

## Tentamen i Termodynamik och Statistisk fysik för F3(FTF140)

---

**Tid och plats:** Måndag den 14 januari 2008, kl. 8.30-12.30 i M-huset.

**Examinator:** Mats Granath, 7723175, 0708938077, mgranath@fy.chalmers.se

**Hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsgranskning:** "Drop-in" granskning hos examinatoren, rum O7109B.

### Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

**A)** För en enatomig klassisk idealgas ges energin per atom av

- a)  $\hbar\omega_E$
- b)  $R$
- c)  $kT$
- d)  $(3/2)kT$

**B)** En gas tillförs värme under konstant tryck och expanderar från jämviktstillstånd (1) till jämviktstillstånd (2). Ändringen i entropi ges av

- a)  $\Delta S = \int_1^2 (C_p/T) dT$
- b)  $\Delta S = 0$
- c)  $\Delta S < 0$
- d)  $\Delta S = \int_1^2 P dV$

**C)** Givet ett system i termisk jämvikt vid temperatur  $T$  som har kvanttillstånd  $i$  med energier  $E_i$ . Vad representerar följande uttryck:  $e^{-E_i/kT} / \sum_i e^{-E_i/kT}$

- a) Tillståndssumman
- b) Sannolikhet att systemet har energi  $E_i$
- c) Väntevärdet av energin
- d) Systemets entropi

**D)** Entropin för is ges vid låga temperaturer av  $s \approx k \ln(3/2)$  per vattenmolekyl. Hur många tillgängliga tillstånd finns uppskattningsvis för en bit is med en mol vattenmolekyler?

- a)  $(3/2)N_A$
- b)  $(3/2)^{N_A}$
- c)  $(3/2)^{N_A}k$
- d)  $N_A \ln(3/2)$

## Uppgift 2

En behållare innehåller en viss mängd vatten i jämvikt vid ett tryck och temperatur sådant att vattnet befinner sig i den kritiska punkten. Behållaren som är tät och har konstant volym lämnas sedan för sig själv i ett normaltempererat rum ( $20^\circ\text{C}$ ) tills dess att termisk jämvikt med omgivningen uppnås under givna förhållanden. Hur stor **voly-  
mandel** av vattnet är då gas respektive vätska? (10p)

## Uppgift 3

Ett system består av  $N$  oberoende kvantmekanska delsystem. Varje delsystem har två energinivåer med energi  $\epsilon_1$  och  $\epsilon_2$  där den första energinivån är unik medan den andra är tvåfaldigt degenererad.

- Beräkna energin för systemet som funktion av temperatur. (6p)
- Beräkna systemets värmekapacitet som funktion av temperatur. (4p)

## Uppgift 4

I ett ångkraftverk strömmar ett vattenflöde av  $20\text{kg/s}$  genom en turbin. Innflödet i turbinen består av överhettad ånga vid  $P_1=25\text{MPa}$  och  $T_1=500^\circ\text{C}$  och utflödet av mättad ånga (gas och vätska) vid  $T_2=35^\circ\text{C}$  med en kvalitet (massandel gas) på 95%.

- Beräkna turbinens effekt  $\dot{W}_{ut}$  givet att värmeförluster kan försummas. (4p)
- För en adiabatisk process gäller från andra lagen  $\Delta s = s_2 - s_1 \geq 0$  där  $s_1$  och  $s_2$  är entropin per kilogram av flödet före och efter turbinen. Visa att flödet är irreversibelt genom att beräkna  $s_1$  och  $s_2$ . (2p)
- Den teroretiskt (från andra lagen) maximala effekten under givna temperatur- och tryckförhållanden ges av en reversibel process. Antag  $P_1$ ,  $T_1$  och  $T_2$  enligt ovan, vilken kvalitet ska ångan i utflödet ha för att processen ska vara reversibel. (2p)
- Beräkna den isentropiska verkningsgraden,  $\eta_{isen}$ . Denna ges av kvoten mellan effekten för den verkliga irreversibla processen (a) och effekten för den ideala reversibla processen (c). (2p)

## Uppgift 5

För att ta hänsyn till växelverkan mellan atomerna i en gas kan tillståndssumman för en enatomig gas skrivas:

$$Z(V, N, T) = \left(\frac{V - Nb}{N}\right)^N \left(\frac{mkT}{2\pi h^2}\right)^{3N/2} e^{\frac{N^2 a^2}{VkT}},$$

där  $a$  och  $b$  är konstanta parametrar.

