

Chalmers Tekniska Högskola
och Göteborg Universitet
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik
Aleksandar Matic/Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Torsdagen den 31 mars 2005 8.30-12.30 i V-huset.

Examinatorer: Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sålda via Cremona), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk Fördelning", egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift), valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift adderas enligt tidigare offentliggjord formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Lösningar finns på kurshemsidan efter tentans slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast torsdagen 14:e april.

Rättningsgranskning: Måndagen 25:e april 12.00-12.30 i rum O7109B

1. För att smälta 2 kg is, som har temperaturen 0°C , tillför man vattenånga, som har temperaturen 100°C . Sluttillståndet man vill uppnå är vatten vid 0°C .

- a) Beräkna hur stor mängd ånga man behöver. (5p)
- b) Beräkna den totala entropiförändringen i systemet. (5p)

2. I en kretsprocess genomgår 1 mol kvävgas följande fyra steg:

- 1) En isoterm kompression till $1/3$ av ursprungsvolymen
- 2) En isobar expansion där volymen fördubblas
- 3) En adiabatisk expansion tillbaka till begynnelsevolymen
- 4) En isokor process tillbaka till begynnelsestillståndet.

I begynnelsestillståndet är temperaturen för kvävgasen 300 K.

- a) Beräkna värmeflödet i varje delprocess (7p)
- b) Beräkna kretsprocessens verkningsgrad (3p)

3. En kropp med massa m sitter i en fjäder med fjäderkonstant K och kan vibrera runt ett jämviktsläge $x=0$. Kroppen befinner sig i en gas vid temperatur T .

a) Beräkna kvadratiska medelavvikelsen, $\langle x^2 \rangle$, från jämviktsläget om kroppen kan betraktas som klassisk.

b) Kvantmekaniskt kan vibrationerna beskrivas som en harmonisk oscillator med frekvens $\omega = \sqrt{K/m}$ kvanttal $n=0,1,2,\dots$ och energier $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Kvadratiska medelavvikelsen ges då av $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \langle n \rangle$.

Beräkna $\langle x^2 \rangle$ i detta fall. Härled från detta villkoret för att oscillatoren ska kunna beskrivas som klassisk? (10 p)

4. Ett system består av ett stort antal, N , särskiljbara svagt växelverkande partiklar. Varje partikel har två tillgängliga tillstånd med energier 0 och ε .

a) Antag att systemet är slutet och att totala energin är $E=n\varepsilon$, där $0 \leq n \leq N$. Vad är då sannolikheten att en specifik partikel (säg partikel nummer 1) har energi ε ?

b) Om samma systemet i stället är i kontakt med ett värmebad vid temperatur T . Vad är temperaturen om väntevärdet av energin för systemet är $\langle E \rangle = n\varepsilon$?

Finns det några begränsningar på n i detta fall? Vad är sannolikheten att en specifik partikel har energi ε ?

(10p)

5. I en värmemaskin har man två värmereservoarer om vardera massan 1 kg och specifika värmekapaciteten $2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Reservoarerna har initialt temperaturerna -10°C respektive 70°C . Hur stort arbete kan en sådan maskin maximalt uträtta?

(10 p)

6. En jonfälla för att fånga en ensam jon ur en gas består av en liten box med ett elektriskt fält som kan binda joner. Energin för en bunden jon är $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) relativt energin då ingen jon är fångad.

Det visar sig att fällan i bland fångar två joner. På grund av den elektrostatiska repulsionen mellan jonerna fås då energin $-2\varepsilon + \Delta$ ($\Delta > 0$). Sannolikheten att fler än två joner fångas kan försummas. Jongsasen har temperatur T och kemisk potential μ .

