Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Torsdag 27 okt 2016, kl 08.30-13.30 i hörsalar på hörsalsvägen.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Torsdag 10 nov 2016, kl 12.15-13.15 i rum FL64.

1. Betrakta en varmluftsballong. När luften i ballongen värms upp börjar den stiga. Lyftkraften ges av Arkimedes princip, dvs kraften ges av tyngden av den undanträngda luftmängden. Bestäm luftens temperatur inuti ballongen då den svävar fram på konstant höjd uppe i luften! Ballongens volym är då 1800 m^3 och den omgivande luftens temperatur och tryck är 10 °C respektive 100 kPa. Ballongkorg med passagerare samt ballongens tyg väger tillsammans 500 kg. Vad väger luften i ballongen då den svävar fram på konstant höjd?

2. En värmemotor drivs av värme från en värmekälla vid temperaturen 700 °C och avger spillvärme till en kylare vid temperaturen 30 °C. Motorns verkningsgrad är 40% och den ger uteffekten 40 kW. Hur mycket entropi produceras per tidsenhet, det vill säga hur mycket ökar entropin per tidsenhet när motorn är igång?

3. Ett system har två energinivåer E_0 och E_1, där $\Delta E \equiv E_1 - E_0 > 0$. Energinivån med den lägre energin är icke degenererad medan den övre är trefaldigt degenererad.

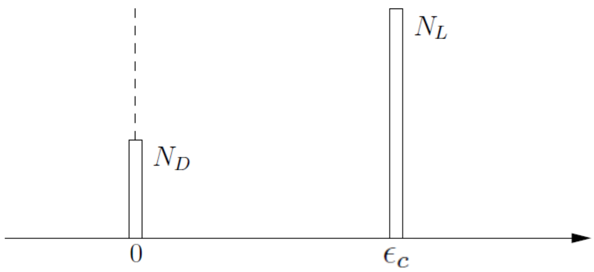
   Bestäm systemets entropi som funktion av temperaturen! Vad blir entropin vid höga temperaturer, då $kT \gg \Delta E$? Ge ditt svar till lägsta ordningen i parametern $\alpha \equiv \Delta E/kT$.

4. Betrakta ett system av icke-växelverkande partiklar i en volym V. Enligt speciella relativitetsteorin gäller att relationen mellan partikelns energi ϵ och dess rörelsemängd p ges av uttrycket

$$\epsilon^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

där m är partikelns (vilo-)massa och c ljushastigheten. Notera att ϵ är partikelns totala energi, inklusive energin mc^2. Som vanligt gäller att partikelns tillstånd ges av en uppsättning av diskreta värden beroende på att den rör sig i en begränsad volym V. Utgå från detta och härled ett uttryck för tillståndstätheten $g(\epsilon)$, där $g(\epsilon)d\epsilon$ är lika med antal tillstånd med energi i intervallet $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$. Beteckna antalet inre frihetsgrader (spinn) för partikeln med γ.

5. Nedanstående figur illustrerar en mycket förenklad modell för elektrontillstånden för en halvledare. Modellen består av N_D tillstånd med energin $\epsilon = 0$ och N_L tillstånd med energin $\epsilon = \epsilon_c$. Den nedre nivån representerar donatortillstånd ("D") och den övre tillstånden i ledningsbandet ("L").



Systemet innehåller totalt $N = N_D$ elektroner. Vid temperaturen $T = 0$ kommer då samtliga N_D tillstånd vara fyllda medan alla N_L tillstånd är tomma. Vid en ändlig temperatur blir vissa av N_L tillstånden fyllda men fortfarande gäller att totala antalet elektroner är $N = N_D$. Härled ett explicit uttryck på kemiska potentialen $\mu(T)$ för systemet som funktion av temperaturen T.

Studera nu låga temperaturer, då $kT \ll \epsilon_c$. Antag att antalet donatortillstånd är $N_D = 10^{-4} N_L$. Bestäm kemiska potentialen $\mu(T)$ som funktion av temperaturen. Vad blir värdet på Fermienergin? Bestäm också antalet elektroner i ledningsbandet i denna gräns!

