

Chalmers Tekniska Högskola
och Göteborg Universitet
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik
Aleksandar Matic/Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Onsdagen den 15 december 2004 8.30-12.30 i V-huset.

Examinatorer: Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sålda via Cremona), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk Fördelning", egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift), valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift adderas enligt tidigare offentliggjord formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Lösningar finns på kurshemsidan efter tentans slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen 10:e januari.

Rättningsgranskning: Måndagen 17:e januari 12.00-13.00 i rum O7109B

1. En mol kolmonoxidgas hålls i en behållare vid konstant tryck $P=0.1\text{MPa}$. Kolmonoxid har rotationsexcitationer $\varepsilon_r^{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$ som är $2J+1$ -faldigt degenererade med tröghetsmoment I och motsvarande energi $\hbar^2/2I = 2.4 \cdot 10^{-4}$ eV. Molekylen har också icke-degenererade vibrationsmoder med energi $\varepsilon_r^{\text{vib}} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + r\right)$ där $\hbar\omega=0.27$ eV.

Härled ett uttryck för gasens värmekapacitet under antagandet att den kan behandlas som en klassisk idealgas. Förenkla uttrycket så att det gäller i temperaturintervallet 100K till 1000K (kokpunkten är 81K) och skissa resultatet i en graf. (10p)

2. För att bestämma C_p/C_v för en gas genomför man följande experiment: En mol gas, som initialt har temperaturen $T_1=90^\circ\text{C}$, expanderas adiabatiskt till den dubbla volymen. Därefter komprimeras gasen isotermiskt till ursprungsvolymen. Den avgivna värmemängden uppmäts till $Q=1.33$ kJ. Gasen kan antas vara ideal.

a) Rita in processen i ett P-V diagram. (2p)

b) Bestäm C_p/C_v för gasen. (8p)

3. I en ångturbin expanderar ånga av 400°C , 50 bar isentropiskt till 8.5 bar. Expansionens slutpunkt befinner sig precis på ångkurvan. Ångan kondenseras sedan till vatten under samma tryck. Beräkna följande uppgifter för denna ångturbin med hjälp av tabellsamlingen:

- Hur stort arbete får man ut från turbinen per kg ånga. (2p)
- Pumparbetet per kg vatten som matarpumpen måste utföra. Processen i matarpumpen är isentropisk. (2p)
- Tillförd värmeenergi i ångpannan per kg ånga. (2p)
- Processens verkningsgrad. (2p)
- Rita in processen i ett h-s diagram. (2p)

4. Vid höga temperaturer joniseras atomärt väte till ett plasma bestående av väteatomer, protoner och elektroner med täthet n_H , n_p och n_e . (Vi antar att tryck och temperatur är sådant att tätheten av vätemolekyler H_2 är försumbar och att väteatomen är i sitt grundtillstånd.) I jämvikt gäller då $\mu_H = \mu_p + \mu_e$. Härled ett uttryck (Sahas ekvation) för temperaturberoendet av n_p^2/n_H i termer av elektronmassan, m_e , och joniseringsenergin, E_H , för väte. Plasman kan beskrivas som en icke-relativistisk klassisk idealgas. (10p)

5. I ett tidigt skede i universums utveckling bildades väteatomer från protoner och elektroner och frigjorde dom fotoner som vi idag kan uppfatta som den kosmiska bakgrundsstrålningen. Denna beskrivs väl som svartkroppsstrålning. Idag är temperaturen för denna fotongas $T_0 = 2.7\text{K}$ medan den vid tiden för den så kallade frikopplingen var $T_f = 3700\text{K}$.

Hur stor är universums relativa expansion sedan frikopplingen? Man kan anta att ett effektivt gravitationellt tryck uppväger det mekaniska trycket från fotongasen så att expansionen sker adiabatiskt och reversibelt.

Beräkna också den relativa ändringen i fotontäthet. (10p)

6. För att bestämma den molära sublimationsentalpin för vatten har man mätt upp ångtrycket som funktion av temperaturen enligt följande tabell:

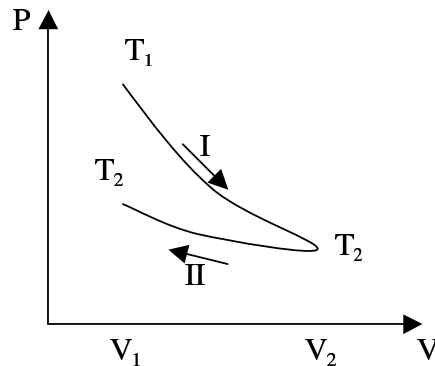
Temp ($^{\circ}\text{C}$)	Ångtryck (mmHg)
-19.6	0.806
-20.0	0.776
-20.4	0.747

Beräkna med hjälp av dessa data den molära sublimationsentalpin för vatten vid -20°C . Du kan anta att vattenånga i jämvikt med is kan betraktas som en ideal gas. (10 p)

Lösningar

2.

a)



b)

Delprocess I:

Adiabatisk expansion - inget värmeutbyte med omgivningen, $Q_1=0$.