Hur ska man justera det elektriska fältet, dvs. välja energin ε , för att maximera sannolikheten att man fångar en jon i fällan? (Dvs. inte noll eller två.) (10 p)

Lösningar tenta 050331

1. I processen att smälta 2 kg is vid 0°C genom att tillföra vattenånga som håller 100°C behöver vi betrakta tre värmetermer för att nå sluttillståndet vatten vid 0°C:

Q_1 - Omvandlingen av is vid 0°C till vatten vid 0°C

Q_2 - Omvandlingen av ånga vid 100°C till vatten 100°C

Q_3 - Avsvalningen av vatten 100°C till 0°C

Vi kan betrakta systemet med is och vattenånga som ett slutet system och då måste energin bevaras:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

De tre värmetermerna kan skrivas som:

$Q_1 = m_i l_f$ där m_i = mängden is och l_f = specifika smältsentalpin

$Q_2 = m_a l_v$ där m_a = mängden ånga och l_v = specifika ångbildningsentalpin

$Q_3 = \int m_a c_p dT = m_a c_p \Delta T$ där c_p = specifika värmekapaciteten för vatten

man får här anta att c_p är oberoende av T

a) Mängden ånga som man behöver ges nu direkt ur bevarandet av energin:

$$m_i l_f = m_a l_v + \Delta T m_a c_p$$

$$m_a = \frac{m_i l_f}{l_v + \Delta T c_p}$$

$$c_p = 4.18 \text{ kJ/kgK}$$

$$l_v = 2260 \text{ kJ/kg}$$

$$l_f = 334 \text{ kJ/kg}$$

detta ger att $m_a = 0.25 \text{ kg}$

b) För att beräkna entropiförändringen betraktar dels ändringen i entropi vid smältningen av is och dels entropiändringen för omvandlingen från ånga till vatten och avsvalning av vatten:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1(is \rightarrow vatten) + \Delta S_2(ånga \rightarrow vatten) + \Delta S_3(vatten 100^\circ \rightarrow 0^\circ C)$$

Vid en fasövergång ges entropiändringen av

$$\Delta S = \frac{ml}{T} \text{ dvs}$$

$$\Delta S_1 = \frac{m_i l_f}{T_{smält}} = 2.45 \text{ kJ/K entropin ökar vid smältning}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{m_d l_v}{T_{kond}} = -1.51 \text{ kJ/K}$$

Vid avsvälning av vatten från 100°C till 0°C ges entropiändringen av:

$$\Delta S_3 = \int_{373}^{273} \frac{m_d c_p}{T} dT = m_d c_p \ln \frac{273}{373} = -0.33 \text{ kJ/K}$$

$$\Delta S_{\text{tot}} = 0.61 \text{ kJ/K}$$

dvs entropin ökar i processen vilket vi förväntar oss eftersom det är en spontan process.

2. Vi har 4 delprocesser in en kretsprocess och ska beräkna värmeflödet för var och en och verkningsgraden för kretsprocessen. (1 mol N₂ med T_{start}=300 K)

1) Vid en isoterm kompression till 1/3 av ursprungsvolymen ges värmeflödet av:

$$Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT_{\text{start}} \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_{\text{start}} \ln \frac{1}{3} = -2.74 \text{ kJ}$$

(vi kan betrakta kvävgas som en ideal gas och använder här ideala gaslagen)

2) Vid en isobar expansion där volymen fördubblas ges värmeflödet av:

$$Q_{23} = nC_p(T_3 - T_2) \text{ där } C_p \text{ är den molära värmekapaciteten.}$$

$T_2 = T_1 = 300 \text{ K}$ (första processen isoterm) och T_3 kan vi beräkna mha ideala gaslagen :

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = 600 \text{ K (isobar process där volymen fördubblas)}$$

$$C_p = 1.0416 \text{ kJ/kgK} = 29.3 \text{ J/molK}$$

$$Q_{23} = 8.79 \text{ kJ}$$

3) Vid adiabatisk expansion tillbaka till begynnelsevolymen sker inget värmeutbyte:

$$Q_{34} = 0$$

4) Vid en isokor process tillbaka till begynnelsestillståndet ges värmeflödet av:

$Q_{41} = nC_V(T_1 - T_4)$ där C_V är den molära värmekapaciteten.

