

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Fredag 2 jan 2015, kl 08.30-13.30 i "V"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.

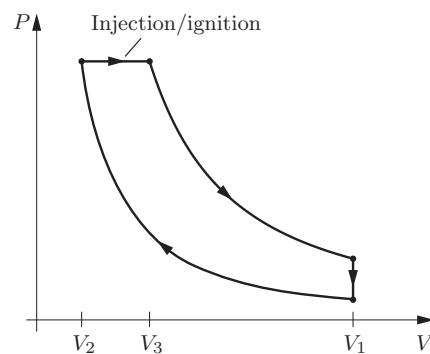
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Fredag 16 jan 2015, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. En dieselmotor antas arbeta enligt den idealiserade cykeln i figuren nedan. Gasen komprimeras adiabatiskt från volymen V_1 till volymen V_2 . Därefter expanderar den vid konstant tryck till volymen V_3 . Den tar då upp värme från det förbrända bränslet. Gasen expanderar därefter adiabatiskt till ursprungsvolymen V_1 . Därefter sker ventilöppning. Denna process approximeras av trycksänkning under avgivande av värme och gasen återgår till begynnelsestillståndet.

Det får antas att en konstant mängd gas genomgår den cykliska processen. Gasen kan approximeras med en idealgas med konstant värmekapacitet, C_P och C_V . Alla processer får antas vara idealiserade kvasistatiska processer. Beteckna kompressionsförhållandet med $r = V_1/V_2$ och injektionskvoten med $q = V_3/V_2$ och bestäm motorns verkningsgrad uttryckt i r , q och gasens adiabatiska koefficient $\gamma = C_P/C_V$.



Den ideala Dieselpcykeln.

2. Grafit och diamant är två olika former av ett och samma grundämne, kol. Vid höga tryck kan grafit omvandlas till diamant.

(a) Med utgångspunkt från bifogade tabell förväntar man sig att grafit ska vara den stabila formen av kol vid rumstemperatur ($25\text{ }^\circ\text{C}$) och atmosfärstryck (100 kPa). Varför?

(b) Betrakta nu grafit och diamant vid $25\text{ }^\circ\text{C}$ och 100 kPa. Genom att öka trycket vid konstant temperatur kommer grafit och diamant att komprimeras och dess volym att minska. Bestäm volymminskningen av grafit respektive diamant som funktion av trycket. Man kan anta att kompressibiliteten är konstant.

(c) Använd resultatet under (b) för att bestämma Gibbs fria energi som funktion av trycket för grafit respektive diamant vid konstant temperatur.

(d) Härled en ekvation för det tryck som måste appliceras för att omvandla grafit till diamant vid rumstemperatur.

(e) Antag att kompressibiliteterna är små och lös ekvationen du härledde under (d) approximativt samt bestäm det tryck som behövs för att omvandla grafit till diamant numeriskt. Är antagandet att kompressibiliteterna är små rimligt?

	grafit	diamant
h (kJ/mol)	0	1,89
s (J/mol·K)	5,74	2,37
v (cm ³ /mol)	5,30	3,42
c_p (J/mol·K)	8,53	6,11
κ_T (1/GPa)	0,029	0,0018

Entalpi per mol h , entropi per mol s , specifika volymen v , isobara värmekapacitiveteten c_p och isoterma kompressibiliteten κ_T för grafit och diamant vid $25\text{ }^\circ\text{C}$ och 100 kPa.

3. Ett system har två energinivåer E_0 och E_1 varav den första (lägre) är odegenererad medan den andra (högre) är trefaldigt degenererad. Bestäm systemets entropi och värmekapacitet som funktion av temperaturen T . Ange särskilt gränsvärdena då $T \rightarrow 0$ samt då $T \rightarrow \infty$.

