Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Tisdag 26 aug 2014, kl 08.30-13.30 i "Maskin"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Torsdag 11 sep 2014, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. En ström av 0,5 A flyter genom ett motstånd med resistansen 2,0 Ω i 100 s. Motståndet är värmeisolerat och har begynnelsetemperaturen 300 K samt den konstanta värmekapaciteten 0,25 J/K. Hur stor blir entropiändringen hos motståndet?

2. Den svenske uppfinnaren John Ericsson konstruerade en värmemaskin som arbetar cykliskt med två isobarer och två isotermer. Beteckna det högre trycket med P_H och det lägre med P_L och på motsvarande sätt för temperaturerna, T_H respektive T_L. Antag att arbetsmediet är en fix mängd gas som kan behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. Antag att alla processer är reversibla.

   Bestäm anordningens vekningsgrad som funktion av P_H, P_L, T_H, T_L och γ, där $\gamma = C_P/C_V$ är den adiabatiska koefficienten för gasen! Verkningsgraden definieras som kvoten mellan det utförda nettoarbetet och det tillförda värmet. Jämför den erhållna verkningsgraden med motsvarande Carnotverkningsgrad och kommentera ditt resultat.

3. Mättad ånga av ett visst ämne befinner sig i jämvikt med sin vätskefas i en behållare där trycket hålls konstant medan volymen tillåts variera. Bestäm hur ångans täthet varierar med temperaturen och visa att den har ett maximum vid en viss temperatur! Bestäm denna temperatur och ange hur den beror av ämnets ångbildningsvärme L!

   Utgå från att vid jämvikt gäller att

   $$\frac{dP}{dT} = \frac{s_g - s_l}{v_g - v_l}$$

   där s_g (s_l) är ångans (vätskans) entropi per mol och v_g (v_l) är ångans (vätskans) volym per mol. Antag att ångan kan behandlas som en idealgas och att vätskans volym per mol kan försummas jämfört med ångans. Du får anta att ångbildningsvärmet är temperaturoberoende.

4. Ett paramagnetiskt material består av N partiklar med spinn 1. Varje partikel har det magnetiska momentet m. I ett yttre magnetfält B blir orienteringen av de magnetiska momenten kvantiserad till tre riktningar parallellt, vinkelrät och antiparallellt med fältet. Detta ger energierna $-mB$, 0 respektive mB. Bestäm systemets värmekapacitet vid konstant magnetfält som funktion av temperaturen då $kT \gg mB$!

5. I en halvledare av n-typ har elektroner tillförts, donerats, från dopatomer. Dessa elektroner finns i ledningsbandet. Antag att tillståndstätheten i ledningsbandet ges av uttrycket

$$g(\epsilon) = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon - \epsilon_c} \ \ , \ \epsilon > \epsilon_c$$

där ϵ_c markerar lägsta energin i ledningsbandet. För halvledaren gäller att vid viss temperatur T ligger kemiska potentialen μ precis vid energin ϵ_c. Beräkna i detta fall elektrontätheten i ledningsbandet (antalet elektroner per volymsenhet). Ditt svar får innehålla en bestämd integral (som kan beräknas numeriskt).

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tisdagen den 26/8 2014

1. I motståndet produceras effekten

$$P = RI^2 = 0.5 \text{ W}.$$

På $t = 100$ s ger detta energin

$$E = Pt = 50 \text{ J}.$$

Eftersom motståndet är värmeisolerat bidrar hela energin till att värma upp motståndet. Värmeöverföringen $Q = E$ leder till en entropiökning på

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{CdT}{T} = C \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right),$$

där vi har att $C = 0.25$ J/K och $T_i = 300$ K. Sluttemperaturen T_f får vi från

$$T_f = T_i + \frac{Q}{C} = 500 \text{ K}.$$

Detta ger

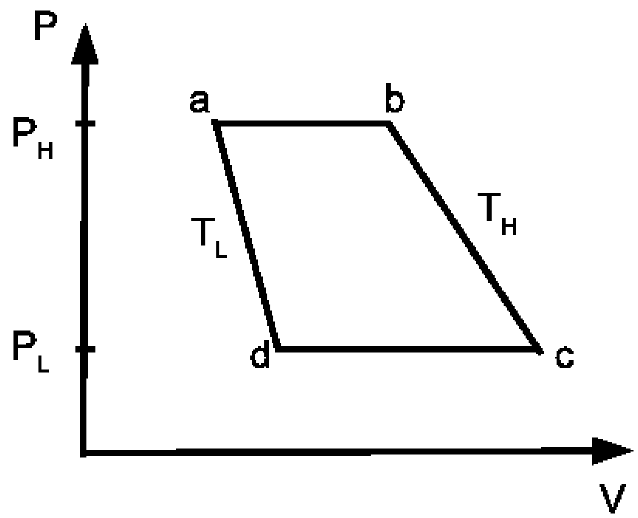
$$\Delta S = 0.25 \ln\frac{5}{3} = 0.13 \text{ J/K}$$

2. Första huvudsatsen ger sambandet

$$\Delta U = Q + W$$

För en idealgas gäller också

$$\begin{aligned} \Delta U &= C_V \Delta T \\ PV &= nRT \\ C_P - C_V &= nR \end{aligned}$$



Steg 1: $a \to b$, isobar process:

$$\begin{aligned}
&Q_{ab} = C_P(T_b - T_a) = C_P(T_H - T_L) > 0\\
&\Delta U = C_V(T_H - T_L)\\
&W_{ab} = \Delta U - Q_{ab} = -nR(T_H - T_L) < 0.
\end{aligned}$$