För en adiabatisk process gäller $PV^\gamma = \text{konstant}$, där $\gamma = C_p/C_v$

För en ideal gas gäller $PV = nRT \Rightarrow P = nRT/V$

Tillsammans ger dessa för en mol ($n=1$) $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ (ty R-konstant).

Vi kan nu räkna ut temperaturen T_2 ur $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ och $V_2 = 2V_1$ (givet i uppgiften)

$T_2 = T_1 / (2^{\gamma-1})$ ($T_1 = 90^\circ\text{C} = 363 \text{ K}$ givet i uppgiften)

Delprocess II:

Isoterm kompression, värme, Q_2 , måste avges till omgivningen,

Första huvudsatsen: $\Delta E = Q_2 + W_2$

Isoterm process: $\Delta E = 0$ för en ideal gas, inre energin bara beroende av temperaturen.

$\Rightarrow Q_2 = -W_2$

$W_2 = -\int p dV$; $P = nRT/V$ för en ideal gas

för en mol ($n=1$)

$$Q_2 = RT_2 \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_2 \int_{2V_1}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{1}{2}$$

med T_2 från uttrycket ovan får vi då:

$$Q_2 = -\frac{RT_1 \ln 2}{2^{\gamma-1}}$$

Givet i uppgiften är att avgiven värmemängd $Q=1.33$ kJ. Eftersom $Q_1=0$ så blir $Q=-Q_2$ (observera: Q - avgiven värme och Q_2 definieras positiv när värme ges till systemet). Med lite algebra får man då fram:

$$\gamma = C_P/C_V = 1 + \frac{\ln\left(\frac{RT_1 \ln 2}{Q}\right)}{\ln 2} = 1.65$$

Svar: $C_P/C_V=1.65$

3. a) Arbete som man får ut ur turbinen är skillnaden i specifik entalpi mellan start och slutläget.

I startläget har vi överhettad ånga av 400°C och 50 bar ($=5.0$ Mpa). Ur tabellen A.1.3, fås att:

$$h_{\text{start}}=3195.7 \text{ kJ/kg}$$

I slutläget befinner vi oss på ångkurvan, dvs vi har mättad ånga, vid 8.5 bar ($=0.85$ Mpa). Ur tabell A.1.2 får vi då:

$$h_{\text{slut}}=2771.6 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Arbetet blir då: } W_T=3195.7-2771.6=424.1 \text{ kJ/kg}$$

b) I matarpumpen så ökas trycket på vattnet från 0.85 MPa och 5.0 Mpa isentropiskt. I den här processen går vi från mättat vatten, dvs. vätskekurvan, till vatten under övertryck. Arbetet i pumpen blir skillnaden mellan specifika entalpierna i start och sluttillstånd:

$$\text{Ur tabell A.1.2 får vi } h_{\text{start}}=732.22 \text{ kJ/kg}$$

Ur tabellen A.1.4 (compressed liquid) får vi h_{slut} . Men för att veta vilken temperatur vi ska gå in på utnyttjar vi att vi vet att processen är isentropisk, dvs. entropin är konstant. I startpunkten är specifik entropin $s=2.0710$ kJ/kg, ur tabell A.1.2. I tabell A.1.4 får vi nu interpolera mellan temperaturerna 160°C och 180°C och får fram $h_{\text{slut}}=737.3$ kJ/kg.

$$\text{Pumparbetet blir då: } W_p=737.3-732.22=5.1 \text{ kJ/kg}$$

c) I ångpannan går vi nu från vatten under övertryck till överhettad ånga, dvs. läget vi hade innan expansionen i turbinen. Det tillförda värmets, Q , blir då skillnaden mellan de specifika entalpierna i de två lägena.

$$h_{\text{start}} \text{ är samma som } h_{\text{slut}} \text{ i uppgift b): } h_{\text{start}}=737.3 \text{ kJ/kg}$$

$$h_{\text{slut}} \text{ är samma som } h_{\text{start}} \text{ i uppgift a): } h_{\text{slut}}=3195.7 \text{ kJ/kg}$$

