

## Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

**Tid och plats:** Måndagen den 24 sep. 2018, kl 15.15-17.00, HA1

**Hjälpmedel:** Inga. Räknare är ej tillåtet hjälpmedel.

**Bedömning:** Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2018/2019.

### Liten formelsamling

Allmänt:

$$\begin{aligned} S &= k \ln \Omega \\ dS &= \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN \end{aligned}$$

För en idealgas gäller:

$$\begin{aligned} PV &= NkT \\ U &= U(T) \\ C_P(T) - C_V(T) &= Nk \\ PV &= \text{konst. (isoterm process)} \end{aligned}$$

om dessutom temperaturoberoende värmekapacitet

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= \text{konst. (isentropisk process)} \\ \gamma &= C_P/C_V \end{aligned}$$

Samband:

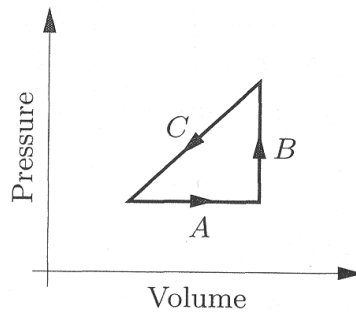
$$\begin{aligned} nR &= Nk \\ R &= N_A k \end{aligned}$$

1. Multipliciteten för en en-atomig klassisk idealgas kan skrivas på formen

$$\Omega(U, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N}$$

Härled utgående från detta uttryck ideala gaslagen!

2. En gas är innesluten i en behållare vars volym kan varieras. Gasen genomgår en cyklisk process bestående av 3 kvasistatiska delprocesser; A, B och C (se figur). Bestäm för varje delprocess: på gasen utträttat arbete (positivt, noll eller negativt)!



3. Betrakta två identiska ändliga system. Vardera system har den temperaturberoende värmekapaciteten

$$C = aT$$

där  $a$  är en konstant och  $T$  temperaturen i Kelvin. Från början har systemen temperaturerna  $T_A$  respektive  $T_B$ , där  $T_A > T_B$ . Vi önskar nu utnyttja dessa två system för att utvinna arbete med hjälp av en värmemoter. Hur mycket arbete kan maximalt utvinnas fram till dess systemen antagit en gemensam sluttemperatur?

4. Mättad vätska av kylmedlet HFC-134a (se bifogade tabeller) med temperaturen  $46.3^\circ\text{C}$  pressas genom en strypventil. Trycket sjunker då till 8.0 bar. Ange hur förändringen av entropin vid denna process kan bestämmas hjälp av bifogade tabell! Strypventilen är värmeisolerad från omgivningen. Du ska ge en tydlig beskrivning av hur entropin kan bestämmas, men du behöver inte genomföra någon numerisk beräkning.

$P$ (bar)	$T$ (°C)	$H_{\text{liquid}}$ (kJ)	$H_{\text{gas}}$ (kJ)	$S_{\text{liquid}}$ (kJ/K)	$S_{\text{gas}}$ (kJ/K)
1.0	-26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	-18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	-10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

**Table 4.3.** Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at  $-40^{\circ}\text{C}$ . Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

$P$ (bar)		Temperature (°C)		
		40	50	60
8.0	$H$ (kJ)	274	284	295
	$S$ (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	$H$ (kJ)	269	280	291
	$S$ (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	$H$ (kJ)		276	287
	$S$ (kJ/K)		0.916	0.953

**Table 4.4.** Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

# Termodynamik och statistisk fysik: Lösningar till Dugga 1

2018-09-24

## Uppgift 1

Ideala gaslagen ( $PV = NkT$ ) relaterar storheterna  $P, V, T$  och  $N$  till varandra. Från uttrycket av multiplicitet kan vi beräkna gasens entropi enligt

$$S = k \ln \Omega(U, V, N) = k_B \ln \left( \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N} \right)$$

som beror på  $U, N$  och  $V$ . Vi kan relatera detta till tryck  $P$  och temperatur  $T$  genom

$$P = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, N}.$$

Notera att vi kan få denna relation från termodynamiska identiteten. Vi bryter nu ut den term i  $S$  som beror på  $V$

$$S = k \ln \left( \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N} \right) + Nk \ln V.$$

Ur detta får vi

$$P = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, N} = TNk/V \Rightarrow PV = NkT$$

vilken är den efterfrågade ideala gaslagen.

