvledarteknik kan man skapa system där elektronerna begränsas till att röra sig i ett två-dimensionellt plan. Elektronerna bildar då en så kallad två-dimensionell elektrongas (2DEG). Elektronernas energitillstånd ges av uttrycket

$$\varepsilon_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2) \ ; \quad n_x, n_y \in \{1, 2, 3 \ldots\}$$

där m_e är elektronens massa och $A = L^2$ är arean av det tvådimensionella planet. Typiska tätheter för elektronerna i en sådan 2DEG kan vara $n_e = 10^{13}$ elektroner/cm^2.

(a) Bestäm systemets tillståndstäthet $g(\epsilon)$ i energirummet!

(b) Utgående från detta härled ett uttryck för systemets Fermienergi ϵ_F! Vad blir motsvarande värde på Fermitemperaturen T_F i Kelvin med ovanstående värde för elektrontätheten?

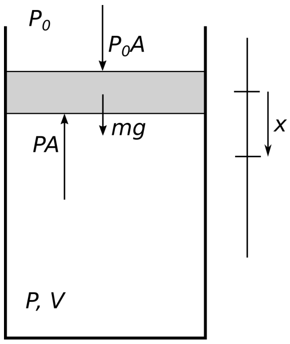
(c) Härled därefter ett uttryck för kemiska potentialens temperaturberoende $\mu(T)$! Visa att $\mu(T = 0) = \epsilon_F$ och att vid höga temperaturer övergår kemiska potentialen i uttrycket för en klassisk idealgas i två dimensioner, $\mu_{cl}(T) = -kT \ln(2/(n_e l_Q^2))$, där $l_Q = h/\sqrt{2\pi m_e kT}$ är termiska deBroglie våglängden!

5. Meteoroider som passerar tillräckligt nära solen kan få så hög temperatur att de smälter. Betrakta en liten meteoroid som består av järn. Uppskatta hur nära solen den måste passera för att smälta? Rimliga approximationer får göras och lämpliga data för solen och järn tas från Physics Handbook.

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Magnus Rahm 2017-08-22

Uppgift 1



Beteckna trycket i jämviktsläget med P_{eq}. Kraftjämvikt i jämviktsläget ger

$$0 = mg + P_0 A - P_{\text{eq}} A. \tag{1}$$

(Observera att kolvens tyngd innebär att trycket i behållaren blir högre än trycket utanför ($P_{\text{eq}} > P_0$.)) När kolven förskjuts en liten sträcka x kommer trycket i behållaren att förändras och en resulterande kraft kommer att accelerera kolven enligt Newtons andra lag,

$$F = m\ddot{x} = mg + P_0 A - PA \tag{2}$$

där P är trycket i behållaren. Vi måste nu ta reda på hur P beror av x innan vi kan lösa differentialekvationen.

Vid en liten förskjutning x fås för volymen

$$V = V_0 - Ax \tag{3}$$

I en adiabatisk process är PV^γ konstant. Alltså har vi

$$P_{\text{eq}} V_0^\gamma = PV^\gamma \tag{4}$$

där vänsterledet motsvarar jämviktstillståndet och högerledet tillståndet vid vilken tidpunkt som helst. Vi löser ut P och sätter in $V_0 - Ax$ istället för V,

$$P = P_{\text{eq}} \left(\frac{V_0}{V_0 - Ax} \right)^\gamma = P_{\text{eq}} \left(\frac{1}{1 - Ax/V_0} \right)^\gamma \approx P_{\text{eq}} \left(1 + \gamma \frac{A}{V_0} x \right). \tag{5}$$

I det sista steget gjordes en Taylorutveckling. Vi sätter in uttrycket i ekv. (2),

$$m\ddot{x} = mg + P_0 A - P_{\text{eq}} \left(1 + \gamma \frac{A}{V_0} x \right) A \tag{6}$$

Vi kan nu utnyttja ekv. (1) för att eliminera alla utom en term till höger,

$$m\ddot{x} = -P_{\mathrm{eq}}\gamma\frac{A^2}{V_0}x \tag{7}$$

vilket vi känner igen som en differentialekvation som styr en harmonisk svängningsrörelse, precis som uppgiften föreskrev (notera att Taylorutveckligen ovan var nödvändig, utan den kommer vi fram till en differentialekvation som vi inte kan lösa för hand, och i vilket fall styr den inte en harmonisk svängningsrörelse). Med ansatsen $x(t) = e^{i\omega t}$ får vi ekvationen