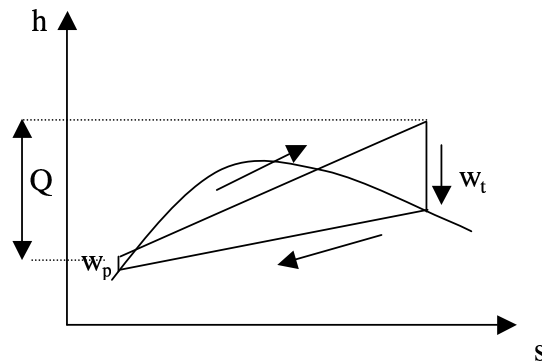
$$\text{Tillförda värmets blir nu } Q=3195.7-737.3=2458.4 \text{ kJ/kg}$$

d) Processens verkningsgrad, η , ges av

$$\eta = \frac{W_t - W_P}{Q} = \frac{424.1 - 5.1}{2458.4} = 0.17$$

notera: Processens verkningsgrad är rätt låg vilket bl. a beror på att vi avslutade expansionen vi ångkurvan och inte lät den gå in i tvåfasområdet.

e)



6. För att räkna ut sublimationsentalpin använder vi oss av Clausius-Clapeyrons ekvation:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_s}{T(v_d - v_{is})}, \text{ där } l_s - \text{molära sublimationsentalpin,}$$

v_d - specifika volymen för ånga, v_{is} - specifika volymen för is

$v_d \gg v_{is}$ vilket gör att vi kan skriva:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_s}{Tv_d} = \frac{l_s P}{T^2 R}, \text{ där sista steget förlor ur ideala gaslagen.}$$

vi kan nu skriva

$$\frac{dP}{P} = \frac{l_s}{R} \frac{dT}{T^2} \text{ inegrering av detta uttryck ger nu:}$$

$$\ln P = -\frac{l_s}{R} \cdot \frac{1}{T} + \text{konstant}$$

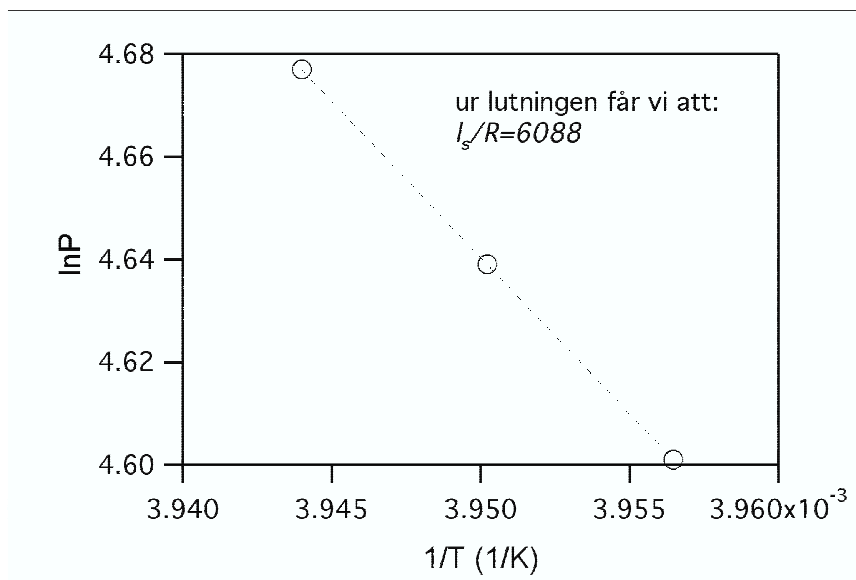
vi ser nu att $\ln P$ är proportionellt mot $\frac{1}{T}$ där

proportionalitetskonstanten ges av $-\frac{l_s}{R}$

Om vi nu gör en graf över $\ln P$ mot $1/T$ kan vi alltså bestämma l_s

Givet i uppgiften är:

Temp (°C)	Temp (K)	1/T (1/K)	P (mmHg)	P (Pa)	lnP
-19.6	253.55	$3.9440 \cdot 10^{-3}$	0.806	107.44	4.677
-20.0	253.15	$3.9502 \cdot 10^{-3}$	0.776	103.44	4.639
-20.4	252.75	$3.9565 \cdot 10^{-3}$	0.747	99.58	4.601



Detta ger nu:

$$l_s = R \cdot 6088 = 50.6 \text{ kJ/mol}$$

Svar: Den molära sublimationsentalpin för vatten är $l_s=50.6$ kJ/mol.

