

Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Måndagen den 23 sep. 2019, kl 15.15-17.00, HA1

Hjälpmedel: Inga. Räknare är ej tillåtet hjälpmedel.

Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2019/2020.

Liten formelsamling

Allmänt:

$$S = k \ln \Omega$$
$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

För en idealgas gäller:

$$PV = NkT$$
$$U = U(T)$$
$$C_P(T) - C_V(T) = Nk$$
$$PV = \text{konst. (isoterm process)}$$

om dessutom temperaturoberoende värmekapacitet

$$U = \frac{f}{2}NkT \quad (f \text{ antal frihetsgrader})$$
$$PV^\gamma = \text{konst. (isentropisk process)}$$
$$\gamma = C_P/C_V$$

Samband:

$$nR = Nk$$
$$R = N_A k$$

Stirlings formel:

$$\ln N! \approx N \ln N - N, \quad N \gg 1$$

1. I "Physics Handbook" kan man hämta följande data för fem olika gaser.

| Gas | C_P (kJ/kg·K) | C_P/C_V |
|-----|-----------------|-----------|
| A | 1.51 | 1.18 |
| B | 0.92 | 1.401 |
| C | 5.2 | 1.66 |
| D | 1.71 | 1.26 |
| E | 0.50 | 1.35 |

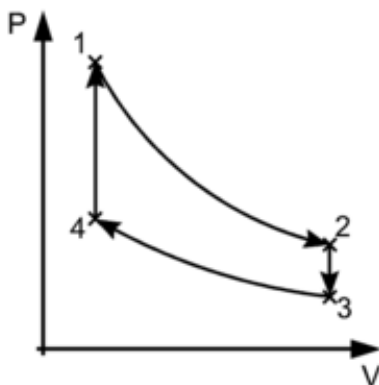
Värdena gäller vid rumstemperatur. En av dessa är heliumgas, vilken? Redogör kort för hur du har resonerat!

- Ett system består av N identiska delsystem. Varje delsystem kan befinna sig i två olika energitillstånd, med energin 0 respektive ΔE . Systemets totala energi är då

$$U = n\Delta E$$

där n är antalet delsystem som befinner sig i det övre energitillståndet. Teckna ett uttryck för systemets multiplicitet $\Omega(N, n)$! Utgående från detta uttryck bestäm systemets energi $U(T)$ som funktion av temperaturen T ! Du får anta att N , n och $(N - n)$ alla är stora tal.

- En gas är innesluten i en behållare vars volym kan varieras. Gasen genomgår en cyklisk process, den så kallade Stirlingcykeln. Den består av två isotermer (konstant temperatur) med temperaturerna T_H (hög temperatur) respektive T_L (låg temperatur), samt två isokorer (konstant volym) med volymerna V_1 (liten volym) respektive V_2 (stor volym). Se figur. Bestäm för varje delprocess om värme tillförs eller bortförs



från den inneslutna gasen! Bestäm därefter storleken på värmets vid de fyra olika delprocesserna! Detta får uttryckas i T_H , T_L , V_1 , V_2 samt antalet mol n av den inneslutna gasen. Du får behandla den inneslutna gasen som en idealgas med f frihetsgrader.

- Betrakta två system A och B . Systemen har båda den temperaturberoende värmekapaciteten $C = a$, där a är en konstant. Från början har system A begynnelsestemperaturen $2T_0$ (K) och system B begynnelsestemperaturen T_0 (K). Vi utnyttjar nu dessa två system för att utvinna arbete med hjälp av en värmemotor. Hur mycket arbete kan maximalt utvinnas fram till dess att systemen antagit en gemensam sluttemperatur?

LÖSNINGAR TILL DUGGA 1, 2019–09–23

FTF140 TERMODYNAMIK OCH STATISTISK MEKANIK

Magnus Rahm

2019–09–23

Uppgift 1

Heliumgas har tre frihetsgrader (translation). Vi förväntar oss därför att

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{3+2}{3} \approx 1,67. \quad (1)$$

Gas C tycks alltså vara helium.

Uppgift 2

Multipliciteten $\Omega(N, n)$ är svaret på frågan ”på hur många sätt kan vi välja n delsystem av N möjliga?”. Lösningen är en binomialkoefficient,

$$\Omega(N, n) = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (2)$$

Vi tar logaritmen av båda led och utnyttjar Stirlings formel,

$$\begin{aligned} \ln \Omega(N, n) &= \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! \\ &\approx N \ln N - N - n \ln n + n - (N-n) \ln(N-n) + N - n \\ &= N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n). \end{aligned} \quad (3)$$

(Observera att vi inte vet något om hur stor kvoten n/N är, så vi bör inte försöka Taylorutveckla någon logaritm.)