Steg 2: $b \to c$, isoterm process:

$$\begin{aligned}
&\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0\\
&W_{bc} = -\int_b^c P dV = -nRT_H \int_{V_b}^{V_c} \frac{dV}{V} =\\
&-nRT_H \ln \frac{V_c}{V_b} = -nRT_H \ln \frac{P_H}{P_L} < 0\\
&Q_{bc} = -W_{bc} = nRT_H \ln \frac{P_H}{P_L} > 0.
\end{aligned}$$

Steg 3: $c \to d$, isobar process:

$$\begin{aligned}
&Q_{cd} = C_P(T_d - T_c) = -C_P(T_H - T_L) < 0\\
&\Delta U = -C_V(T_H - T_L)\\
&W_{cd} = nR(T_H - T_L) > 0.
\end{aligned}$$

Steg 4: $d \to a$, isoterm process:

$$\begin{aligned}
&\Delta U = 0\\
&W_{da} = -\int_d^a P dV = nRT_L \ln \frac{P_H}{P_L} > 0\\
&Q_{da} = -W_{da} = -nRT_L \ln \frac{P_H}{P_L} < 0.
\end{aligned}$$

Detta ger verkningsgraden

$$\begin{aligned}
\eta =& \frac{\text{Utfört nettoarbete}}{\text{Tillfört värme}} = \frac{-(W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da})}{Q_{ab} + Q_{bc}} =\\
&\frac{nR(T_H - T_L) \ln \frac{P_H}{P_L}}{C_P(T_H - T_L) + nRT_H \ln \frac{P_H}{P_L}}.
\end{aligned}$$

Vi har också att

$$\frac{C_P}{nR} = \frac{C_P}{C_P - C_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1},$$

och verkningsgraden kan därför skrivas som

$$\eta = \frac{(T_H - T_L) \ln(P_H/P_L)}{\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_H - T_L) + T_H \ln(P_H/P_L)}.$$

Vi vill jämföra med Carnotverkningsgraden:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_L}{T_H},$$

vilket kan göras genom att skriva

$$\eta = \frac{\eta_c \ln(P_H/P_L)}{\eta_c \frac{\gamma}{\gamma-1} + \ln(P_H/P_L)} = \eta_c \frac{1}{1 + \eta_c \frac{\gamma/(\gamma-1)}{\ln(P_H/P_L)}}$$

Man ser då att $\eta < \eta_c$.

Kommentar: Om man använder en ideal regenerator kan värmen som tas ut i steg 3, $c \rightarrow d$, återanvändas i steg 1, $a \rightarrow b$. Man får då Carnotverkningsgraden:

$$\eta = \frac{-(W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da})}{Q_{bc}} \equiv \eta_c.$$

3. Vid jämvikt gäller

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_g - s_l}{v_g - v_l} = \frac{L}{T(v_g - v_l)}$$

där L är ångbildningsvärmet per mol. Då $v_g \gg v_l$ och $Pv_g = RT$ fås

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{R}\frac{P}{T^2}.$$

Integrering ger

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P} &= \frac{L}{R} \int \frac{dT}{T^2} \\ \ln P &= -\frac{L}{RT} + \text{konst} \\ P(T) &= P_0 e^{-L/RT} \end{aligned}$$

där P_0 är en konstant. I detta fall vet vi att trycket hålls konstant medan ångans täthet varierar. För tätheten $\rho(T)$ har vi då

$$\rho(T) = \frac{1}{v_g} = \frac{P}{RT} = \frac{P_0}{RT} e^{-L/RT}.$$

Vi ser att $\rho(T) \rightarrow 0$ då $T \rightarrow 0$ eller $T \rightarrow \infty$. Maximat $T = T_m$ bestäms av att

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(T)}{dT} &= 0 \\ \left[-\frac{1}{T^2} e^{-L/RT} + \frac{L}{RT^2}\frac{1}{T} e^{-L/RT} \right] &= 0 \\ \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) \frac{1}{T^2} e^{-L/RT} &= 0 \\ \Rightarrow T_m &= \frac{L}{R} \end{aligned}$$

Så för tätheten gäller att $\rho(T) = \frac{P_0}{RT} e^{-L/RT}$, med ett maxvärde för $T_m = L/R$.

4. För en partikel i systemet blir partitionsfunktionen

$$Z = e^{\beta mB} + 1 + e^{-\beta mB}$$

där $\beta = 1/kT$. Energin blir då

$$U \equiv -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} =$$
$$-mB\frac{e^{\beta mB} - e^{-\beta mB}}{e^{\beta mB} + 1 + e^{-\beta mB}}$$

Sätt $x = \beta mB$. Eftersom $kT \gg mB$ är x litet och vi får

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1 + e^{-x}} \rightarrow \frac{2x}{3},\ x \rightarrow 0$$

För N partiklar fås

$$U(N,T,B) = -\frac{2N}{3}\frac{(mB)^2}{kT}$$

Värmekapaciteten blir då

$$C_B \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,B} =$$
$$-\frac{2N}{3}mB\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{mB}{kT}\right) = \frac{2Nk}{3}\left(\frac{mB}{kT}\right)^2$$

5. Antalet elektroner i ledningsbandet ges av

$$N = \int_{\epsilon_c}^{\infty} \bar{n}_{FD}(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon = \int_{\epsilon_c}^{\infty}\frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}.$$

Givet är att $\mu = \epsilon_c$ och

$$g(\epsilon) = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon - \epsilon_c}$$

Vilket leder till

$$N = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_{\epsilon_c}^{\infty}\frac{\sqrt{\epsilon-\epsilon_c}d\epsilon}{e^{(\epsilon-\epsilon_c)/kT}+1}$$

Sätter man $x = (\epsilon - \epsilon_c)/kT$ fås då

$$N = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(kT)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{e^x+1} \Rightarrow$$
$$n \equiv \frac{N}{V} = 4\pi\left(\frac{2mkT}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{e^x+1}$$