Chalmers
Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

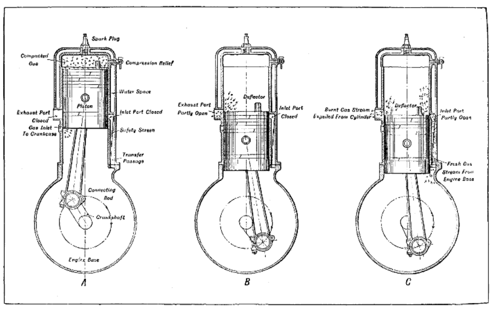
Tid och plats: Måndag 4 jan 2016, kl 08.30-13.30 i ”Maskin”-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Onsdag 20 jan 2016, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. Trycket i en viss ballong är lika med omgivningens tryck P_0=100 kPa så länge som volymen är mindre än V_0=20 m^3. Då volymen blir större än V_0 är trycket inuti ballongen givet av uttrycket

$$P = P_0 + c(V - V_0)^2$$

där c är en konstant. Antag att ballongen innehåller heliumgas med begynnelsevärderna 20 °C, 100 kPa och 15 m^3 för temperatur, tryck respektive volym. Ballongen värms därefter upp till temperaturen 400 °C och trycket inuti ballongen ökar då till 150 kPa. Beräkna numeriskt det uträttade arbetet av den inneslutna gasen samt det tillförda värmet! Helium får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet.

2. 1860 patenterade den belgiske ingenjören Jean Joseph Etienne Lenoir en förbräningsmotor baserad på följande princip. En bränsle-luft blandning injiceras och förbränns vid konstant volym. Den inneslutna gasen expanderar därefter adiabatiskt och arbete tas ut. Slutligen minskas volymen till utgångsläget och avgaserna avlägsnas. Denna motor anses vara den första kommersiella motor baserad på inre förbränning.



Processen kan approximeras med den s.k. Lenoir-cykeln, som består av tre delar: (1 → 2) värmetillförsel vid konstant volym, (2 → 3) adiabatisk expansion, samt ($3 \rightarrow 1$) avkylning vid konstant tryck. Bestäm verkningsgraden som funktion av kompressionsförhållandet r, där r är kvoten mellan den största och minsta volymen! Verkningsgraden definieras som det arbete som maskinen kan leverera delat med värmet som erhålls vid förbränningen. Antag att bränsle-luft blandningen kan approximeras med en fix mängd luft, dvs mängden luft som genomgår processen är konstant (processerna då bränslet injiceras och då avgaserna strömmar ut försummas). Luften får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet och alla ingående processer får behandlas som kvasistatiska. Vad blir verkningsgraden numeriskt om kompressionsförhållandet är r=6?

3. Tenn är ett grundämne med kemiska beteckningen Sn. Den kristalliseras i två olika former. Vid låga temperaturer är sprött, grått tenn (α-fas), termodynamiskt stabilt. Det är en elektrisk halvledare med diamantstruktur och med relativt låg täthet, 5,73 g/cm^3. Om man höjer temperaturen vid atmosfärstryck (100 kPa) så sker en fasomvandling till vitt tenn (β-fas) vid 13,2 °C. Vid denna omvandling måste man tillföra 2,1 kJ/mol. Vitt tenn är en metallisk ledare och med högre täthet, 7,29 g/cm^3. Vad blir fasomvandlingstemperaturen om man ökar trycket till 10 MPa? Det får antas att omvandlingsvärmet och tätheterna är temperatur- och tryck-obereoende.

4. Ett kvantmekaniskt system har ett begränsat antal energinivåer

$$E_n = n\epsilon \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

där ϵ är en konstant med dimension energi. Antag att systemet är i jämvikt med en reservoar vid temperaturen T. Bestäm systemets tillståndssumma! Vid höga temperaturer, $kT \gg \epsilon$, kan systemets medelenergi skrivas på formen

$$\langle E \rangle = \frac{N}{2}\epsilon \left\{ 1 - \alpha \frac{\epsilon}{kT} + \ldots \right\}$$

där α är en numerisk konstant som beror av N. Bestäm α! Då $T \rightarrow \infty$ blir medelenergin $\langle E \rangle = (N/2)\epsilon$. Varför (ge en fysikalisk förklaring)?