För att finna $U(T)$ kan vi utnyttja att

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N = \left(\frac{\partial(k \ln \Omega)}{\partial U} \right)_N = \frac{\partial n}{\partial U} \left(\frac{\partial(k \ln \Omega)}{\partial n} \right)_N = \frac{k}{\Delta E} \left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial n} \right)_N \\ &= \frac{k}{\Delta E} \left(-\ln n - \frac{n}{n} + \ln(N-n) + \frac{N-n}{N-n} \right) \\ &= \frac{k}{\Delta E} \ln \frac{N-n}{n} \\ &= \frac{k}{\Delta E} \ln \left(\frac{N}{n} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Vi kan nu lösa ut n ,

$$\frac{N}{n} = 1 + e^{\frac{\Delta E}{kT}} \Rightarrow n = \frac{N}{1 + e^{\frac{\Delta E}{kT}}}. \quad (5)$$

Eftersom $n = U/\Delta E$ får vi

$$U(T) = \frac{N\Delta E}{1 + e^{\frac{\Delta E}{kT}}}. \quad (6)$$

Det är en god idé att kontrollera uttrycket i gränserna $T \rightarrow 0$ och $T \rightarrow \infty$. För låga temperaturer blir exponentialfunktionen i nämnaren mycket stor, så att $U(T \rightarrow 0) = 0$, som förväntat. Vid höga temperaturer går exponentialfunktionen mot 1, och vi får $U(T \rightarrow \infty) = N\Delta E/2$. Det betyder att hälften av delsystemen befinner sig i det högre energitillståndet och hälften i det lägre. Med andra ord är båda tillstånd lika sannolika för ett givet delsystem. I statistik mekanik-delen av kursen kommer vi enklare förstå varför det är förväntat.

Uppgift 3

Isotermer Låt oss börja med de två isoterma processerna. Värmet beräknas enklast genom att först beräkna ändring i inre energi samt arbete, och sedan utnyttja första huvudsatsen,

$$Q = \Delta U - W. \quad (7)$$

Notera att vi här har valt den vanliga konventionen att värme/arbete är positiva när de tillförs/uträttas på systemet. I en isoterm process i en ideal gas sker ingen ändring i inre energi, $\Delta U = 0$, vilket enklast förstås genom att den inre energin bara beror på temperaturen som ju är oförändrad. Arbetet kan beräknas enligt

$$W = - \int_{V_{\text{start}}}^{V_{\text{slut}}} P dV = -nRT \int_{V_{\text{start}}}^{V_{\text{slut}}} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_{\text{slut}}}{V_{\text{start}}} \quad (8)$$

där vi i andra steget utnyttjade ideala gaslagen och det faktum att temperatur och substansmängd är konstanta i processen.

För värmet får vi alltså

$$Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (9)$$

och

$$Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4} = nRT_H \ln \frac{V_4}{V_3} = -nRT_L \ln \frac{V_2}{V_1} < 0. \quad (10)$$

Tecknena innebär att värme har tillförts gasen i $1 \rightarrow 2$ och bortförts i $3 \rightarrow 4$.

Isokorer I de isokora proceserna sker inget arbete (det sker ju ingen volymförändring), så $Q = \Delta U$ (ekvivalent kan vi använda oss direkt av $Q = C_V \Delta T$). För ideal gas är $U = \frac{f}{2}nRT$, så vi får

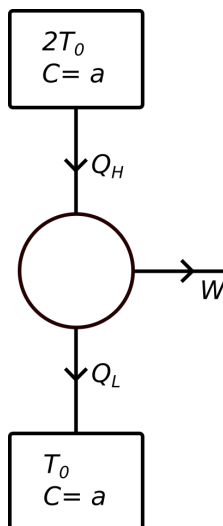
$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \frac{f}{2}nR(T_L - T_H) < 0 \quad (11)$$

och

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} = \frac{f}{2} n R (T_H - T_L) > 0 \quad (12)$$

Tecknena innebär att värme har bortförts från gasen i $2 \rightarrow 3$ och tillförts i $4 \rightarrow 1$.

Uppgift 4



Vi definierar värme och arbete med riktningar enligt figur ovan. Första huvudsatsen för motorn (cirkeln) ger

$$W = Q_H - Q_L. \quad (13)$$

Med sluttemperatur T_f får vi att

$$Q_H = -a(T_f - 2T_0), \quad (14)$$

$$Q_L = a(T_f - T_0). \quad (15)$$

Skillnaden i tecken kommer av att vi definierat värme med olika tecken (=olika riktning på pilarna) i figuren ovan. Notera att både Q_H och Q_L är positiva med denna definition.) Insatt i Eq. (13) får vi

$$W = a(3T_0 - 2T_f). \quad (16)$$

För att bestämma T_f kan vi utnyttja andra huvudsatsen. Maximalt arbete innebär att entropiförändringen är 0,

$$\int_{2T_0}^{T_f} \frac{a dT}{T} + \int_{T_0}^{T_f} \frac{a dT}{T} = 0 \quad (17)$$

så att

$$a \left(\ln \frac{T_f}{2T_0} + \ln \frac{T_f}{T_0} \right) = 0. \quad (18)$$

Ekvationen kan lösas med avseende på T_f ,

$$T_f = \sqrt{2}T_0. \quad (19)$$

Insatt i Eq. (16) får vi maximalt arbete

$$\boxed{W = (3 - 2\sqrt{2})T_0a.} \quad (20)$$