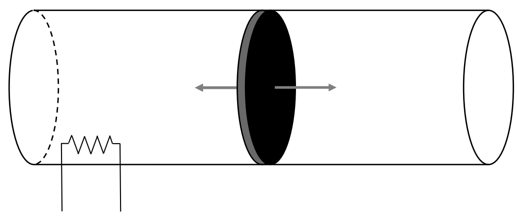
Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 23 aug 2016, kl 08.30-13.30 i SB-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Onsdag 7 sep 2016, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. Heliumgas är instängd i en cylindrisk behållare (se figur). Med hjälp av en kolv är behållaren uppdelad i två delar. Varje del innehåller n_0 mol heliumgas. Kolven är tättslutande men lättrörlig, dvs den rör sig friktionsfritt. Både cylindern och kolven är värmeisolerade, och varken cylinderns väggar eller kolven släpper igenom någon värmeenergi. Från början är kolvens läge i mitten av cylindern och heliumgasen i de båda delarna har samma tryck P_0, samma volym V_0 och samma temperatur T_0. Med hjälp av ett elektriskt motstånd i den vänstra delen hettas därefter gasen upp i denna del tills dess tryck är $2P_0$. Beräkna sluttryck, slutvolym och sluttemperatur för gasen i både den vänstra och den högra delen! Heliumgasen får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. Hur mycket elektrisk energi tillfördes vid denna process?



2. Betrakta två metallstycken, A och B. Metallstyckerna består av samma material med värmekapacitiviteten c, men massan för A är 3 gånger större, $m_A = 3m$ och $m_B = m$. Initialt är B's temperaturen 3 gånger högre än A's, $T_A = T_0$ och $T_B = 3T_0$. Metallstyckerna bringas i termisk kontakt med varandra. Vad blir totala entropiändringen då jämvikt har inställt sig? Svaret får innehålla variablerna m och c men ej T_A, T_B och T_0. Från ditt svar ska det klart framgå tecknet på entropiändringen.

3. Ett system har energinivåerna

$$E_n = n\Delta\epsilon \quad n = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

där $\Delta\epsilon = 50$ meV. Notera att n antar alla positiva heltal, förutom 3 och 6. Hur stor är sannolikheten att nivån n=2 är besatt om systemet är i termisk kontakt med en värmereservoar med temperaturen 300 K?

4. Studera en harmoniskt bunden partikel med massan m som rör sig i en dimension. Potentiella energin ges då av uttrycket

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

där ω är vinkelfrekvensen och x förskjutningen från jämviktsläget. Om systemet är i kontakt med en värmereservoar med temperaturen T så gäller i den klassiska gränsen att partikelns medelenergi U är propotionell mot temperaturen

$$U = kT$$

där k är Boltzmann's konstant. Detta följer av ekvipartitionsteoremet. Värmekapaciteten blir då konstant,

$$C \equiv \frac{dU}{dT} = k$$

oberoende av temperaturen. Vi lägger nu till en anharmonicitet till potentiella energin

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

Bestäm systemets medelenergi U och värmekapacitet C i den klassiska gränsen under antagandet att anharmoniciteten är liten

$$kT \ll m\omega^2 a^2$$

I den klassiska gränsen gäller att tillståndssumman

$$Z = \sum_n \exp\left[-\beta E_n\right]$$

där $\beta = 1/kT$, kan skrivas på formen

$$Z_{cl} = \int \frac{dxdp}{h} \exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right]$$

Serieutveckla till lägsta ordningen i den lilla parametern

$$\alpha \equiv \frac{kT}{m\omega^2 a^2} \ll 1$$

och utnyttja att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2[1+\varepsilon]}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-\varepsilon x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[1 - \varepsilon x^2 + \ldots]dx$$

där ε är liten.

5. En tre-dimensionell harmonisk oscillator kan betraktas som ett system av tre oberoende en-dimensionella oscillatorer. För en isotrop tre-dimensionell oscillator gäller dessutom att vinkelfrekvensen är densamma i alla tre riktningarna. Energinivåerna för en isotrop tre-dimensionell oscillator kan därför skrivas som

$$\epsilon_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Bestäm degenerationsgraden g_n för dessa energinivåer.