5. Jorden har två värmekällor, dels mottar den strålning från solen och dels värms den upp av radioaktiva processer i jordens inre. Antag följande förenklade bild. Om den enda värmekällan var solstrålningen så skulle jordytans medeltemperatur vara 300 K, men om vi istället antar att enda värmekällan är de radioaktiva processerna så skulle medeltemperatur vara 100 K. Vad blir då jordytans medeltemperatur om man tar hänsyn till båda värmekällorna? Behandla jorden som en svartkroppsstrålare och bortse från atmosfärens inverkan.

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Anders Lindman, 2015-12-22

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

Arbetet som gasen uträttar på omgivningen ges av

$$W = \int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} P(V)\, dV.$$

där indexen i och f betecknar begynnelse- och sluttillstånd. Då vi har två olika uttryck för trycket och $V_\mathrm{i} < V_0$ behöver vi ta reda på ifall V_f är större eller mindre än V_0 för att kunna beräkna arbetet. Då antalet partiklar i gasen N är konstant kan vi med hjälp av ideala gaslagen teckna följande uttryck för slutvolymen

$$V_\mathrm{f} = \frac{P_\mathrm{i} T_\mathrm{f}}{P_\mathrm{f} T_\mathrm{i}} V_\mathrm{i}.$$

Med de givna värden för storheterna i högerledet får vi att $V_\mathrm{f} = 22.97\,\mathrm{m}^3$. Då $V_\mathrm{f} > V_0$ så ges arbetet av

$$W = \int_{V_\mathrm{i}}^{V_0} P_0\, dV + \int_{V_0}^{V_\mathrm{f}} \left[P_0 + c\,(V - V_0)^2\right] dV = P_0(V_\mathrm{f} - V_\mathrm{i}) + \frac{c}{3}\,(V_\mathrm{f} - V_0)^3\,.$$

Konstanten c kan bestämmas från förhållandet

$$P_\mathrm{f} = P_0 + c(V_\mathrm{f} - V_0)^2$$

vilket ger

$$c = \frac{P_\mathrm{f} - P_0}{(V_\mathrm{f} - V_0)^2}.$$

Med detta uttryck för c får vi

$$W = P_0(V_\mathrm{f} - V_\mathrm{i}) + \frac{(P_\mathrm{f} - P_0)\,(V_\mathrm{f} - V_0)}{3}.$$

Insättning av värden ger $W = 846.5\,\mathrm{kJ} = 0.85\,\mathrm{MJ}$.

För en idealgas så gäller alltid att

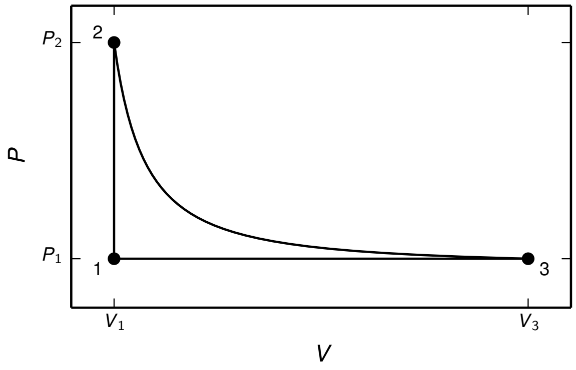
$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{f}{2} Nk\Delta T = \frac{f}{2}\frac{P_\mathrm{i} V_\mathrm{i}}{T_\mathrm{i}}\,(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) = 2918\,\mathrm{kJ} = 2.92\,\mathrm{MJ}.$$

Tillfört värme kan beräknas med hjälp av 1:a huvudsatsen vilket ger

$$Q = \Delta U + W = 3.8\,\mathrm{MJ}.$$

Uppgift 2

PV-diagrammet för Lenoir-cykeln är givet i följande figur. Motorn arbetar mellan två olika tryck P_1 och P_2 samt två olika volymer V_1 och V_3, där vi definierar $r = V_3/V_1$.



Verkningsgraden definieras som kvoten av nettoarbetet som motorn levererar och tillfört värme i förbrännsingsprocessen

$$e = \frac{-W_{\text{tot}}}{Q_{\text{in}}},$$

där W_{tot} är summan av det tillförda arbetet i varje delprocess ($W_{\text{tot}} = W_{12} + W_{23} + W_{31}$) och Q_{in} är det tillförda värmet i delprocess $1 \to 2$.

