

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Torsdag 29 okt 2015, kl 08.30-13.30 i "H"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Torsdag 12 nov 2015, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. En järnstav med massan 10 kg och temperaturen $400\text{ }^\circ\text{C}$ och en kopparstav med massan 5 kg och temperaturen $300\text{ }^\circ\text{C}$ sänks båda ned och kyls av i en välisolerad behållare med 200 liter vatten, som från början har temperaturen $25\text{ }^\circ\text{C}$. Bestäm entropiändringen då systemet har uppnått jämvikt! Själva behållarens (dvs förutom vattnet) uppvärmning kan försummas och likaså får antas att inget vatten kokar bort. Nödvändiga data finns i Physics Handbook.
2. Figuren nedan visar principen för ett vanligt kompressorkylskåp. Kylmediet komprimeras adiabatiskt i kompressorn som får antas arbeta idealt. Därefter avges värme i kondensorn vid konstant tryck. Trycket sänks därefter med hjälp av en strypventil. Vid denna process kan värmeförluster till omgivningen försummas. Slutligen upptas värme från kylrummet genom att kylmediet förångas vid konstant tryck. Antag att kompressorkylskåpet arbetar mellan trycken 1.0 och 12.0 bar. Data för det aktuella kylmediet HFC-134a återfinns i bifogade tabeller. Bestäm kylmedlets entropi i punkterna 1, 2, 3 och 4!

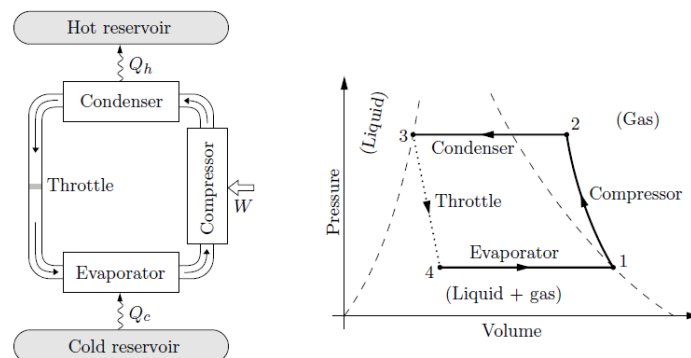


Figure 4.9. A schematic drawing and PV diagram (not to scale) of the standard refrigeration cycle. The dashed lines indicate where the refrigerant is liquid, gas, and a combination of the two. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

3. Två ämnen A och B bildar en homogen blandning både i vätskefasen (v) och i gasfasen (g). Vid en viss temperatur T_0 och ett visst tryck P_0 gäller att Gibbs fria energi ges av uttrycken

$$\begin{aligned} G_v &= G_0 \left[(x - a_1)^2 + b_1 \right] \\ G_g &= G_0 \left[(x - a_2)^2 + b_2 \right] \end{aligned}$$

för vätskefasen respektive gasfasen och där x betecknar koncentrationen av B partiklar. Numeriskt gäller att $a_1=0,25$, $b_1=0,05$, $a_2=0,75$ och $b_2=0,20$ och där G_0 är en konstant. Ange systemets tillstånd som funktion av x , dvs ange antal faser och fasernas sammansättning för $0 < x < 1$ vid temperaturen T_0 och trycket P_0 !

4. Vid rumstemperatur (20 °C) gäller att CO molekylen roterar. Om man behandlar rotationsrörelsen kvantmekaniskt vilket är då det mest sannolika värdet på rotationskvanttalet j ? Nödvändiga data för molekylen finns i Physics Handbook.
5. Betrakta ett system av N icke-växelverkande elektroner, en elektron-gas, innesluten i en volym V . Tillståndstätheten ges då av uttrycket

$$g(\epsilon) = 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} V \sqrt{\epsilon}$$

där ϵ är energin och m_e elektronens massa. Antag temperaturen $T = 0$. Bestäm systemets Fermienergi ϵ_F !

Elektronen har ett magnetiskt moment och z-komponenten av det magnetiska momentet kan anta två olika värden, "spinn upp" respektive "spinn ned". I närvaro av ett externt magnetfält B i z-riktningen minskar energin med $\mu_B B$ för varje elektron med spinn upp och energin ökar med $\mu_B B$ för varje elektron med spinn ned. Magnetiseringen ges av uttrycket

$$M = \mu_B (N_\uparrow - N_\downarrow)$$

där N_\uparrow och N_\downarrow är antalet elektroner med spinn upp respektive spinn ned.