$T_1 = 300 \text{ K}$ och T_4 , som är temperaturen efter process 3,

kan vi beräkna mha sambandet för adiabatiska processer:

$pV^\gamma = \text{konst}$ och ideala gaslagen,

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1} \quad \text{där } \gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1.4 \text{ (ur tabellsamling)}$$

$$\text{och } V_3 = 2V_2 = \frac{2}{3}V_1$$

$$\Rightarrow T_4 = 510 \text{ K}$$

$$C_V = C_p / 1.4 = 20.9 \text{ J/molK}$$

$$Q_{41} = -4.39 \text{ kJ}$$

Verkningsgraden för processen ges av $\eta = \frac{W}{Q_{in}}$

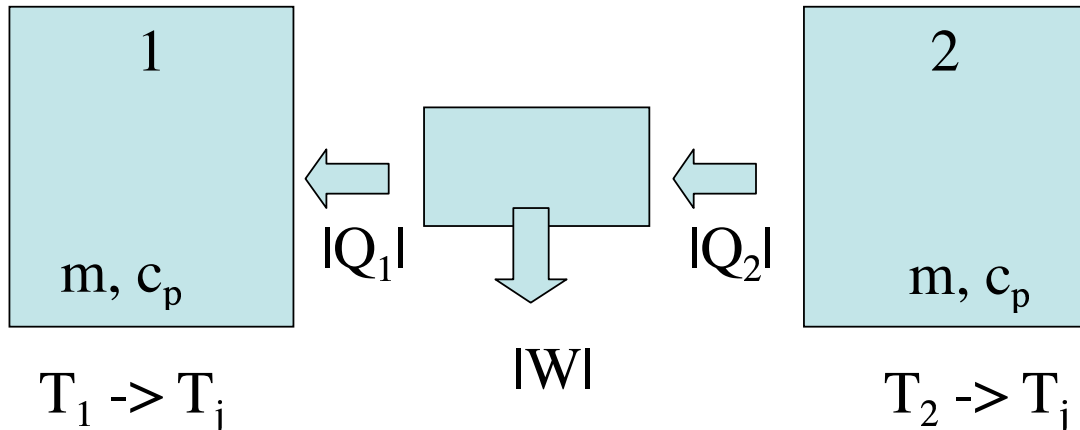
Där W är det totala nyttiga arbetet som utförs och Q_{in} den värme som tillförs.

I kretsprocessen tillförs endast värme i steg 2 dvs $Q_{in} = Q_{23} = 8.79 \text{ kJ}$.

Arbete utförs i steg 1, 2 och 4 (inget arbete vid adiabatisk expansion av ideal gas). Det totala arbetet som utförs i kretsprocessen ges då av: $W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{41} = 1.66 \text{ kJ}$

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = 0.19$$

5.



I värmemaskinen har vi två kroppar om vardera 1 kg och $c_p = 2 \text{ kJ/kgK}$. Under det att maskinen arbetar kommer temperaturen i vardera kropp att ändras tills det att vi når jämvikt, $T = T_j$. Det arbete som vi får ut under en sådan process ges av:

$$W = Q_2 - Q_1 = mc_p(T_2 - T_j) - mc_p(T_j - T_1) = mc_p(T_1 + T_2 - 2T_j)$$

Maximalt arbete får vi ut om processen är reversibel dvs att $\Delta S = 0$. Vi behöver alltså bestämma det T_j för vilket processen är reversibel.