Chalmers
Institutionen för Fysik
Anders Lindman, Erik Jedvik, 2016-10-31

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

Arkimedes princip säger att lyftkraften ges av tyngden av den undanträngda luftmängden. Eftersom ballongen svävar på konstant höjd betyder det att lyftkraften är lika med tyngden av ballongens massa inklusive massan för den gas som fyller ballongen, dvs

$$m_{\mathrm{u}}g = m_{\mathrm{v}}g + m_{\mathrm{b}}g$$

där m_{u} är massan av den undanträngda luften, m_{v} är massan av den varma luften som fyller ballongen och m_{b} är massan av ballongens korg, inklusive passagerare, samt ballongens tyg. Tyngdaccelerationen betecknas med g och kan förkortas bort.

Givet är att omgivningens tryck är $P_0 = 100$ kPa och dess temperatur är $T_0 = 10\,^\circ\mathrm{C} = 283\,\mathrm{K}$. Ballongens volym är $V_0 = 1800$ m^3 och massan $m_{\mathrm{b}} = 500$ kg.

Luft består till 20% av syre med molmassan 32 g/mol och till 80% av kväve med molmassan 28 g/mol. Det betyder att molmassan (M) för luft blir $0.8 \cdot 28\,\mathrm{g/mol} + 0.2 \cdot 32\,\mathrm{g/mol} = 28.8\,\mathrm{g/mol}$. Mängden (i mol) av en substans ges av $n = (m/M)$ där m är massan och M är molmassan. Vi antar att luften kan behandlas som en idealgas med $PV = nRT$, dvs

$$m = \frac{PV}{RT}M$$

För den undanträngda luften gäller att $P = P_0$, $T = T_0$ samt $V = V_0$. Den varma luften i ballongen har samma tryck som omgivningen $P = P_0$ (ballongen är öppen nedtill), dess volym är V_0 och vi betecknar dess temperatur med T_{v}, som då måste vara högre än T_0. Med hjälp av ekvationerna ovan får vi då sambandet

$$\frac{P_0V_0}{RT_0}M = \frac{P_0V_0}{RT_{\mathrm{v}}}M + m_b$$

och

$$T_{\mathrm{v}} = \left[\frac{1}{T_0} - \frac{m_bR}{P_0V_0M}\right]^{-1} = 366\,\mathrm{K} = 93\,^\circ\mathrm{C}$$

Massan för den varma luften i ballongen är således

$$m_{\mathrm{v}} = \frac{P_0V_0}{RT_{\mathrm{v}}}M = 1.70 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$$

Uppgift 2

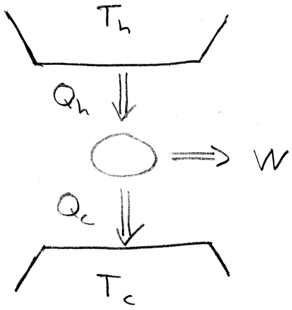
Med positiva riktningar definierade enligt figuren kan den första huvudsatsen skrivas som

$$\dot{Q}_h = \dot{W} + \dot{Q}_c$$

där punkten över symbolerna indikerar att storheten är per tidsenhet. Entropiproduktionen ges av andra huvudsatsen

$$\Delta \dot{S}_{\text{tot}} = -\frac{\dot{Q}_h}{T_h} + \frac{\dot{Q}_c}{T_c}$$

där $T_h = 700\,^\circ\text{C} = 973\,\text{K}$ och $T_c = 30\,^\circ\text{C} = 303\,\text{K}$.



Motorns uteffekt är $\dot{W} = 40$ kW och dess verkningsgrad $\eta = 40\%$. Verkningsgraden definieras av

$$\eta = \frac{W}{Q_h}$$

dvs

$$\dot{Q}_h = \eta^{-1}\dot{W} = 100 \text{ kW}$$

Med första huvudsatsen fås

$$\dot{Q}_c = \dot{Q}_h - \dot{W} = 60 \text{ kW}$$

och insatt i andra huvudsatsen ger entropiproduktionen per tidsenhet

$$\Delta \dot{S}_{\text{tot}} = -\frac{\dot{Q}_h}{T_h} + \frac{\dot{Q}_c}{T_c} = 95 \text{ W/K}$$