Uppgift 1

Värmekapaciteten för en mol idealgas vid konstant tryck fås från $C_p = C_v + R$ där

$$C_v = \left(\frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad \text{och} \quad E = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V,N} .$$

För idealgas har vi

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} Z_1^N(T, V) \quad \text{med} \quad Z_1 = Z_1^{\text{tr}} Z_1^{\text{rot}} Z_1^{\text{vib}} ,$$

så att

$$E = E^{\text{tr}} + E^{\text{rot}} + E^{\text{vib}} .$$

För translationsrörelsen har vi allmänt $E^{\text{tr}} = \frac{3}{2} NkT$ medans vi för rotations- och vibrationsfrihetsgraderna skriver tillståndssummorna

$$Z_1^{\text{rot}} = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-\beta \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)} \quad \text{och}$$

$$Z_1^{\text{vib}} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (r + \frac{1}{2})} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} ,$$

vilket är så långt vi kommer för godtyckliga temperaturer.

I temperaturintervallet 100K till 1000K kan vi förenkla detta betydligt.

Vi har $T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2Ik} \approx 2.8K \ll T$ vilket innebär att vi kan använda ekvipartitionsteoremet på två rotations frihetsgrader per molekyl, som ger $E^{\text{rot}} = NkT$. (Alternativt kan man visa detta direkt genom att skriva om summan Z_1^{rot} som en integral.)

För vibrationsfrihetsgraderna har vi $T_{\text{vib}} = \hbar \omega / k \approx 3140K \gg T$ så att vi kan Taylorutveckla Z_1^{vib} och få $E^{\text{vib}} = NkT_{\text{vib}} (\frac{1}{2} + e^{-T_{\text{vib}}/T})$. (För $T_{\text{vib}}/T \geq 3$ är $e^{-T_{\text{vib}}/T} \leq .05$ så vi kan säkert försumma högre ordnings termer som är $\mathcal{O}(e^{-2T_{\text{vib}}/T})$.)

Sluttuttrycket för värmekapaciteten blir således

$$C_p = R \left\{ \frac{7}{2} + \left(\frac{T_{\text{vib}}}{T} \right)^2 e^{-T_{\text{vib}}/T} \right\}$$

Uppgift 4

Beräkna kemisk potential ur

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial N} \right)_{T,V}$$

För idealgas med $Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} Z_1^N(T, V)$ fås genom användning av Stirlings formel

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N},$$

vilket från jämviktsvilkoret $\mu_H = \mu_p + \mu_e$ ger

$$\frac{Z_1^H}{N_H} = \frac{Z_1^p Z_1^e}{N_p N_e}.$$

För att ta hänsyn till joniseringsenergin skriver vi energin för en partikel såsom

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_0,$$

där E_0 är viloenenergin för partikeln och $E_H = E_0^p + E_0^e - E_0^H$. (Här har vi valt $E_H > 0$, dvs joniseringsenergin.) Vi kan då skriva

$$Z_1 = g \frac{V}{h^3} 4\pi \int p^2 dp e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + E_0)} = e^{-\beta E_0} g V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2},$$

där g är degenerationsgraden vilken är 2 för elektron och proton och $2 \times 2 = 4$ för väteatomen.

Vi får då slututtrycket

$$\frac{n_p}{n_H} = \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\beta E_H}$$

där vi har försummat skillnaden i massa mellan proton och väteatom och där vi har använt $N_p = N_e$ eftersom både produceras i lika stort antal när väteatomen joniseras.

Uppgift 5

Adiabatisk och reversibel process innebär isentropisk. För svartkroppsstrålning gäller

$$S = \frac{4}{3}aVT^3,$$

så att expansionen ges av

$$\frac{V_0}{V_f} = \left(\frac{T_f}{T_0}\right)^3 = 2.57 \cdot 10^9$$

Antalet fotoner ges av

$$N = \int_0^\infty \frac{f(\omega) d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},$$

där tillståndstätheten ges av $f(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$. Genom en substitution $x = \beta\hbar\omega$ fås då

$$N = V \frac{k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \sim VT^3 \sim S,$$

där vi ser att medelantalet fotoner är konstant så att tätheten skalar som $1/V$.

Svar: Volymen har expanderat med en factor $2.6 \cdot 10^9$ och fotontätheten har minskat med samma faktor.