Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 20 dec 2016, kl 08.30-13.30, Samhällsbyggnad.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Se kurshemsidan.

1. Så kallade högtemperatursupraledare med övergångstemperatur över 77 K har rönt stort intresse då flytande kväve (kokpunkt T=77 K) kan användas för att kyla materialet till det supraledande tillståndet. Någon har påstått att flytande kväve är billigare än mjölk. Stämmer det?

   Antag att man vid atmosfärstryck och rumstemperatur (20 °C) producerar flytande kväve med hjälp av en eldriven kylmaskin som hämtar kvävgas från luften i rummet. Vad blir elkostnaden per kg producerat flytande kväve, om man antar att kylmaskinen är så effektiv som termodynamikens huvudsatser tillåter? Antag att du har tillgång till ren kvävgas vid 20 °C och atmosfärstryck, dvs försumma att luft innehåller en blandning av kvävgas och syrgas. Värmekapaciteten för kvävgas får antas vara vara konstant i hela temperaturområdet och lämpliga data tas från Physics Handbook. Elpriset antas vara 1 krona och 50 öre per kWh och en liter mjölk kostar ca 9 kr. (Dock betalar Arla bara lite drygt 2 kronor för mjölken till bönderna.)

2. Mättad vätska av kylmedlet HFC-134a med temperaturen 45 °C pressas genom en strypventil. Trycket sjunker då till 8.0 bar. Förändras kylmedlets entropi vid denna process? I så fall, med hur mycket? Strypventilen är värmeisolerad från omgivningen och nödvändiga data för kylmedlet HFC-134a tas från bifogade tabeller.

3. Ett fast ämne kan existera i två olika kritallina strukturer, α och β. Vid atmosfärstryck gäller att α-fasen är stabil vid låga temperaturer men övergår i β-fasen vid temperaturen T_0 (K). Vid denna övergång måste värmemängden q (J/kg) tillföras. För båda faserna gäller att värmekapaciteten vid konstant tryck är proportionell mot T^3, men med olika proportionalitetskonstanter. Enligt tredje huvudsatsen gäller också att entropin är lika med noll för båda faserna vid $T = 0$. Bestäm skillnaden i Gibbs fria energi mellan faserna som funktion av temperaturen uttryckt med hjälp av enbart de två parametrarna q och T_0.

4. Ett system har två energinivåer med energiskillnaden 40 meV. Den övre nivån är trefaldigt degenererad medans den undre är icke degenererad. Vid vilken temperatur är sannolikheten lika stor att den övre nivån är besatt som att den undre nivån är besatt?

5. En atomkärna består av ett antal nukleoner; protoner och neutroner. Dessa två partiklar har spinn 1/2 och är därför fermioner. Växelverkan mellan nukleonerna kan approximativt försummas och de kan då behandlas som en Fermigas innesluten i en volym V, atomkärnans storlek. Varje energinivå kan ockuperas av fyra nukleoner, proton eller neutron och med spinn upp eller spinn ned. Atomkärnan kan antas vara sfärisk med radien

$$R = r_0 A^{1/3}$$

där A är antalet nukleoner och $r_0 = 1.25$ fm. Nukleonens massa är $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg. Behandla nukleonerna icke-relativistiskt och bestäm Fermienergin ϵ_F uttryckt i MeV samt motsvarande Fermitemperatur. Är det rimligt att behandla nukleonerna icke-relativistiskt, dvs är $\epsilon_F \ll mc^2$, där c är ljushastigheten?

P (bar)	T (°C)	H_{liquid} (kJ)	H_{gas} (kJ)	S_{liquid} (kJ/K)	S_{gas} (kJ/K)
1.0	−26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	−18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	−10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

Table 4.3. Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at −40°C. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

		Temperature (°C)		
P (bar)		40	50	60
8.0	H (kJ)	274	284	295
	S (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	H (kJ)	269	280	291
	S (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	H (kJ)		276	287
	S (kJ/K)		0.916	0.953

Table 4.4. Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Anders Lindman, 2016-12-15