Entropiändringen för varje del ges av:

$$dS_i = \frac{dQ_i}{T} = \frac{mc_p dT}{T}, \quad i=1,2$$

vi får då att:

$$\Delta S_1 = mc_p \ln \frac{T_j}{T_1} \quad \text{och} \quad \Delta S_2 = mc_p \ln \frac{T_j}{T_2}$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc_p \left(\ln \frac{T_j}{T_1} + \ln \frac{T_j}{T_2} \right) = mc_p \ln \frac{T_j^2}{T_1 T_2} = 0$$

$$\text{vilket ger att } T_j = \sqrt{T_1 T_2}$$

och vi får det maximala arbetet till:

$$W = mc_p(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = 10,6 \text{ kJ}$$

Uppgift 3

a) Energin för fjädern ges av $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$. Eftersom den kan betraktas som klassisk kan vi använda ekvipartitionsteoremet som ger

$$\langle \frac{1}{2}Kx^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

dvs,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{K}.$$

b) Givet $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \langle n \rangle$ där $\omega = \sqrt{K/m}$. Beräkna alltså $\langle n \rangle$ för en harmonisk oscillator.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = \frac{\sum n e^{-\beta \hbar \omega n}}{\sum e^{-\beta \hbar \omega n}} = -\frac{1}{\hbar \omega} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z',$$

där

$$Z' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}.$$

Vi får alltså

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \langle n \rangle = \dots = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Klassiska gränsen svarar rimligtvis mot höga temperaturer, dvs $k_B T \gg \hbar \omega$ eller $\beta \hbar \omega \ll 1$. I denna gränsen har vi

$$\langle x^2 \rangle \approx \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{\beta \hbar \omega} = \frac{k_B T}{m\omega^2} = \frac{k_B T}{K}$$

vilket är samma som i uppgift a).

Uppgift 4

a) Vi använder mikrokanonisk fördelning där alla tillgängliga tillstånd är lika sannolika. Antalet tillstånd med energin $n\epsilon$ ges av $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

Sannolikheten att partikel 1 har energin ϵ ges då av antalet tillstånd där partikel 1 har energin ϵ (dvs, resten av systemet har energin $(n-1)\epsilon$) delat med totala antalet tillstånd,

$$P_1(\epsilon) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{N!}{n!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n}{N}$$

b) Här använder vi kanonisk fördelning. Eftersom partiklarna är oberoende och särskiljbara ges väntevärdet av energin av $E = -N \frac{\partial}{\partial \beta} Z_1$, där $Z_1 = 1 + e^{-\beta\epsilon}$ är tillståndssumman för en partikel. Vi får alltså

$$E = \frac{N\epsilon}{e^{\beta\epsilon} + 1} = n\epsilon$$

om $e^{\beta\epsilon} + 1 = \frac{N}{n}$ eller

$$k_B T = \epsilon / \ln\left(\frac{N}{n} - 1\right).$$

Eftersom $T \geq 0$ är n begränsat enligt $n \leq N/2$.

Sannoliketen för att en specifik partikel har energi ϵ ges av

$$P_1(\epsilon) = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z_1} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1} = \frac{n}{N}.$$

Uppgift 6

Vi använder stor kanonisk fördelning för att behandla fällan som är i ett partikel och värmebad. Dom tre tillstånden med noll, en eller två partiklar har sannolikheter

$$\begin{aligned}P_0 &= 1/\mathcal{Z} \\P_1 &= e^{\beta(\epsilon+\mu)}/\mathcal{Z} \\P_2 &= e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)}/\mathcal{Z},\end{aligned}$$

där

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{\beta(\epsilon+\mu)} + e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)}.$$

Vi ska maximera P_1 . Beräkna $\frac{\partial P_1}{\partial \epsilon}$ eller något enklare

$$\frac{\partial \ln P_1}{\partial \epsilon} = \beta - \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \epsilon} = \dots = \frac{\beta}{\mathcal{Z}}(1 - e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)})$$

Ett max (eller min) finns alltså och ges av $(1 - e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)}) = 0$ eller

$$\epsilon = \frac{\Delta}{2} - \mu$$

Att detta är ett maximum bekräftas genom $\left. \frac{\partial^2 \ln P_1}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=\frac{\Delta}{2}-\mu} = -\frac{2\beta^2}{\mathcal{Z}} < 0$