- I vilka fysikaliska enheter anges parametrarna  $a$  och  $b$ . ( $V$  ges i  $m^3$ ,  $kT$  ges i  $J$ , etc.) (2p)
- Härled van der Waals tillståndsekvation från uttrycket för tillståndssumman, dvs. beräkna trycket  $P$  som funktion av temperatur  $T$  och specifik volym per atom  $v = V/N$ . (3p)
- Beräkna genomsnittsenergien per atom. (3p)
- Visa att i gränsen  $a = 0$  och  $b = 0$  återfås tillståndsekvationen och energin för en enatomig klassisk idealgas. (2p)

## Uppgift 6

Betrakta en allmän process under vilken en konstant mängd av en klassisk idealgas går från ett jämviktstillstånd med tryck  $P_1$  och volym  $V_1$  till ett annat jämviktstillstånd med tryck  $P_2$  och volym  $V_2$ . Gasen kan antas ha konstanta värmekapaciteter  $C_p$  och  $C_v$ .

- Beräkna ändringen i gasens entropi,  $S_2 - S_1$ , uttryckt i termer av ovan givna storheter. (4p)
- Antag att processen är adiabatisk men irreversibel. Visa att då gäller  $P_2 V_2^\gamma > P_1 V_1^\gamma$ , där  $\gamma = C_p/C_v > 1$  (4p)
- Ett exempel på en irreversibel adiabatisk process är fri expansion där en gas expanderar ut i vakuum ( $V_2 > V_1$ ). Bekräfta att denna uppfyller uttrycket  $P_2 V_2^\gamma > P_1 V_1^\gamma$ . (OBS! denna uppgift kan du göra även om du inte gjort uppgift b.) (2p)

# Lösning Tenta 080114, Termodynamik och statistisk fysik, FTF140

## Uppgift 1

d,a,b,b

## Uppgift 2

Massan är bevarad liksom volymen. Ur tabell fås specifika volymer: i kritiska punkten  $v_c = 0.003155m^3/kg$  och vid  $20^\circ C$   $v_f = 0.001002m^3/kg$  och  $v_g = 57.79m^3/kg$ . Massan för en fas ges av  $m = V/v$ , alltså för masskonservering  $V/v_c = V_g/v_g + V_f/v_f = V_g/v_g + (V - V_g)/v_f$  där  $V$  är totala volymen. Vi söker volymandelen  $V_g/V$  vilket kan lösas ut som

$$V_g/V = \frac{1/v_c - 1/v_f}{1/v_g - 1/v_f} = 0.68$$

## Uppgift 3

Beräkna för ett delsystem, eftersom oberoende adderas energi och värmekapacitet, dvs  $E = N\epsilon$  och  $C_V = Nc_v$ . Tillståndssumman ges av  $Z = e^{-\beta\epsilon_1} + 2e^{-\beta\epsilon_2}$ .

a) Energin

$$\epsilon = \frac{1}{Z}(\epsilon_1 e^{-\beta\epsilon_1} + 2\epsilon_2 e^{-\beta\epsilon_2}) = \frac{\epsilon_1 + 2\epsilon_2 e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}{1 + 2e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}$$

b)

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{d\epsilon}{dT} = -k\beta^2 \frac{d\epsilon}{d\beta} \\ &= -k\beta^2 \left( \frac{-2\epsilon_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}{1 + 2e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}} - \frac{\epsilon_1 + 2\epsilon_2 e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}{(1 + 2e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)})^2} (-2(\epsilon_2 - \epsilon_1)) \right) \\ &= -\frac{1}{kT^2} \frac{2(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + \epsilon_2 e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)} - 2\epsilon_2 e^{-2\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)})}{(1 + 2e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)})^2} \end{aligned}$$

