

Dugga Termodynamik och statistisk mekanik (FTF141/FYP300)

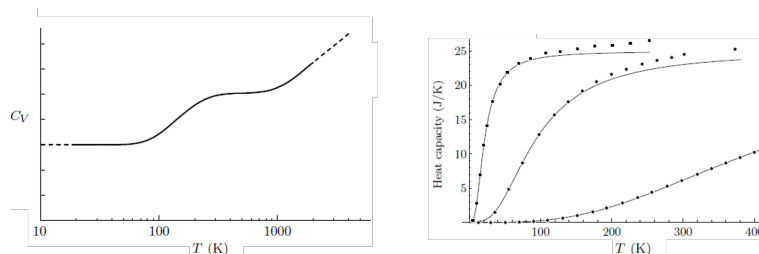
Datum: 3 oktober 2025

Examinator: Henrik Grönbeck

Hjälpmedel: Physics Handbook

Maximalt antal poäng på duggan är 15. Poäng på duggan omvandlas till bonuspoäng genom division med 3. Maximalt antal bonuspoäng är 5.

1. Figuren nedan visar temperaturberoendet för värmekapaciteten (per mol) vid konstant volym för H_2 (till vänster) och tre fasta material (till höger).
 - (a) Förklara anledningen till temperaturberoendet för värmekapaciteten för H_2 och de fasta materialen. (2p)
 - (b) Förklara anledningen till skillnaden i temperaturberoendet för de tre fasta materialen. (1p)
 - (c) Varför är värmekapaciteten vid konstant volym mindre än värmekapaciteten vid konstant tryck för en ideal gas? (1p)



Lösning:

- (a) Generellt har värmekapaciteten ett temperaturberoende som reflekterar vilka frihetsgrader som kan lagrar energi. För H_2 är vid låga temperaturer translationer exciterade. Translationer har tre frihetsgrader vilket ger att c_V är $3/2 R$. Vid högre temperaturer kan energi lagras även i två rotationer vilket ger ett c_V på $5/2 R$. Vid väldigt höga temperaturer kan energi lagras även i de två vibrationsfrihetsgraderna (potentiell och kinetisk energi) vilket ger ett gränsvärde vid höga temperaturer på $7/2 R$. (En gas kondenserar vid tillräckligt låga temperaturer så värdet för c_V är inte $3/2 R$ när temperaturen går mot 0. För fasta material finns 6 frihetsgrader från vibrationer i tre riktningar. Detta ger ett gränsvärde på $3 R$ vid höga temperaturer när alla vibrationer är exciterade. Vid låga temperaturer är inte vibrationerna exciterade vilket ger ett gränsvärde där c_V går mot 0 när temperaturen går mot 0.

- (b) De tre materialen har olika karaktäristiska vibrationsfrekvenser vilket ger att det krävs olika mycket energi för att gör excitationer. (1p)
- (c) Vid konstant tryck görs ett arbete mot omgivningen (trycket) vilket kräver energi. Mer värme krävs för att höja temperaturen på systemet. (1p)

2. För ett system beskrivs tryck (P) och temperatur (T) beroendet av Gibbs fria energi (G) av:

$$G(P, T) = RT \ln\left[\frac{\alpha P}{(RT)^{5/2}}\right]$$

α och R är konstanter. Tag fram ett uttryck för värmekapaciteten vid konstant tryck. (2p)

Lösning:

Vi har den termodynamiska identiteten

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN$$

Vid konstant tryck och antal partiklar:

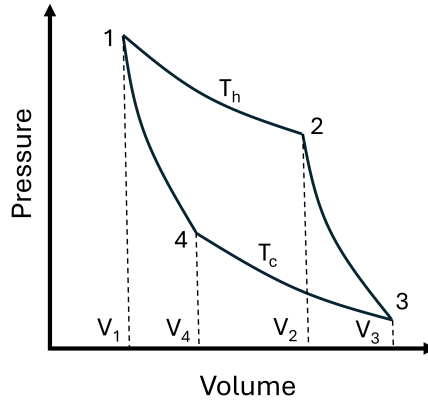
$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,N} = \frac{5}{2}R - R \ln \frac{\alpha P}{(RT)^{5/2}}$$

Värmekapaciteten vid konstant tryck är:

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{5}{2}R$$

3. Betrakta en värmemotor som följer Carnotprocessen. Carnotprocessen skissas i figuren nedan och består av två isotermer ($1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$) och två adiabatiska processer ($2 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1$).