Lösningar till omtenta i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tisdag den 23/8 2016

1. Från början gäller att tryck, volym och temperatur för varje del är P_0, V_0 och T_0. Mängden gas i varje del är n_0 och förblir konstant genom processen. Beteckna motsvarande storheter vid sluttillståndet med P_V, V_V, T_V, P_H, V_H och T_H, där index $V(H)$ står för vänster (höger). För helium (en-atomig idealgas) gäller att

$$
\begin{aligned}
U &= \tfrac{3}{2}nRT \\
C_V &= \tfrac{3}{2}nR \\
C_P &= C_V + nR = \tfrac{5}{2}nR \\
\gamma &= \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Sluttrycket i vänster kammare är: $P_V = 2P_0$.

Eftersom kolven rör sig friktionslöst kommer trycket att hela tiden vara samma i de båda kamrarna. Sluttrycket i den högra kammaren blir då också: $P_H = 2P_0$. Eftersom inget värme utbyts varken mellan kamrarna eller med omgivningen genomgår den högra kammaren en adiabatisk kompression. För denna process gäller att $PV^\gamma =$ konstant, dvs

$$
\begin{aligned}
P_0 V_0^\gamma &= P_H V_H^\gamma \\
P_0 V_0^\gamma &= 2P_0 V_H^\gamma \\
V_H &= 2^{-1/\gamma} V_0 \approx 0.66\, V_0
\end{aligned}
$$

Eftersom den totala volymen är konstant, lika med $2V_0$, är

$$V_V = 2V_0 - V_H = (2 - 2^{-1/\gamma})\, V_0 \approx 1.34\, V_0$$

Återstår att bestämma sluttemperaturerna. Eftersom antal mol inte ändras medför ideala gaslagen att $PV/T =$ konstant för varje kammare, dvs

$$
\begin{aligned}
\frac{P_0 V_0}{T_0} &= \frac{P_H V_H}{T_H} \\
T_H &= \frac{P_H V_H}{P_0 V_0} T_0 = \frac{2P_0 2^{-1/\gamma} V_0}{P_0 V_0} T_0 = 2^{1-1/\gamma} T_0 \approx 1.32\, T_0
\end{aligned}
$$

och

$$T_V = \frac{P_V V_V}{P_0 V_0} T_0 = 2(2 - 2^{-1/\gamma}) T_0 \approx 2.68\, T_0$$

Eftersom systemet är isolerat mot omgivningen kommer den tillförda elektriska energin vara lika med ökningen av den inre energin för totala systemet. Före processen har vi för de båda kamrarna tillsammans

$$U_f = \tfrac{3}{2} n_0 R T_0 + \tfrac{3}{2} n_0 R T_0 = 3 n_0 R T_0$$

Efter processen har temperaturen stigit och

$$U_e = \tfrac{3}{2} n_0 R T_V + \tfrac{3}{2} n_0 R T_H = \tfrac{3}{2} n_0 R \left[2(2 - 2^{-1/\gamma}) + 2^{1-1/\gamma} \right] T_0 = 6 n_0 R T_0$$

Den tillförda elektriska energin blir därför

$$W_{el} = U_e - U_f = 6 n_0 R T_0 - 3 n_0 R T_0 = 3 n_0 R T_0$$

<u>Svar:</u>

$$\begin{array}{ll} P_A = 2\, P_0 & P_B = 2\, P_0 \\ V_A = 1.34\ V_0 & V_B = 0.66\ V_0 \\ T_A = 2.68\ T_0 & T_B = 1.32\ T_0 \\ W_{el} = 3\, n_0 R T_0 & \end{array}$$