$$-m\omega^2 = -P_{\mathrm{eq}}\gamma\frac{A^2}{V_0} \tag{8}$$

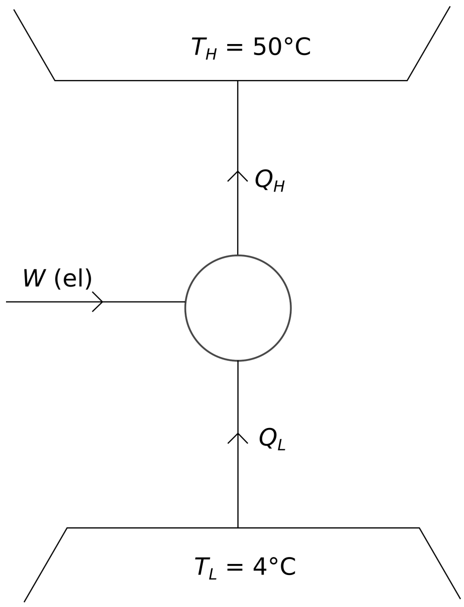
där vi kan lösa ut γ,

$$\gamma = \frac{V_0\omega^2 m}{P_{\mathrm{eq}}A^2}. \tag{9}$$

Med hjälp av ekv. (1) och sambandet $\omega = 2\pi\nu$ finner vi slutligen uttrycket

$$\boxed{\gamma = 4\pi^2\frac{V_0 m\nu^2}{A(P_0A + mg)}.} \tag{10}$$

Uppgift 2



Första huvudsatsen ger

$$W + Q_L = Q_H \tag{11}$$

och andra huvudsatsen

$$-\frac{Q_L}{T_L} + \frac{Q_H}{T_H} \geq 0 \tag{12}$$

men eftersom värmepumpen arbetar idealt gäller likhet. Vi skyfflar om den första ekvationen och sätter sedan in den andra,

$$W = Q_H - Q_L = Q_H \left(1 - \frac{T_L}{T_H}\right). \tag{13}$$

Vi kan nu lösa ut verkningskoefficienten,

$$\beta \equiv \frac{Q_H}{W} = \frac{1}{1 - \frac{T_L}{T_H}} = \frac{T_H}{T_H - T_L} \tag{14}$$

vilket med givna värden ger

$$\boxed{\beta = 7{,}0.} \tag{15}$$

Uppgift 3

Tillståndssumman för N lokaliserade partiklar kan skrivas som en produkt av tillståndssummorna för varje enskild partikel,

$$Z = Z_1^N. \tag{16}$$

(Att partiklarna är lokaliserade betyder att de kan särskiljas, så vi behöver inte dividera med $N!$ eller liknande.) Den kanoniska tillståndssumman för en enskild partikel kan beräknas med hjälp av informationen i uppgiftsbeskrivningen,

$$Z_1 = \sum_n g_n e^{-\beta E_n} = 1 + 3e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} = \left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right)^3. \tag{17}$$

(Sista steget ser man kanske lättast om man sätter $x = e^{-\beta\varepsilon}$ och drar sig till minnes att $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$.)

För Helmholtz fria energi F har vi nu att

$$F = -kT \ln Z = -kTN \ln Z_1 = -3kTN \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right) \tag{18}$$

och vi kan direkt identifiera den okända konstanten

$$\boxed{\alpha = 3.} \tag{19}$$

Uppgift 4

(a)

Tillståndstätheten $g(\varepsilon)$ är den funktion vi använder för att beräkna egenskaper genom integration i energirummet istället för direkt räkning av tillstånd. Vi söker alltså den funktion som gör att vi kan göra ersättningen

$$\sum_{\text{tillstånd}} \dots \quad \rightarrow \quad \int_0^\infty g(\varepsilon) d\varepsilon \dots \tag{20}$$

där prickarna kan utgöra vilken funktion som helst.

Tillstånden ges här av alla par av positiva heltal, n_x, n_y. Dessutom har vi att göra med elektroner, det vill säga partiklar med spinn $1/2$. Summeringen över alla tillstånd kan alltså skrivas

$$\sum_{\text{tillstånd}} \dots \quad = 2 \sum_{n_x, n_y} \dots . \tag{21}$$

Vi approximerar summan med en integral

$$2 \sum_{n_x, n_y} \dots = 2 \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \dots = 2\frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty dn_x \int_{-\infty}^\infty dn_y \dots = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\infty ndn \dots \tag{22}$$

där vi i sista steget gick över till polära koordinater med $n^2 = n_x^2 + n_y^2$. För att ta oss hela vägen till en integral i energirummet måste vi byta ut n mot ε. Givet i uppgiften är

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2 \tag{23}$$

vilket genom derivering ger

$$d\varepsilon = \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 ndn. \tag{24}$$

Vi kan lösa nu ut ndn och göra den önskade substitutionen,

$$\pi \int_0^\infty ndn \dots = L^2 \frac{m_e}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \dots \tag{25}$$

och genom att jämföra med (20) ser vi att

$$\boxed{g(\varepsilon) = A \frac{m_e}{\pi \hbar^2} ; \varepsilon \geq 0} \tag{26}$$

där vi utnyttjade att arean $A = L^2$.