## Uppgift 4

a) Arbete ut ges av entalpiändringen. Ur tabell  $h_{in} = 3162.4kJ/kg$ ,  $h_{ut,gas} = 2563.3kJ/kg$  och  $h_{ut,liq.} = 146.68kJ/kg$ . Effekten ges av

$$\dot{W}_{ut} = \dot{m}(h_{in} - (xh_{ut,gas} + (1-x)h_{ut,liq.}))kJ/s = 14.29MW$$

b) Ur tabell  $s_{in} = 5.9592kJ/kgK$ ,  $s_{ut,gas} = 8.3531kJ/kgK$  och  $s_{ut,liq.} = 0.5053kJ/kgK$ . Ändringen i entropi (per kg av flödet) är

$$\Delta s = (xs_{ut,gas} + (1-x)s_{ut,liq.} - s_{in})kJ/kgK = 2.0015kJ/kgK > 0$$

c) Lös  $s = (xs_{ut,gas} + (1-x)s_{ut,liq.} - s_{in}) = 0$  för  $x$  vilket ger

$$x = \frac{s_{in} - s_{ut,liq.}}{s_{ut,gas} - s_{ut,liq.}} = 0.6950$$

d) För kvalitet enligt c fås effekt  $\dot{W}_{ut,isen.} = 26.72 MW$  vilket ger verkningsgrad

$$\eta_{isen} = \dot{W}_{ut}/\dot{W}_{ut,isen.} = 0.54$$

## Uppgift 5

a)  $b \sim V$  dvs  $m^3$ ,  $a \sim \sqrt{VkT}$  dvs  $\sqrt{m^3 J}$  (Använd dessa för dimensionskoll på deluppgift b och c)

b)

$$\begin{aligned} P &= -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = kT \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right|_T = \frac{kTN}{V - Nb} - kT \frac{N^2 a^2}{V^2 kT} \\ &= \frac{kT}{v - b} - \frac{a^2}{v^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = kT^2 \partial \ln Z \partial T = kT^2 \frac{3N}{2} \frac{1}{T} - kT^2 \frac{N^2 a^2}{VkT^2} \\ &= \frac{3}{2} NkT - \frac{N^2 a^2}{V} \end{aligned}$$

d) För  $a = b = 0$  får vi från deluppgift b och c:  $P = kT/v$  och  $E = \frac{3}{2} NkT$ .

## Uppgift 6

a) Ändring i entropi mellan två jämviktstillstånd är oberoende av väg. Vi delar in processen i två reversibla delsteg: 1) ändra trycket vid konstant volym från  $V_1, P_1, T_1 = P_1 V_1 / (\nu R)$  till  $V_1, P_2, T' = P_2 V_1 / (\nu R)$ ; 2) ändra volymen vid konstant tryck från  $V_1, P_2, T'$  till  $V_2, P_2, T_2 = P_2 V_2 / (\nu R)$ . Ändringen i entropi ges för en reversibel process av  $dS = dQ/T$ , dvs  $dS = C_v dT/T$  och  $dS = C_p dT/T$  för respektive steg.

$$\begin{aligned} dS &= \int_{T_1}^{T'} C_v dT/T + \int_{T'}^{T_2} C_p dT/T = C_v \ln(T'/T_1) + C_p \ln(T_2/T') \\ &= C_v \ln(P_2/P_1) + C_p \ln(V_2/V_1) \end{aligned}$$

b) För en adiabatisk ( $dQ = 0$ ) irreversibel process gäller  $dS > 0$ . Från a fås alltså  $C_v \ln(P_2/P_1) + C_p \ln(V_2/V_1) > 0$  dvs  $\ln(P_2/P_1) + \gamma \ln(V_2/V_1) > 0$  eller ekvivalent  $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma > 0$ , vilket ger  $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma > 1$ .

c) För fri expansion är energin konstant (inget arbete eller värme) vilket för idealgas innebär konstant temperatur. Alltså har vi  $P_2 V_2 = P_1 V_1$ . Vi skriver

$$P_2 V_2^\gamma = P_2 V_2 V_2^{\gamma-1} > [V_2 > V_1, \gamma > 1 \rightarrow V_2^{\gamma-1} > V_1^{\gamma-1}] > P_2 V_2 V_1^{\gamma-1} = P_1 V_1 V_1^{\gamma-1} = P_1 V_1^\gamma$$

VSV.