Uppgift 3

Systemets tillståndssumma blir

$$Z = e^{-E_0/kT} + 3e^{-E_1/kT} = e^{-E_0/kT}(1 + 3e^{-\beta\Delta E})$$

där $\Delta E = E_1 - E_0$ och siffran 3 kommer av att det övre tillståndet är trefaldigt degenererat. Den fria energin blir då

$$F = -kT \ln Z = E_0 - kT \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right)$$

och entropin

$$\begin{aligned}
S = -\frac{\partial F}{\partial T} &= k \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) + kT \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) \\
&= k \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) + kT \frac{d\beta}{dT} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) \\
&= k \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) - k\beta \frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) \\
&= k \ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) + k \frac{3\beta\Delta E e^{-\beta\Delta E}}{1 + 3e^{-\beta\Delta E}}
\end{aligned}$$

dvs

$$\begin{aligned}
S &= k\left[\ln\left(1 + 3e^{-\beta\Delta E}\right) + \frac{3\beta\Delta E}{3 + e^{\beta\Delta E}}\right] \\
&= k\left[\ln\left(1 + 3e^{-\Delta E/kT}\right) + \frac{3(\Delta E/kT)}{3 + e^{\Delta E/kT}}\right]
\end{aligned}$$

Vi ser att då $T \to 0$ ($\beta \to \infty$) så $S \to k \ln 1 = 0$, vilket stämmer då bara det lägsta tillståndet är tillgängligt. Vi ser också att då $T \to \infty$ ($\beta \to 0$) så $S \to k \ln 4$, vilket också stämmer eftersom alla fyra tillstånden är då lika sannolika.

Vi studerar nu höga temperaturer, $kT \gg \Delta E$. Vi inför parametern $\alpha \equiv (\Delta E/kT) \ll 1$ och

Taylorutvecklar S/k i α.

$$
\begin{aligned}
S/k &= \ln\left(1+3e^{-\alpha}\right) + \frac{3\alpha}{3+e^{\alpha}} \\
&= \ln\left(1+3\left(1-\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right)\right) + \frac{3\alpha}{3+1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)} \\
&= \ln\left(4\cdot\left(1-\tfrac{3}{4}\alpha+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right)\right) + \frac{3\alpha}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)} \\
&= \ln 4 + \ln\left(1-\tfrac{3}{4}\alpha+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right) + \frac{3\alpha}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)} \\
&= \ln 4 + \left(-\tfrac{3}{4}\alpha+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right) - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{3}{4}\alpha+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\alpha^3\right) \\
&\quad + \frac{3\alpha}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right)+\left(\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right)^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)\right) \\
&= \ln 4 - \tfrac{3}{4}\alpha + \tfrac{3}{8}\alpha^2 - \tfrac{9}{32}\alpha^2 + \tfrac{3}{4}\alpha - \tfrac{3}{16}\alpha^2 + \mathcal{O}\left(\alpha^3\right) \\
&= \ln 4 - \tfrac{3}{32}\alpha^2 + \mathcal{O}\left(\alpha^3\right)
\end{aligned}
$$

Vi noterar att man måste utveckla till andra ordningen i parametern α eftersom första ordningens term blir noll.

Uppgift 4

Våglängden för en partikel ges av

$$n\frac{\lambda}{2} = L \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i varje riktning. Med de Broglie-relationen fås

$$p_{n_\alpha} = \frac{h}{2L} n_\alpha \quad n_\alpha = 1, 2, \ldots \quad \alpha = x, y, z.$$

Vi vill nu införa en tillståndstäthet $g(\epsilon)$ enligt

$$\sum_s F(\epsilon_s) \longrightarrow \int g(\epsilon) d\epsilon F(\epsilon)$$

där $F(\epsilon)$ är en godtycklig funktion och s anger de tillåtna tillstånden, dvs

$$\begin{aligned} \sum_s \ldots &= \gamma \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \ldots \longrightarrow \gamma \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z \ldots \\ &= \gamma \frac{\pi}{2} \int_0^\infty n^2 dn \ldots = \gamma \frac{\pi}{2} \left(\frac{2L}{h}\right)^3 \int_0^\infty p^2 dp \ldots \end{aligned}$$