2. När jämvikt har inställt sig har de två metallstyckerna erhållit samma temperatur. Vi betecknar denna med T_S. Energiändringen i de två olika styckerna blir då

$$\Delta U_A = \int_{T_A}^{T_S} C_A \,\mathrm{d}T = C_A (T_S - T_A) = 3cm(T_S - T_0)$$

$$\Delta U_B = \int_{T_B}^{T_S} C_B \,\mathrm{d}T = C_B (T_S - T_B) = cm(T_S - 3T_0)$$

och totala energiändringen

$$\Delta U_{\text{tot}} = \Delta U_A + \Delta U_B = 3cm(T_S - T_0) + cm(T_S - 3T_0) = cm(4T_S - 6T_0)$$

Första huvudsatsen, energikonservering, ger att

$$\Delta U_{\text{tot}} = 0$$

dvs

$$T_S = \frac{3}{2} T_0$$

Motsvarande entropiändringar är

$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_S} \frac{C_A \, \mathrm{d}T}{T} = C_A \ln \frac{T_S}{T_A} = 3cm \ln \frac{T_S}{T_0} = 3cm \ln \frac{3}{2} = cm \ln \frac{27}{8}$$

$$\Delta S_B = \int_{T_B}^{T_S} \frac{C_B \, \mathrm{d}T}{T} = C_B \ln \frac{T_S}{T_B} = cm \ln \frac{T_S}{3T_0} = cm \ln \frac{1}{2}$$

och den totala entropiändringen blir

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_A + \Delta S_B = cm \ln \frac{27}{8} + cm \ln \frac{1}{2} = cm \ln \frac{27}{16}$$

Vi noterar att $\Delta S_A > 0$, $\Delta S_B < 0$ och att $\Delta S_{\text{tot}} > 0$, helt i enlighet med andra huvudsatsen.

Svar: Totala entropiändringen blir $\Delta S_{\text{tot}} = cm \ln \frac{27}{16}$. $\Delta S_{\text{tot}} > 0$, i enlighet med andra huvudsatsen.

3. Sannolikheten för att ett tillstånd ska vara ockuperat ges av

$$P_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{Z} = \frac{e^{-n\Delta\epsilon/kT}}{Z}$$

där

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\Delta\epsilon/kT} - e^{-3\Delta\epsilon/kT} - e^{-6\Delta\epsilon/kT} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\Delta\epsilon/kT} - 1 - e^{-3\Delta\epsilon/kT} - e^{-6\Delta\epsilon/kT} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-n\Delta\epsilon/kT}} - 1 - e^{-3\Delta\epsilon/kT} - e^{-6\Delta\epsilon/kT} \\ &= \frac{1}{1-x} - 1 - x^3 - x^6 \end{aligned}$$

och där $x = e^{-\Delta\varepsilon/kT}$. Sannolikheten P_n ges därför av

$$P_n = \frac{x^n}{Z} = \frac{x^n(1-x)}{1-(1-x)(1+x^3+x^6)} = \frac{x^{n-1}(1-x)}{1-x^2+x^3-x^5+x^6}$$

Vi noterar att för små x gäller att $P_n \approx x^{n-1}$.

Med $\Delta\epsilon = 50$ meV och $T = 300$ K fås $x = 0.1446$ och $P_2 = 0.1259$.

Svar: $P_2 = 12.6$ %

4. Vi ska studera ett system som beskrivs av en anharmonisk potential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

där

$$\alpha \equiv \frac{kT}{m\omega^2 a^2} \ll 1$$

Klassiska tillståndssumman ges av

$$\begin{aligned} Z_{cl} &= \int \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p}{h} e^{-\beta\left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right]} \\ &= \frac{1}{h}\int dp\; e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} \int dx\; e^{-\beta\frac{m\omega^2 x^2}{2}\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

där $\beta = 1/kT$. Om vi inför $u \equiv \sqrt{(\beta/2m)}\, p$ och $v \equiv \sqrt{(\beta m\omega^2/2)}\, x$ fås att

$$Z_{cl} = \frac{kT}{\hbar\omega}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\; e^{-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv\; e^{-v^2\left[1+2v^2\alpha\right]}$$

Enligt tentamenstesen kan den andra integralen serieutvecklas och med hjälp av Beta för de gaussiska integralerna erhålls då

$$\begin{aligned} Z_{cl} &= \frac{kT}{\hbar\omega}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\; e^{-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv\; e^{-v^2}\left[1 - 2v^4\alpha + 2v^8\alpha^2 + \ldots\right] \\ &= \frac{kT}{\hbar\omega}\left[1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{105}{8}\alpha^2 + \ldots\right] \end{aligned}$$