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

Kylmaskinen kan schematiskt illustreras som ett kylskåp där värme (Q_L) tas från kvävgasen, vars momentana temperatur är T, och dumpas i omgivningen (Q_H) där temperaturen är $T_0 = 293\,\mathrm{K}$. 1:a huvudsatsen ger då

$$Q_\mathrm{H} = W + Q_\mathrm{L}$$

och om vi antar att kylmaskinen är ideal ger 2:a huvudsatsen

$$\frac{Q_\mathrm{H}}{T_0} - \frac{Q_\mathrm{L}}{T} = 0.$$

Kombinerar vi dessa två uttryck får vi följande uttryck för arbetet

$$W = Q_\mathrm{H} - Q_\mathrm{L} = \left(\frac{T_0}{T} - 1\right) Q_\mathrm{L}.$$

Med detta uttryck kan vi nu beräkna det arbete krävs för att först sänka kvävets temperatur från T_0 till $T_\mathrm{K} = 77\,\mathrm{K}$ och sedan kondensera den kylda gasen till vätska. Vi behandlar nedkylningen och kondenseringen separat och betecknar motsvarande arbete med W_1 respektive W_2 så att det totala arbetet som krävs ges av $W = W_1 + W_2$.

Vid nedkylningen gäller att $Q_\mathrm{L} = -CdT$, där C är kvävgasens värmekapacitet, vilket ger

$$W_1 = -C\int_{T_0}^{T_\mathrm{K}} \left(\frac{T_0}{T} - 1\right) dT = C\left[T_0 \ln\frac{T_0}{T_\mathrm{K}} - (T_0 - T_\mathrm{K})\right].$$

Då gasen kondenseras är $Q_\mathrm{L} = L_\mathrm{K}$, där L_K är ångbildningsvärmet, och vi får

$$W_2 = L_\mathrm{K}\left(\frac{T_0}{T_\mathrm{K}} - 1\right).$$

Det totala arbetet blir således

$$W = c\left[T_0 \ln\frac{T_0}{T_\mathrm{K}} - (T_0 - T_\mathrm{K})\right] + L_\mathrm{K}\left(\frac{T_0}{T_\mathrm{K}} - 1\right).$$

För kväve så gäller att $c = 1.04\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}$ och $l_\mathrm{K} = 200\,\mathrm{kJ/kg}$ (Physics Handbook) vilket ger

$$W = 744\,\mathrm{kJ} = 0.207\,\mathrm{kWh}.$$

per kilogram kvävgas. Då priset per kWh är 1.5 kr blir kostnaden 31 öre per kg flytande kväve vilket är betydligt billigare än ett kilo (en liter) mjölk.

Uppgift 2

Då kylmedlet pressas genom strypventilen och då strypventilen är värmeisolerad från omgivningen (Joule-Thompson process) så gäller att entropin ökar

$$\Delta S = S_{\text{ut}} - S_{\text{in}} > 0$$

och entalpin är bevarad

$$H_{\text{in}} = H_{\text{ut}}.$$

Enligt tabell 4.3 så gäller för en mättad vätska vid 45 °C att

$$H_{\text{in}} = 113.9\,\text{kJ} \qquad S_{\text{in}} = 410\,\text{J/K}$$

där dessa värden har bestämts genom att gör en linjär interpolation mellan de två datapunkterna för 39.4 °C och 46.3 °C. Vid utloppet gäller att $P = 8\,\text{bar}$ och från samma tabell får vi då

$$\begin{aligned} H_{\text{ut}}^{\text{vätska}} &= 93\,\text{kJ} \qquad & S_{\text{ut}}^{\text{vätska}} &= 346\,\text{J/K} \\ H_{\text{ut}}^{\text{gas}} &= 264\,\text{kJ} \qquad & S_{\text{ut}}^{\text{gas}} &= 907\,\text{J/K}. \end{aligned}$$

Eftersom entalpin är bevarad ser vi att vi har en blandning av mättad vätska och gas vid utloppet. Om vi betecknar andelen mättad vätska med x så gäller att

$$xH_{\text{ut}}^{\text{vätska}} + (1-x)H_{\text{ut}}^{\text{gas}} = H_{\text{in}}$$

vilket ger

$$x = \frac{H_{\text{ut}}^{\text{gas}} - H_{\text{in}}}{H_{\text{ut}}^{\text{gas}} - H_{\text{ut}}^{\text{vätska}}} = 0.878.$$