Vi har relationen

$$\epsilon^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$$

vilket ger

$$2\epsilon d\epsilon = c^2 2p dp$$

samt

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{\epsilon^2 - (mc^2)^2}.$$

Vi får då

$$\begin{aligned} \sum_s \ldots &\longrightarrow \gamma \frac{\pi}{2} \left(\frac{2L}{h}\right)^3 \int_{mc^2}^\infty \frac{1}{c}\sqrt{\epsilon^2 - (mc^2)^2}\, \frac{1}{c^2} \epsilon d\epsilon \ldots \\ &= \gamma \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{hc}\right)^3 V \int_{mc^2}^\infty \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - (mc^2)^2} d\epsilon \ldots \end{aligned}$$

Således ges tillståndstätheten av

$$g(\epsilon) = \gamma \frac{4\pi}{(hc)^3} V \cdot \begin{cases} \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - (mc^2)^2} & ; \quad \epsilon > mc^2 \\ 0 & ; \quad \epsilon < mc^2 \end{cases}$$

Uppgift 5

Elektronerna är fermioner och följer därav Fermi-Dirac-fördelningen

$$\bar{n}_{\mathrm{FD}}(\epsilon_s) = \frac{1}{e^{(\epsilon_s-\mu)/kT}+1}.$$

Antalet elektroner är $N = N_D$ och då vi har N_D tillstånd med $\epsilon_s = 0$ samt N_L tillstånd med $\epsilon_s = \epsilon_c$ får vi

$$N_D = \sum_s \bar{n}_{\mathrm{FD}}(\epsilon_s) = \frac{N_D}{e^{-\mu/kT}+1} + \frac{N_L}{e^{(\epsilon_c-\mu)/kT}+1}$$

För att förenkla proceduren att lösa ut μ inför vi följande notation

$$\begin{aligned}\lambda &= e^{\mu/kT} > 0\\ \alpha &= e^{\epsilon_c/kT} > 0\\ \beta &= N_L/N_D > 0\end{aligned}$$

vilket ger

$$1 = \frac{1}{\lambda^{-1}+1} + \frac{\beta}{\alpha\lambda^{-1}+1}.$$

Detta uttryck kan skrivas som en andragradsekvation

$$\lambda^2 + \frac{\beta-1}{\beta}\lambda - \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

som har lösningarna

$$\lambda = -\frac{\beta-1}{2\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Då $\lambda > 0$ är enbart den positiva lösningen giltig och vi får

$$\mu(T) = kT\ln\left(\sqrt{\frac{N_D}{N_L}e^{\epsilon_c/kT} + \left(\frac{N_L-N_D}{2N_L}\right)^2} - \frac{N_L-N_D}{2N_L}\right).$$

Antag nu att $kT \ll \epsilon_c$ samt $N_D = 10^{-4}N_L$. Vi kan då förenkla uttrycket för $\mu(T)$ enligt

$$\begin{aligned}\mu(T) &\simeq kT\ln\left(\sqrt{10^{-4}e^{\epsilon_c/kT}} - \frac{1}{2}\right) \simeq kT\ln\sqrt{10^{-4}e^{\epsilon_c/kT}}\\ &= \frac{kT}{2}\left(\ln 10^{-4} + \frac{\epsilon_c}{kT}\right) = \frac{\epsilon_c}{2} - 2kT\ln 10 \simeq \frac{\epsilon_c}{2} - 4.6kT.\end{aligned}$$

Fermienergin ges då av

$$\epsilon_{\mathrm{F}} \equiv \mu(T=0) = \frac{\epsilon_c}{2}.$$

Slutligen så kan vi med uttrycket för $\mu(T)$ bestämma antalet elektroner i ledningsbandet enligt

$$\begin{aligned}N_{\mathrm{e}} &= \frac{N_L}{e^{(\epsilon_c-\mu)/kT}+1} \simeq \frac{N_L}{e^{(\epsilon_c-\epsilon_c/2+2kT\ln 10)/kT}+1} = \frac{N_L}{100e^{\epsilon_c/2kT}+1}\\ &\simeq N_L 10^{-2}e^{-\epsilon_c/2kT} = 100N_D e^{-\epsilon_c/2kT}.\end{aligned}$$