4. Betrakta en gas av klassiska partiklar i tre dimensioner. Den normerade hastighetsfördelningen ges då av uttrycket

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT)$$

där \mathbf{v} är partikelns hastighet, $v = |\mathbf{v}|$ dess fart, m partikelns massa, k Boltzmanns konstant och T temperaturen. Utgående från denna fördelning beräkna medelvärdet av partikelns fart $\langle v \rangle$ samt standardavvikelsen för farten v , dvs

$$\sigma = \sqrt{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}$$

Beräkna därefter numeriskt medelvärdet av partikelns fart $\langle v \rangle$ samt motsvarande standardavvikelse σ för kvävgas vid rumstemperatur.

5. Vita dvärgstjärnor är ett slutstadium för mindre stjärnor som har ungefär vår sols massa. En vit dvärgstjärnas radie är av samma storleksordning som jordens radie. Stjärnan stabiliseras av en balans mellan gravitationskraften och trycket från en degenererad elektrongas.

(a) Betrakta en sfärisk vit dvärgstjärna med massan M . Antag att dess massa är uniformt fördelad med konstant masstäthet. Då gäller att gravitationsenergin ges av uttrycket

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

där R är stjärnans radie och G gravitationskonstanten. Antag att stjärnan har en proton och en neutron per elektron samt att elektronerna kan behandlas icke-relativistiskt och som en fullständigt degenererad Fermigas. Bestäm stjärnans kinetiska energi (som får antas härröra enbart från den degenererade elektrongasen) och härled ett uttryck för den vita dvärgstjärnans jämviktsradie som funktion av dess massa M . Vad händer med radien om massan ökar och hur förklarar du det?

(b) Temperauren hos en typisk vit dvärgstjärna är 10 000–30 000 K. Vad är Fermitemperaturen T_F för en vit dvärgstjärna med solens massa $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg? Är det rimligt att behandla elektrongasen som fullständigt degenererad?

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Fredagen den 2/1 2015

Uppgift 1

Dieselscykeln består av två adiabatiska processer, $1 \rightarrow 2$ och $3 \rightarrow 4$, en isobar process $2 \rightarrow 3$ och en isokor process $4 \rightarrow 1$ (se Figur 1). Under den isobara processen tillförs värmemängden

$$Q_{\text{in}} = C_P(T_3 - T_2) \quad (1)$$

och vid den isokora processen avges värmemängden

$$Q_{\text{ut}} = C_V(T_4 - T_1) \quad (2)$$

Det utförda nettoarbetet blir därför

$$W_{\text{net}} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{ut}} \quad (3)$$

och verkningsgraden

$$\eta \equiv \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (4)$$

där $\gamma = C_P/C_V$ är gasens adiabatiska koefficient. För de båda adiabatiska processerna gäller att

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant} \quad (5)$$

vilket ger

$$\begin{aligned} T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_2^{\gamma-1} \\ T_3 V_3^{\gamma-1} &= T_4 V_1^{\gamma-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

och för processen $2 \rightarrow 3$ ger ideala gaslagen $PV = nRT$ att

$$\frac{T_2}{V_2} = \frac{T_3}{V_3}. \quad (7)$$

Med beteckningarna $r = V_1/V_2$ och $q = V_3/V_2$ leder detta till

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_3 \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} - T_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}{T_3 - T_2} = \quad (8)$$

$$1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} \frac{\frac{V_3}{V_2} \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1}{q - 1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} \frac{q^\gamma - 1}{q - 1}. \quad (9)$$

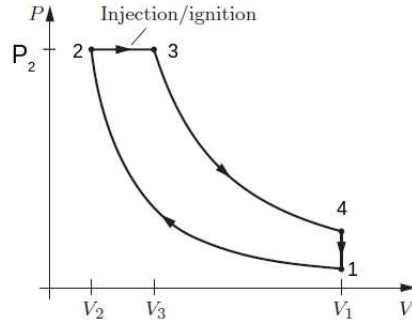
För en tvåatomig idealgas gäller att $\gamma = 7/5$.