Teckna ett uttryck för tillståndstätheten i närvaro av ett magnetfält B och bestäm magnetiseringen vid temperaturen $T = 0$ under antagandet att $\mu_B B \ll \epsilon_F$! Uttryck magnetiseringen som funktion av antal elektroner N , magnetiska momentet μ_B , Fermienergi ϵ_F samt det yttre pålagda magnetfältet B !

P (bar)	T (°C)	H_{liquid} (kJ)	H_{gas} (kJ)	S_{liquid} (kJ/K)	S_{gas} (kJ/K)
1.0	-26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	-18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	-10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

Table 4.3. Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at -40°C . Excerpted from Moran and Shapiro (1995). Copyright ©2000, Addison-Wesley.

P (bar)		Temperature (°C)		
		40	50	60
8.0	H (kJ)	274	284	295
	S (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	H (kJ)	269	280	291
	S (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	H (kJ)		276	287
	S (kJ/K)		0.916	0.953

Table 4.4. Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995). Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

För järnstaven gäller att $m = 10$ kg och $T_{\text{Fe}} = 673$ K. Den specifika värmekapaciteten är $c_p^{\text{Fe}} = 449$ J/kg K (Physics Handbook) vilket ger värmekapaciteten

$$C_p^{\text{Fe}} = mc_p^{\text{Fe}} = 4.49 \text{ kJ/K.}$$

För kopparstaven gäller att $m = 5$ kg och $T_{\text{Cu}} = 573$ K. Den specifika värmekapaciteten är $c_p^{\text{Cu}} = 385$ J/kg K (Physics Handbook) vilket ger

$$C_p^{\text{Cu}} = mc_p^{\text{Cu}} = 1.925 \text{ kJ/K.}$$

För vattnet gäller att $V = 0.2$ m³ och $T_{\text{H}_2\text{O}} = 298$ K. Densiteten och den specifika värmekapaciteten är $\rho = 998.2$ kg/m³ respektive $c_p^{\text{H}_2\text{O}} = 4.19$ kJ/kg K (Physics Handbook) vilket ger

$$C_p^{\text{H}_2\text{O}} = V\rho c_p^{\text{H}_2\text{O}} = 836.492 \text{ kJ/K.}$$

Vi har här antagit att värmekapaciteterna och densiteten är temperaturoberoende.

I jämvikt får de tre materialen samma sluttemperatur T_s som kan bestämmas utifrån att $Q_{\text{tot}} = 0$ för processen. Vi får då

$$0 = Q_{\text{tot}} = C_p^{\text{Fe}} (T_s - T_{\text{Fe}}) + C_p^{\text{Cu}} (T_s - T_{\text{Cu}}) + C_p^{\text{H}_2\text{O}} (T_s - T_{\text{H}_2\text{O}})$$

vilket ger

$$T_s = \frac{C_p^{\text{Fe}} T_{\text{Fe}} + C_p^{\text{Cu}} T_{\text{Cu}} + C_p^{\text{H}_2\text{O}} T_{\text{H}_2\text{O}}}{C_p^{\text{Fe}} + C_p^{\text{Cu}} + C_p^{\text{H}_2\text{O}}} = 300.6 \text{ K.}$$

Med T_s kan nu entropinändringen beräknas enligt

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{tot}} &= C_p^{\text{Fe}} \int_{T_{\text{Fe}}}^{T_s} \frac{dT}{T} + C_p^{\text{Cu}} \int_{T_{\text{Cu}}}^{T_s} \frac{dT}{T} + C_p^{\text{H}_2\text{O}} \int_{T_{\text{H}_2\text{O}}}^{T_s} \frac{dT}{T} \\ &= C_p^{\text{Fe}} \ln \frac{T_s}{T_{\text{Fe}}} + C_p^{\text{Cu}} \ln \frac{T_s}{T_{\text{Cu}}} + C_p^{\text{H}_2\text{O}} \ln \frac{T_s}{T_{\text{H}_2\text{O}}} \\ &= 2.41 \text{ kJ/K.} \end{aligned}$$

Dvs, vattnets entropiökning är något större än minskningen av entropin för järn- och kopparstaven.