I delprocess $1 \to 2$ är volymen konstant, $\Delta V = 0$, och således är $W_{12} = 0$. Vi får då att

$$Q_{\text{in}} = Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{f}{2} Nk\Delta T_{12} = \frac{f}{2}\left(P_2 - P_1\right) V_1$$

där vi har använt oss av ideala gaslagen. Delprocess $2 \to 3$ är adiabatisk och således är $Q_{23} = 0$. Det tillförda arbetet ges därmed av

$$W_{23} = \Delta U_{23} = \frac{f}{2} Nk\Delta T_{23} = \frac{f}{2}(P_1 V_3 - P_2 V_1).$$

I den sista delprocessen, $3 \to 1$, är trycket konstant och det tillförda arbetet ges då av

$$W_{31} = -P_1(V_1 - V_3).$$

Verkningsgraden blir därmed

$$e = \frac{-\frac{f}{2}\left(P_1 V_3 - P_2 V_1\right) + P_1\left(V_1 - V_3\right)}{\frac{f}{2}\left(P_2 - P_1\right) V_1} = \frac{\left(P_2 - P_1 r\right) + \frac{2}{f} P_1\left(1 - r\right)}{P_2 - P_1}.$$

Detta uttryck kan förenklas ytterligare genom det faktum att delprocess $2 \to 3$ är adiabatisk vilket medför att

$$P_2 V_1^\gamma = P_1 V_3^\gamma \implies P_2 = P_1\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma = P_1 r^\gamma.$$

Insättning av detta uttryck ger

$$e = \frac{r^\gamma - r + \frac{2}{f}(1-r)}{r^\gamma - 1} = 1 - \frac{r - 1 + \frac{2}{f}(r-1)}{r^\gamma - 1} = 1 - \left(\frac{f+2}{f}\right)\frac{r-1}{r^\gamma - 1} = 1 - \gamma\frac{r-1}{r^\gamma - 1}.$$

För luft är $f = 5$ och med kompressionsförhållandet $r = 6$ får vi

$$e = 1 - \frac{7}{5} \cdot \frac{6-1}{6^{7/5} - 1} = 0.38.$$

Uppgift 3

Vid fasomvandlingen så gäller att det två faserna är i jämvikt och Gibbs fria energi för de två faserna är lika, dvs $G_\alpha = G_\beta$. Vidare så gäller att en förändring i den fria energin (då antalet partiklar är konstant) ges av

$$dG = VdP - SdT.$$

Om faserna ska fortsätta att vara i jämvikt då tryck och temperatur förändras så måste vi ha att $dG_\alpha = dG_\beta$ vilket ger

$$V_\alpha dP - S_\alpha dT = V_\beta dP - S_\beta dT$$

vilket i sin tur ger Classius-Clapeyrons equation

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_\beta - S_\alpha}{V_\beta - V_\alpha} = \frac{L_{\alpha\beta}}{T_1 \left(V_\beta - V_\alpha\right)}$$

där $L_{\alpha\beta}$ är det latenta värmet. Då trycket ändras från P_1 till P_2 så kommer temperaturen ändras från T_1 till T_2 och det är T_2 som vi söker. Med $dP = P_2 - P_1$ och $dT = T_2 - T_1$ så får vi

$$\frac{P_2 - P_1}{T_2 - T_1} = \frac{L_{\alpha\beta}}{T_1 \left(V_\beta - V_\alpha\right)}$$

vilket ger

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{\left(V_\beta - V_\alpha\right)\left(P_2 - P_1\right)}{L_{\alpha\beta}}\right).$$

Med de givna värdena för tätheterna ρ_α och ρ_β så är $V_\alpha = 2.07 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3/mol}$ och $V_\beta = 1.63 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3/mol}$. Vidare så gäller att $L_{\alpha\beta} = 2.1\,\mathrm{kJ/mol}$, $P_1 = 100\,\mathrm{kPa}$, $P_2 = 10\,\mathrm{MPa}$ samt $T_1 = 13.2\,°\mathrm{C}$. Med dessa värden får vi

$$T_2 = 7.2\,°\mathrm{C},$$

dvs temperaturen sjunker.

Uppgift 4

Då systemet är i termisk jämvikt med en reservoar ges tillståndssumman av

$$Z = \sum_{n=0}^{N} e^{-n\epsilon\beta} = \sum_{n=0}^{N} \left(e^{-\epsilon\beta}\right)^n = \frac{1 - e^{-(N+1)\epsilon\beta}}{1 - e^{-\epsilon\beta}}$$

där de sista steget gäller för en geometrisk serie och där $\beta = 1/kT$.