Man kan också beräkna Q_{in} och Q_{ut} utifrån första huvudsatsen

$$\Delta U = Q + W. \quad (10)$$

Då processerna är kvasistatiska gäller

$$W = -P\Delta V \quad (11)$$



Figur 1: Den ideala Dieselcykeln.

och man får

$$Q_{\text{in}} = \Delta U - W = (U_3 - U_2) + P_2(V_3 - V_2), \quad (12)$$

där U_2 och U_3 är energin vid punkt 2 och 3. Med hjälp av ekvipartitionsteoremet och ideala gaslagen får man

$$Q_{\text{in}} = \frac{f}{2} Nk(T_3 - T_2) + P_2(V_3 - V_2) = \frac{f+2}{2} P_2(V_3 - V_2). \quad (13)$$

där f är antalet frihetsgrader för molekylerna i gasen. På samma sätt ges Q_{ut} av steg 4-1. Här har vi $\Delta V = 0$, så vi får

$$Q_{\text{ut}} = U_4 - U_1 = \frac{f}{2} V_1(P_4 - P_1). \quad (14)$$

Kvoten blir

$$\frac{Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{in}}} = \frac{\frac{f}{2} V_1(P_4 - P_1)}{\frac{f+2}{2} P_2(V_3 - V_2)}. \quad (15)$$

För att kunna uttrycka denna kvot med hjälp av kompressionsförhållandet r och injektionskvoten q använder vi oss av att processerna $1 \rightarrow 2$ och $3 \rightarrow 4$ är adiabatiska. Genom att använda ideala gaslagen kan vi skriva om ekvation 6 till

$$P_4 = P_2 \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma, \quad P_1 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma. \quad (16)$$

Detta ger

$$\frac{Q_{\text{c}}}{Q_{\text{h}}} = \frac{1}{\gamma} \frac{V_1(P_2(V_3/V_1)^\gamma - P_2(V_2/V_1)^\gamma)}{P_2(V_3 - V_2)} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{r} \right)^{\gamma-1} \frac{q^\gamma - 1}{q - 1} \quad (17)$$

där vi utnyttjat att den adiabatiska konstanten kan uttryckas som $\gamma = (f+2)/f$. Verkningsgraden blir som tidigare

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{r} \right)^{\gamma-1} \frac{q^\gamma - 1}{q - 1} \quad (18)$$

Uppgift 2

a. Vilken form som är stabil avgörs av Gibbs fria energi

$$G = H - TS \quad (19)$$

Per mol har vi för grafit

$$g_0 = 0 - 5.74 \cdot 298 \cdot 10^{-3} = -1.71 \text{ kJ/mol}, \quad (20)$$

och för diamant

$$g_0 = 1.89 - 2.37 \cdot 298 \cdot 10^{-3} = 1.18 \text{ kJ/mol}. \quad (21)$$

Eftersom grafit har lägst Gibbs fria energi är det den stabila formen.

b. Den isoterma kompressibiliteten ges av

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (22)$$

Detta ger vid konstant temperatur

$$\frac{dV}{V} = -\kappa_T dP \Rightarrow \ln \frac{V}{V_0} = -\kappa_T (P - P_0), \quad (23)$$

och volymen som funktion av trycket ges då av

$$V(P) = V_0 e^{-\kappa_T (P - P_0)} \quad (24)$$

där V_0 och P_0 är volym respektive tryck vid referenstillståndet 25° C och 100 kPa.

c. Vi har

$$dG = -SdT + VdP. \quad (25)$$

Vid konstant temperatur är $dT = 0$ och vi får

$$\begin{aligned} \int_{G_0}^G dG &= \int_{P_0}^P V(P') dP' = \int_{P_0}^P V_0 e^{-\kappa_T (P' - P_0)} dP' \Rightarrow \\ G(P) &= G_0 + \frac{V_0}{\kappa_T} \left(1 - e^{-\kappa_T (P - P_0)} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Eller per mol:

$$g(P) = g_0 + \frac{v_0}{\kappa_T} \left(1 - e^{-\kappa_T (P - P_0)} \right). \quad (27)$$

d. Det tryck som måste appliceras bestäms av att g ska vara lika för diamant (d) och grafit (g), dvs

$$g_{0d} + \frac{v_{0d}}{\kappa_{Td}} \left(1 - e^{-\kappa_{Td} (P - P_0)} \right) = g_{0g} + \frac{v_{0g}}{\kappa_{Tg}} \left(1 - e^{-\kappa_{Tg} (P - P_0)} \right) \quad (28)$$