- Varför är Carnotprocessen konceptuellt viktig? (1p)
- Ange för de fyra processerna om värme flödar till eller från arbetsmediet. (1p)
- Ange för de fyra processerna om arbete sker på eller av arbetsmediet. (1p)
- Beräkna nettoarbetet för kretsprocessen. (1p)



Lösning:

- Carnotprocessen konceptuellt viktig eftersom den ger det maximala arbetet för en värmemotor.
- Värme flödar till arbetsmediet för $1 \rightarrow 2$. Värme flödar från arbetsmediet för $3 \rightarrow 4$. $2 \rightarrow 3$ och $4 \rightarrow 1$ är adiabatiska processer. För dessa processer sker inget värmeutbyte.
- Arbete utförs av arbetsmediet i $1 \rightarrow 2$ och $2 \rightarrow 3$ (expansion). Arbete utförs på arbetsmediet i $3 \rightarrow 4$ och $4 \rightarrow 1$ (kompression).
- Verkningsgraden ges av:

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

Nettoarbetet ges av:

$$W_{\text{net}} = e|Q_{12}|$$

För den isoterma processen gäller:

$$|Q_{12}| = |W_{12}| = nRT_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Vilket ger:

$$W_{\text{net}} = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)nRT_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

4. Multipliciteten som funktion av energi U , volym V och antal atomer N för en en-atomig ideal gas kan skrivas:

$$\Omega(U, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N}$$

h är Plancks konstant och m är massan för en gasatom. Använd detta uttryck för att härleda ideala gaslagen. (2p)

Lösning:

Enligt Boltzmanns definition ges entropin av:

$$S = k_B \ln \Omega(U, V, N)$$

Entropin beror enligt uttrycket för multipliciteten på U , N och V . Trycket erhålles från entropin enligt:

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, N}$$

Från uttrycket för entropin, bryt ut det som beror av V :

$$S = k_B \ln \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N} + k_B N \ln V$$

Ur detta erhålles:

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, N} = \frac{N k_B T}{V}$$

Vilket ger ideala gaslagen:

$$PV = N k_B T$$

5. Betrakta jämvikten mellan vätske- och gasfas för ett ämne. Clausius-Clapeyrons förhållande gäller på mättnadslinjen, det vill säga linjen i P-T fasdiagrammet där vätske- och gasfaserna är i jämvikt. Clausius-Clapeyrons förhållande är:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_{\text{gas}} - V_{\text{liq}})}$$

L är förångningsvärmets per mol, V_{gas} är volymen per mol gas, V_{liq} är volymen per mol vätska.

- (a) Analysera Gibbs fria energi på mättnadslinjen för att härleda Clausius-Clapeyrons förhållande. Tips: Använd den termodynamiska identiteten. (2p)
- (b) Antag att gasen kan beskrivas som en ideal gas och att densiteten för gasen är mycket lägre än densiteten för vätskan. Visa under dessa förutsättningar att

$$P \propto \exp(-L/RT). \quad (1p)$$

Lösning:

- (a) Vid fasjämvikt mellan två faser 1 och 2 gäller (per mol):

$$g_1 = g_2$$

Längs med fasjämviktlinjen gäller då:

$$dg_1 = dg_2$$

Används den termodynamiska identiteten kan detta skrivas (konstant antal partiklar):

$$-s_1dT + v_1dP = -s_2dT + v_2dP$$

Vilket kan skrivas:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{(s_2 - s_1)}{v_2 - v_1} = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{Q}{T\Delta v} = \frac{L}{T\Delta v}$$

- (b) Om gasen kan antas vara en ideal gas har vi:

$$Pv_{\text{gas}} = k_B T$$

Eftersom densiteten för gasen är liten i förhållande till vätskan är $\Delta V \approx v_{\text{gas}}$ och Clausius-Clapeyrons förhållande skrivas:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{L}{k_B T^2}$$

Vilket kan skrivas:

$$\frac{1}{P} dP = \frac{L}{k_B T^2} dT$$

Om vi integrerar och tar resultaten i exponenten erhålles:

$$P \propto \exp(-L/RT)$$