För att bestämma α behöver vi härleda ett uttryck för $\langle E \rangle$. Medelenergin ges av

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\ln\left(1 - e^{-(N+1)\epsilon\beta}\right) - \ln\left(1 - e^{-\epsilon\beta}\right)\right] \\ &= -\left(\frac{(N+1)\epsilon e^{-(N+1)\epsilon\beta}}{1 - e^{-(N+1)\epsilon\beta}} - \frac{\epsilon e^{-\epsilon\beta}}{1 - e^{-\epsilon\beta}}\right) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\epsilon\beta}{e^{\epsilon\beta} - 1} - \frac{(N+1)\epsilon\beta}{e^{(N+1)\epsilon\beta} - 1}\right).\end{aligned}$$

Vid höga temperaturer är $\epsilon\beta \ll 1$ samt $(N+1)\epsilon\beta \ll 1$. Båda uttrycken innanför parentesen är på formen $\frac{x}{e^x - 1}$ där $x \ll 1$ och kan förenklas genom Taylorutveckling vilket ger

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots}.$$

Detta uttryck kan även skrivas som ett polynom på formen $1 + ax + bx^2 + \ldots$ vilket ger

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots} = 1 + ax + bx^2 + \ldots$$

eller

$$1 = \left(1 + ax + bx^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + a\right)x + \left(\frac{1}{6} + \frac{a}{2} + b\right)x^2 + \ldots.$$

Då koefficienterna i högerledet ska vara noll är $a = -\frac{1}{2}$ och $b = \frac{1}{12}$ och således får vi

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \ldots.$$

Använder vi detta uttryck i uttrycket för medelenergin får vi

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\epsilon\beta}{2} + \frac{(\epsilon\beta)^2}{12} + \ldots - 1 + \frac{(N+1)\epsilon\beta}{2} - \frac{(N+1)^2(\epsilon\beta)^2}{12} - \ldots\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{N\epsilon\beta}{2} - \frac{\left[(N+1)^2 - 1\right](\epsilon\beta)^2}{12} + \ldots\right) = \frac{N\epsilon}{2}\left(1 - \frac{N^2 + 2N}{6N}\epsilon\beta + \ldots\right) \\ &= \frac{N\epsilon}{2}\left(1 - \frac{N+2}{6}\frac{\epsilon}{kT} + \ldots\right).\end{aligned}$$

Jämför vi detta uttryck med det givna uttrycket för $\langle E \rangle$ i uppgiften ser vi att $\alpha = \frac{N+2}{6}$.

Då $T \to \infty$ så gäller att alla tillstånd är lika sannolika, dvs

$$P_n = \frac{1}{N+1}, \quad \forall n.$$

Medelenergin kan då beräknas enligt

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{N} E_n P_n = \sum_{n=0}^{N} n\epsilon \frac{1}{N+1} = \frac{\epsilon}{N+1} \sum_{n=0}^{N} n = \frac{\epsilon}{N+1} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N\epsilon}{2}.$$

Uppgift 5

Den totala effekten som jorden strålar ut ges av Stefan-Boltzmanns lag enligt

$$P_{\mathrm{ut}} = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

där T är jordens yttemperatur och R är jordens radie. Vid jämvikt måste effekten från värmekällan som värmer upp jorden vara lika stor som den utstrålade effekten, dvs $P_{\mathrm{in}} = P_{\mathrm{ut}}$. Då enbart solstrålning agerar som värmekälla så gäller att

$$P_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{ut}} = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{S}}^4$$

där $T_{\mathrm{s}} = 300\,\mathrm{K}$. Då enbart de radioaktiva processerna i jordens inre agerar som värmekälla så gäller att

$$P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{ut}} = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{R}}^4$$

där $T_{\mathrm{R}} = 100\,\mathrm{K}$. Om vi nu tar hänsyn till båda värmekällorna samtidigt så gäller att

$$P_{\mathrm{ut}} = P_{\mathrm{S}} + P_{\mathrm{R}}$$

eller

$$4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{S}}^4 + 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{R}}^4 \quad \Longrightarrow \quad T = \left(T_{\mathrm{S}}^4 + T_{\mathrm{R}}^4\right)^{1/4} = 300.92\,\mathrm{K} = 301\,\mathrm{K}.$$