Uppgift 2

Punkt 1

I den här punkten har vi en mättad gas vid trycket 1 bar. Från tabell 4.3 kan vi läsa av att

$$S_1 = 0.940 \text{ kJ/K kg.}$$

Punkt 2

Då kylmedlet komprimeras adiabatiskt i kompressorn är entropin bevarad, dvs $S_2 = S_1$. Vi får då att

$$S_2 = 0.940 \text{ kJ/K kg.}$$

Punkt 3

I den här punkten har vi en mättad vätska vid trycket 12 bar. Från tabell 4.3 kan vi läsa av att

$$S_3 = 0.416 \text{ kJ/K kg.}$$

Punkt 4

För att bestämma entropin behöver vi veta hur stor andel av kylmedlet som är vätska respektive gas. För strypventilen gäller att entalpin är bevarad, dvs $H_4 = H_3$. Om vi betecknar andelen vätska som x så gäller att

$$xH_{\text{liquid}}(1 \text{ bar}) + (1 - x)H_{\text{gas}}(1 \text{ bar}) = H_{\text{liquid}}(12 \text{ bar})$$

vilket ger (tabell 4.3)

$$x = \frac{H_{\text{liquid}}(12 \text{ bar}) - H_{\text{gas}}(1 \text{ bar})}{H_{\text{liquid}}(1 \text{ bar}) - H_{\text{gas}}(1 \text{ bar})} = 0.535.$$

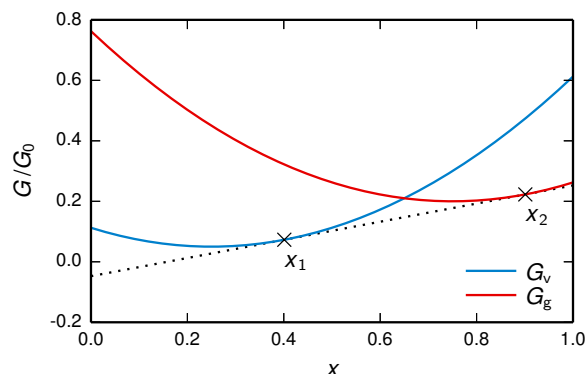
Entropin kan nu beräknas enligt (tabell 4.3)

$$S_4 = xS_{\text{liquid}}(1 \text{ bar}) + (1 - x)S_{\text{gas}}(1 \text{ bar}) = 0.473 \text{ kJ/K kg}$$

Notera att $S_4 > S_3$ vilket betyder att entropin ökar vid passage genom strypventilen.

Uppgift 3

Om vi ritar upp de två fria energi-kurvorna som funktion av x får vi följande figur.



Vi kan nu lägga till en rät linje med lutningen k som tangerar de två kurvorna i punkterna x_1 och x_2 . Om $0 < x < x_1$ eller $x_2 < x < 1$ kommer blandningen att vara i vätskefas respektive gasfas. Om vi däremot har $x_1 < x < x_2$ så kommer blandningen att separera sig till en vätskefas med koncentrationen x_1 och en gasfas med koncentrationen x_2 .

För att bestämma x_1 och x_2 kan vi använda oss av det faktum att lutningen för linjen och respektive kurva sammanfaller i dessa punkter. För de två kurvorna så gäller att

$$G_v = G_0 [(x - a_1)^2 + b_1] \implies G'_v = 2G_0 (x - a_1)$$

$$G_g = G_0 [(x - a_2)^2 + b_2] \implies G'_g = 2G_0 (x - a_2)$$

Vi kan nu ställa upp tre uttryck för k :

$$k = G'_v(x_1) = 2G_0 (x_1 - a_1)$$

$$k = G'_g(x_2) = 2G_0 (x_2 - a_2)$$

$$k = \frac{G_g(x_2) - G_v(x_1)}{x_2 - x_1} = G_0 \frac{[(x_2 - a_2)^2 + b_2] - [(x_1 - a_1)^2 + b_1]}{x_2 - x_1}$$

Från de första två uttrycken får vi att

$$x_2 = x_1 + a_2 - a_1.$$

Sätter vi in detta i det tredje uttrycket samt använder det första uttrycket igen får vi

$$\frac{(x_1 - a_1)^2 + b_2 - (x_1 - a_1)^2 - b_1}{a_2 - a_1} = 2(x_1 - a_1)$$

vilket med $a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.75$, $b_1 = 0.05$ och $b_2 = 0.2$ ger

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{2(a_2 - a_1)} + a_1 = 0.4.$$

Vidare fås med hjälp av ovanstående att $x_2 = x_1 + a_2 - a_1 = 0.9$.

Uppgift 4

För en roterande heteronukleär diatomisk molekyl gäller att rotationsrörelsen kvantiseras enligt

$$E_j = j(j+1) \frac{\hbar^2}{2I} = j(j+1)\epsilon, \quad g_j = 2j+1; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Sannolikheten för att ett tillstånd j är ockuperat ges av

$$P_j = \frac{g_j e^{-E_j/kT}}{Z} = \frac{(2j+1) e^{-\frac{\epsilon}{kT}j(j+1)}}{Z}$$

där Z är en konstant.