(b)

Fermienergin ε_F kan definieras enligt

$$N_e \equiv \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{27}$$

där N_e är antalet elektroner. Med $g(\varepsilon)$ från (a) får vi direkt

$$N_e = A \frac{m_e}{\pi \hbar^2} \varepsilon_F \tag{28}$$

det vill säga (med $n_e \equiv N_e/A$),

$$\boxed{\varepsilon_F = n_e \frac{\pi \hbar^2}{m_e}} \tag{29}$$

och

$$T_F \equiv \frac{1}{k}\varepsilon_F = n_e \frac{\pi\hbar^2}{km_e}. \tag{30}$$

Med $n_e = 10^{13}\,\mathrm{el/cm^2}$ fås

$$\boxed{T_F = 278\,\mathrm{K}.} \tag{31}$$

(c)

För antal elektroner vid en godtycklig temperatur T har vi

$$N_e = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1} d\varepsilon \tag{32}$$

Notera att

$$g(\varepsilon) = A\frac{m_e}{\pi\hbar^2} = \frac{N_e}{\varepsilon_F}. \tag{33}$$

Vi kan alltså skriva ekv. (32) som

$$\varepsilon_F = \int_0^\infty \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1} d\varepsilon. \tag{34}$$

Vi gör substitutionen $x = \varepsilon/kT$, $d\varepsilon = kT\,dx$,

$$\varepsilon_F = kT\int_0^\infty \frac{1}{e^{-\mu/kT}e^x+1} dx \tag{35}$$

eller omskrivet

$$\frac{\varepsilon_F}{kT} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-\mu/kT}+e^{-x}} dx = \left[-\ln\left(e^{-\mu/kT}+e^{-x}\right)\right]_0^\infty = \ln\left(1+e^{\mu/kT}\right) \tag{36}$$

(Integralen löses lämpligen med hjälp av en titt i Beta, s. 175, nr 324 (upplaga 5).) Vi kan nu lösa ut den kemiska potentialen,

$$\boxed{\mu = kT\ln\left(e^{\varepsilon_F/kT}-1\right).} \tag{37}$$

$\mathbf{T \to 0}$

För små T kan 1:an i logaritmen försummas,

$$\mu(T\to 0) = kT\ln e^{\varepsilon_F/kT} = \varepsilon_F \tag{38}$$

vilket skulle visas.

$\mathbf{T \to \infty}$

För stora T är exponenten liten och vi kan Taylorutveckla exponentialfunktionen,

$$\mu(T\to\infty) = kT\ln\left(1+\frac{\varepsilon_F}{kT}+\ldots-1\right) = -kT\ln\frac{kT}{\varepsilon_F} = -kT\ln\frac{2}{n_e l_Q^2} \tag{39}$$

där

$$l_Q = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e kT}} \tag{40}$$

vilket skulle visas.

Uppgift 5

Solen kan betraktas som en sfärisk svartkropp med radie R_S och yttemperatur T_S. Med hjälp av Stefan-Boltzmanns lag kan vi beräkna den totala utstrålade effekten,

$$P_{\text{tot}} = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4. \tag{41}$$

Vi antar nu en sfärisk meteorid med temperatur T_M, radie R_M på avstånd d från solens *yta*. Meteoriden exponeras bara för en liten andel av den totala utstrålade effekten, nämligen lika stor andel som meteoriden upptar av "himlavalvet" från solen betraktat,

$$P_{M,\text{in}} = \frac{\pi R_M^2}{4\pi(R_s+d)^2} 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \tag{42}$$

Meteoriden strålar också ut värme,

$$P_{M,\text{ut}} = 4\pi R_M^2 \sigma T_M^4. \tag{43}$$

(Observera att utstrålningen sker från meteoridens totala area medan instrålningen bara sker i proportion mot projektionen av den area som vetter mot solen.)

I jämvikt råder effektbalans, $P_{M,\text{in}} = P_{M,\text{ut}}$, det vill säga

$$\frac{\pi R_M^2}{4\pi(R_s+d)^2} 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 = 4\pi R_M^2 \sigma T_M^4 \tag{44}$$

ur vilket vi med lite algebra kan lösa ut meteoridens avstånd från solens yta,

$$d = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_S}{T_M}\right)^2 - 1\right] R_S. \tag{45}$$

I Physics Handbook finner vi följande värden,

$$\begin{aligned} T_S &= 5805\,\text{K} \\ R_S &= 6,96 \cdot 10^8\,\text{m} \\ T_M &= 1808\,\text{K (smältpunkt för Fe)} \end{aligned} \tag{46}$$

vilka insatta i ekv. (45) ger

$$\boxed{d = 2,89 \cdot 10^9\,\text{m},} \tag{47}$$

det vill säga drygt fyra solradier från solens yta.