Lösningen till denna ekvation ger det eftersökta trycket.

e. Om $\kappa_T \ll 1$ kan vi serietutveckla exponentialtermerna:

$$e^{-\kappa_T(P-P_0)} \approx 1 - \kappa_T(P - P_0) \quad (29)$$

vilket ger

$$\begin{aligned} g_{0d} + v_{0d}(P - P_0) &= g_{0g} + v_{0g}(P - P_0) \Rightarrow \\ g_{0d} - g_{0g} &= (v_{0g} - v_{0d})(P - P_0) \Rightarrow \\ P &= P_0 + \frac{\Delta g}{\Delta v} \end{aligned} \quad (30)$$

där

$$\begin{aligned} \Delta g &= g_{0d} - g_{0g} = 2.89 \text{ kJ/mol} \\ \Delta v &= v_{0g} - v_{0d} = 1.88 \text{ cm}^3/\text{mol} \end{aligned} \quad (31)$$

så $\Delta P = P - P_0 = 1.54 \text{ GPa}$ och $\kappa_{Tg}\Delta P = 0.045 \ll 1$, medan $\kappa_{Td}\Delta P = 0.028$. Detta innebär att antagandet om liten kompressibilitet är rimligt. Med $P_0 = 100 \text{ kPa}$ blir $P = 1.54 \text{ GPa} = 15 \text{ kbar}$.

Uppgift 3

Vi har tillståndssumman

$$Z = e^{-\beta E_0} + 3e^{-\beta E_1} = e^{-\beta E_0}(1 + 3e^{-\beta \Delta E}), \quad (32)$$

där $\Delta E = E_1 - E_0$. Detta ger Helmholtz fria energi

$$F \equiv -kT \ln Z = E_0 - kT \ln(1 + 3e^{-\beta \Delta E}) \quad (33)$$

Entropin ges då av

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = k \ln(1 + 3e^{-\beta \Delta E}) + kT \frac{-3\Delta E e^{-\beta \Delta E}}{1 + 3e^{-\beta \Delta E}} \left(-\frac{1}{kT^2} \right) = \\ &k \left[\ln(1 + 3e^{-\beta \Delta E}) + \frac{3\beta \Delta E e^{-\beta \Delta E}}{1 + 3e^{-\beta \Delta E}} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Då $T \rightarrow 0$ är $\beta \Delta E \gg 1$ och $e^{-\beta \Delta E} \rightarrow 0$. Vi kan då serietutveckla, vilket ger

$$S \rightarrow k \left[3e^{-\beta \Delta E} + 3\beta \Delta E e^{-\beta \Delta E} \right] \rightarrow 0. \quad (35)$$

Då $T \rightarrow \infty$ är $\beta \Delta E \ll 1$ och man kan utveckla $e^{-\beta \Delta E} \approx 1 - \beta \Delta E + \dots$. Man får då

$$S \rightarrow k \left\{ \ln \left[4 \left(1 - \frac{3}{4} \beta \Delta E \right) \right] + \frac{3}{4} \beta \Delta E \right\} \rightarrow k \ln 4 \quad (36)$$

Den totala energin ges av

$$U = F + TS = E_0 + \frac{3\Delta E}{3 + e^{\beta \Delta E}} \quad (37)$$

Värmekapaciteten blir då

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = -\frac{1}{kT^2} \frac{dU}{d\beta} = k(\beta\Delta E)^2 \frac{3e^{-\beta\Delta E}}{(1+3e^{-\beta\Delta E})^2} \quad (38)$$

Då $T \rightarrow 0$ är $\beta\Delta E \gg 1$ och $e^{-\beta\Delta E} \rightarrow 0$, vilket ger

$$C_V \rightarrow 3k(\beta\Delta E)^2 e^{-\beta\Delta E} \rightarrow 0. \quad (39)$$

Om istället $T \rightarrow \infty$, $\beta\Delta E \ll 1$ och $e^{-\beta\Delta E} \rightarrow 1 - \beta\Delta E$ får vi

$$C_V \rightarrow k(\beta\Delta E)^2 \frac{3}{16} \rightarrow 0. \quad (40)$$

Notera att $C_V \geq 0$ för alla T .