Om vi nu antar att j är kontinuerligt ges det kvanttalet som maximerar sannolikheten, j_{\max} , av

$$\left. \frac{dP_j}{dj} \right|_{j=j_{\max}} = 0.$$

Med uttrycket ovan för P_j får vi

$$\left[2 - (2j_{\max} + 1)^2 \frac{\epsilon}{kT} \right] \frac{e^{-\frac{\epsilon}{kT}j_{\max}(j_{\max}+1)}}{Z} = 0$$

vilket ger

$$j_{\max} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2kT}{\epsilon}} - 1 \right).$$

För CO är $\epsilon = 0.2394 \text{ meV}$ (Physics Handbook) och vid rumstemperatur är $kT = 25 \text{ meV}$ vilket ger

$$j_{\max} = 6.73.$$

j måste dock vara ett heltal och då de två närmsta heltalen är 6 och 7 kan vi beräkna P_j för dessa två explicit för att se vilket som har störst sannolikhet. Insättning i uttrycket ovan för P_j ger

$$P_6 = \frac{8.74}{Z}$$
$$P_7 = \frac{8.84}{Z}.$$

Det mest sannolika värdet för j är således $j = 7$.

Uppgift 5

Vi börjar med beräkna Fermienergin ϵ_F utifrån uttrycket för antalet elektroner N då $T = 0$.

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = g_0 \int_0^{\epsilon_F} \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{2g_0}{3} \epsilon_F^{3/2}$$

Då vi lägger på ett externt magnetfält B kommer energin för de elektroner med spinn upp minska med $\Delta\epsilon$ medan energin för de elektroner med spinn ner kommer att öka med $\Delta\epsilon$, där $\Delta\epsilon = \mu_B B$. Vi får då följande tillståndstätheter:

$$\text{Spinn upp, } \uparrow: g = \frac{g_0}{2} \sqrt{\epsilon + \Delta\epsilon}, \quad \epsilon \geq -\Delta\epsilon$$

$$\text{Spinn ner, } \downarrow: g = \frac{g_0}{2} \sqrt{\epsilon - \Delta\epsilon}, \quad \epsilon \geq \Delta\epsilon$$

Antalet elektroner med spinn upp respektive spinn ner kan nu beräknas. För spinn upp får vi

$$\begin{aligned} N_{\uparrow} &= \frac{g_0}{2} \int_{-\Delta\epsilon}^{\epsilon_M} \sqrt{\epsilon + \Delta\epsilon} d\epsilon = \{\text{Variabelbyte: } x = \epsilon + \Delta\epsilon\} = \frac{g_0}{2} \int_0^{\epsilon_M + \Delta\epsilon} \sqrt{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{2g_0}{3} (\epsilon_M + \Delta\epsilon)^{3/2} = \frac{1}{2} \frac{2g_0}{3} \epsilon_M^{3/2} \left(1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

där ϵ_M är den nya Fermienergin i systemet som nödvändigtvis inte är den samma som ϵ_F då $g(\epsilon)$ inte är symmetrisk kring ϵ_F . Då $\epsilon_F \gg \Delta\epsilon$ är även $\epsilon_M \gg \Delta\epsilon$ och vi kan Taylorutveckla $\left(1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^{3/2}$ kring $\Delta\epsilon/\epsilon_M = 0$. Vi får då

$$\left(1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 + \dots$$

vilket ger

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2} \frac{2g_0}{3} \epsilon_M^{3/2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 + \dots\right].$$

På samma sätt får vi för spinn ner

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2} \frac{2g_0}{3} \epsilon_M^{3/2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 - \dots\right].$$

Med dessa två uttryck får vi för det totala antalet elektroner att

$$N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = \frac{2g_0}{3} \epsilon_M^{3/2} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M}\right)^2 + \dots\right].$$

Till första ordningen i $(\Delta\epsilon/\epsilon_M)$ är $N = 2g_0 \epsilon_M^{3/2}/3$ vilket ger att $\epsilon_M = \epsilon_F$.

För magnetiseringen får vi

$$M = \mu_B (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = \mu_B \frac{2g_0}{3} \epsilon_M^{3/2} \left[\frac{3}{2} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_M} + \dots\right] \approx \mu_B \frac{2g_0}{3} \epsilon_F^{3/2} \frac{3}{2} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_F} = \mu_B N \frac{3}{2} \frac{\mu_B B}{\epsilon_F} = \frac{3\mu_B^2 NB}{2\epsilon_F}.$$