Vi vill nu bestämma systemets medelenergi

$$U = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \frac{kT^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T}$$

I vårt fall beror Z enbart av T,

$$Z_{cl}(T) = \frac{kT}{\hbar\omega}\left[1 - \frac{3}{2}\alpha(T) + \frac{105}{8}\alpha^2(T) + \ldots\right]$$

Vi utvecklar nu $U(T)$ till lägsta ordningen i $\alpha(T)$

$$\begin{aligned} U(T) &= \frac{kT^2}{Z_{cl}(T)} \left\{ \frac{k}{\hbar\omega} \left[1 - \frac{3}{2}\alpha(T) + \ldots \right] + \frac{kT}{\hbar\omega} \left[-\frac{3}{2}\frac{\alpha(T)}{T} + \ldots \right] \right\} \\ &= kT \frac{1 - 3\alpha(T) + \ldots}{1 - \frac{3}{2}\alpha(T) + \ldots} = kT \left[1 - \frac{3}{2}\alpha(T) + \ldots \right] \end{aligned}$$

På motsvarande sätt ges värmekapaciteten av

$$\begin{aligned} C(T) &= \frac{dU}{dT} = k \left[1 - \frac{3}{2}\alpha(T) + \ldots \right] + kT \left[-\frac{3}{2}\frac{\alpha(T)}{T} + \ldots \right] \\ &= k \left[1 - 3\alpha(T) + \ldots \right] \end{aligned}$$

Vi noterar också att gränsvärdet för U och C stämmer då $\alpha \to 0$.

Svar: Systemets medelenergi och värmekapacitet blir

$$\begin{aligned} U(T) &= kT \left[1 - \frac{3kT}{2m\omega^2 a^2} \right] \\ C(T) &= k \left[1 - \frac{3kT}{m\omega^2 a^2} \right] \end{aligned}$$

5. Den tre-dimensionella isotropa oscillatorn kan betraktas som ett system av tre oberoende Einstein oscillatorer; 1, 2, och 3, med samma frekvens. Vi kan därför följa kursbokens härledning av multipliciteten för N oberoende Einstein oscillatorer.

   Degenerationsgraden g_n är lika med antal olika sätt, antal mikrotillstånd, som systemet kan befinna sig i om det har n energikvanta. Detta antal kallas också för multipliciteten.

   För att representera ett mikrotillstånd visualiseras varje energikvantum av symbolen $\bullet$ och för att skilja de olika oscillatorerna åt används symbolen $|$. Ett specifikt mikrotillstånd med t.ex. $n = 7$ energikvanta fördelat på tre oscillatorer kan då symboliskt representeras av sekvensen

$$\bullet\bullet \,|\, \bullet\bullet\bullet\bullet \,|\, \bullet$$

   Denna sekvens beskriver ett mikrotillstånd med $n_1 = 2$ energikvanta för oscillatorn i riktning 1, $n_2 = 4$ för oscillatorn i riktning 2, och $n_3 = 1$ för oscillatorn i riktning 3. Notera att för tre oscillatorer behövs bara två avgränsningar ($|$). Notera också att varje mikrostillstånd kan representeras på detta sätt och att representationen är unik och fullständig.

Vi behöver nu bestämma hur många olika mikrostillstånd det finns med $n = n_1 + n_2 + n_3$ energikvanta, dvs g_n. Vi har n energikvanta ($\bullet$) och två avgräsningar ($|$) som ska fördelas på n+2 platser. Den första avgränsningen kan placeras på n+2 olika platser och nästa på n+1 platser. Avgränsningarna är identiska och vi behöver därför dela med 2, dvs $(n+2)(n+1)/2$ antal sätt. Därefter ska vi placera ut n energikvanta på n platser. Även energikvanta är identiska så utplacering av n energikvanta på n platser kan bara göras på ett sätt, dvs

Svar:

$$g_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$