Detta ger entropin

$$S_{\text{ut}} = xS_{\text{ut}}^{\text{vätska}} + (1-x)S_{\text{ut}}^{\text{gas}} = 414.6\,\text{J/K}$$

och entropiökningen blir

$$\Delta S = S_{\text{ut}} - S_{\text{in}} = 4.6\,\text{J/K}.$$

Uppgift 3

För det två kristallina faserna har vi att

$$C_P^i = a_i T^3 \quad ; \quad i = \alpha, \beta$$

där a_i är en konstant. Vidare så gäller vid konstant tryck att

$$\Delta H = \int C_P dT$$
$$\Delta S = \int \frac{C_P}{T} dT$$

och

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

Med det givna uttrycket för C_P^i fås

$$H_i(T) = H_i(0) + \int_0^T a_i T^3 dT = H_i(0) + \frac{a_i}{4} T^4$$
$$S_i(T) = S_i(0) + \int_0^T \frac{a_i T^3}{T} dT = \frac{a_i}{3} T^3$$

då $S_i(0) = 0$ enligt tredje huvudsatsen. Detta ger följande uttryck på fria energin

$$G_i(T) = H_i(0) + \frac{a_i}{4} T^4 - \frac{a_i}{3} T^4 = H_i(0) - \frac{a_i}{12} T^4$$

Vi inför nu

$$\Delta G(T) = G_\beta(T) - G_\alpha(T)$$
$$\Delta H(T) = H_\beta(T) - H_\alpha(T)$$

samt betecknar

$$\Delta a = a_\beta - a_\alpha.$$

Detta ger

$$\Delta G(T) = \Delta H(0) - \frac{\Delta a}{12} T^4 \tag{1}$$
$$\Delta H(T) = \Delta H(0) + \frac{\Delta a}{4} T^4. \tag{2}$$

Vid fasomvandlingen $T = T_0$ gäller att

$$\Delta G(T_0) = 0$$
$$\Delta H(T_0) = q.$$

Insättningen av dessa villkor i ekvation (1) och (2) ger

$$\Delta H(0) - \frac{\Delta a}{12} T_0^4 = 0 \tag{3}$$

$$\Delta H(0) + \frac{\Delta a}{4} T_0^4 = q \tag{4}$$

och vi får

$$q = \frac{\Delta a}{3} T_0^4. \tag{5}$$

Vidare så ger insättning av ekvation (3) i ekvation (1)

$$\Delta G(T) = \frac{\Delta a}{12} T_0^4 \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 \right]$$

och tillsammans med ekvation (5) får vi att

$$\Delta G(T) = \frac{q}{4} \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 \right].$$

Uppgift 4

Vi har två energinivåer med $E_1 = E_0$ och $E_2 = E_0 + \Delta E$ där $\Delta E = 40\,\mathrm{meV}$. Vidare så har vi degenerationen $g_1 = 1$ och $g_2 = 3$. Sannolikheten för att ett tillstånd är besatt ges av Boltzmannfördelningen

$$P_i = \frac{g_i e^{-E_i/kT}}{Z}$$

där Z är tillståndssumman. Då sannolikheten är lika stor för bägge energinivåerna så gäller att $P_1 = P_2$ vilket ger

$$1 = 3e^{-\Delta E/kT}$$

och vi får att

$$T = \frac{\Delta E}{k \ln 3} = 423\,\mathrm{K}.$$

Uppgift 5

För icke-relativistiska partiklar gäller att tillståndssumman ges av

$$g(\epsilon) = \gamma 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\sqrt{\epsilon}$$

där γ är degenerationsgraden. I detta fall har vi $\gamma = 4$ och

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A.$$

Fermienergin ges av ekvationen

$$A = \int_0^{\epsilon_\mathrm{F}} g(\epsilon)d\epsilon = \frac{32\pi^2}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} r_0^3 A \int_0^{\epsilon_\mathrm{F}} \sqrt{\epsilon}d\epsilon = \frac{64\pi^2}{9}\left(\frac{2mr_0^2}{h^2}\right)^{3/2} A\epsilon_\mathrm{F}^{3/2}$$

och vi får att

$$\epsilon_\mathrm{F} = \frac{3}{32\pi}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{h^2}{mr_0^2}.$$

Med numeriska värden får vi

$$\epsilon_\mathrm{F} = 4.944 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 30.9\,\mathrm{MeV}$$

och

$$T_\mathrm{F} = \frac{\epsilon_\mathrm{F}}{k} = 3.58 \cdot 10^{11}\,\mathrm{K}.$$

Vi har

$$mc^2 = 1.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 938\,\mathrm{MeV}$$

och således är $\epsilon_\mathrm{F} \ll mc^2$ och det är därmed rimligt att behandla nukleonerna icke-relativistiskt.