Uppgift 4

Vi kontrollerar först att hastighetsfördelningen är normerad:

$$\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v^2 dv e^{-mv^2/2kT}, \quad (41)$$

vilket med variabelbytet $x = \sqrt{m/2kT}v$ ger

$$\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = 1. \quad (42)$$

Hastighetsfördelningen är alltså korrekt normerad. För medelvärdet av farten fås då

$$\langle v \rangle = \int dv v f(\mathbf{v}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}, \quad (43)$$

och för medelvärdet av farten i kvadrat

$$\langle v^2 \rangle = \int dv v^2 f(\mathbf{v}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3kT}{m}. \quad (44)$$

Vi har alltså

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{3\pi - 8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}. \quad (45)$$

Vi ska också beräkna medelvärdet och standardavvikelsen numeriskt för kvävgas, N_2 , vid rumstemperatur. För en kvävemolekyl är $m \approx 28 \text{ u} = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Detta ger

$$\langle v \rangle = 750 \text{ m/s}, \quad \sigma = 199 \text{ m/s} \quad (46)$$

Uppgift 5

a. Den kinetiska energin i en degenererad elektrongas ges av

$$U_{\text{kin}} = \frac{3}{5} N \epsilon_F, \quad \epsilon_F = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}. \quad (47)$$

Enligt uppgiften har vi en proton och en neutron per elektron. Då protonens massa m_p och neutronens massa är nästan lika stora samt betydligt större än elektronmassan kan vi sätta $N = M/2m_p$. Volymen ges av $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Den kinetiska energin är då

$$U_{\text{kin}} = \frac{3h^2}{40m_e} \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{5/3} \left(\frac{9}{4\pi^2 R^3} \right)^{2/3} \quad (48)$$

Dvärgstjärnans totala energi är alltså

$$U_{\text{tot}} = U + U_{\text{kin}} = -\frac{3GM^2}{5R} + \frac{3h^2}{40m_e} \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{5/3} \left(\frac{9}{4\pi^2 R^3} \right)^{2/3} = -\frac{a}{R} + \frac{b}{R^2} \quad (49)$$

Jämviktsradien är den radie som ger ett minimum i den totala energin. Om vi sätter derivatan av energin med avseende på radien till noll fås

$$\frac{a}{R^2} - \frac{2b}{R^3} = 0 \quad (50)$$

vilket ger

$$R_{\text{min}} = \frac{2b}{a} = \frac{1}{32} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{4/3} \frac{h^2}{m_e m_p^{5/3} G} M^{1/3}. \quad (51)$$

Detta innebär att radien minskar med ökande massa, vilket beror på att gravitationsenergin minskar fortare än den kinetiska energin ökar med ökande massa.

b. Fermitemperaturen $T_F = \epsilon_F/k$ ges av

$$T_F = \frac{h^2}{8km_e} \left(\frac{9M}{8m_p\pi^2 R_{\text{min}}^3} \right)^{2/3}. \quad (52)$$

Med $M = 2.0 \times 10^{30}$ kg blir jämviktsradien $R_{\text{min}} = 7.2 \times 10^6$ m, vilket ger Fermitemperaturen $T_F = 2.3 \times 10^9$ K. Fermitemperaturen är alltså mycket högre än den angivna temperaturen hos en vit dvärgstjärna (10 000-30 000 K) och det är rimligt att behandla elektrongasen som fullständigt degenererad.