## Uppgift 2

Volymen ökar i delprocess A, låt oss säga från  $V_1$  till  $V_2$ . Vid delprocess B ökar trycket från  $P_1$  till  $P_2$  vid konstant volym  $V_2$ . Då vi har kvasistatiska processer kan vi beräkna arbetet på gasen enligt  $W = -\int P dV$ .

För A gäller

$$W_A = -P\Delta V = -P_1(V_2 - V_1) < 0 \quad \text{ty} \quad V_2 > V_1.$$

Under delprocess B ökar trycket från  $P_1$  till  $P_2$  kvasistatiskt under konstant volym  $V_2$ . Då volymen är konstant uträttas inget arbete, dvs.  $W_B = 0$ .

Under delprocess C minskar trycket från  $P_2$  till  $P_1$  samtidigt som volymen minskar från  $V_2$  till  $V_1$ . Arbetet ges av

$$W_C = -\int_{V_2}^{V_1} P(V) dV$$

vilket motsvaras av arean under kurvan, dvs.

$$W_C = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} + P_1(V_2 - V_1) = \frac{(P_2 + P_1)(V_2 - V_1)}{2} > 0.$$

Vi har alltså funnit att vi uträttar negativt arbete på gasen under A. Inget utövat arbete under B. Samt positivt arbete under C.

**Kommentar:** Notera att det totala arbetet på gasen är positivt,  $W_A + W_C > 0$ . D.v.s. processen kan användas som en värmepump.

### Uppgift 3

Med positiva riktningar definierade i figur 1 så kan vi skriva första huvudsatsen som

$$Q_A = W + Q_B$$

Antag sluttemperaturen  $T_S$ . Då kan vi beräka  $Q_A, Q_B$  enligt

$$Q_A = - \int_{T_A}^{T_S} C dT = -a \int_{T_A}^{T_S} T dT = -\frac{a}{2}(T_S^2 - T_A^2)$$
$$Q_B = \int_{T_B}^{T_S} C dT = a \int_{T_B}^{T_S} T dT = \frac{a}{2}(T_S^2 - T_B^2)$$

där

$$C = aT$$

är den temperaturberoende värmekapaciteten. Det arbetet vi kan ta ut är då

$$W = Q_A - Q_B = -\frac{a}{2}(T_S^2 - T_A^2) - \frac{a}{2}(T_S^2 - T_B^2) = -\frac{a}{2}(2T_S^2 - T_A^2 - T_B^2)$$

Den totala entropiändringen ges samtidigt av

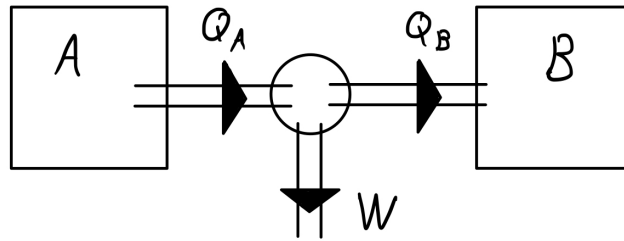
$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = \int_{T_A}^{T_S} \frac{C dT}{T} + \int_{T_B}^{T_S} \frac{C dT}{T} =$$
$$a \int_{T_A}^{T_S} \frac{dT}{T} + a \int_{T_B}^{T_S} \frac{dT}{T} = a(2T_S - T_A - T_B).$$

För att utvinna maximalt arbete sätter vi  $\Delta S = 0$  och erhåller då ett uttryck för sluttemperaturen

$$\Delta S = 0 \Rightarrow T_S = \frac{T_A + T_B}{2}$$

Det maximala arbetet ges då av

$$W = -\frac{a}{2}(2T_S^2 - T_A^2 - T_B^2) = -\frac{a}{2}\left(\frac{(T_A + T_B)^2}{2} - T_A^2 - T_B^2\right) = \frac{a}{4}(T_A - T_B)^2.$$



Figur 1:

## Uppgift 4

Förändringen i entropin när vätskan pressas genom strypventilen ges av

$$\Delta S = S_{\text{ut}} - S_{\text{in}}.$$

Då detta är en irreversibel process så gäller att  $\Delta S > 0$ . För processen så gäller att entalpin bevaras

$$H_{\text{in}} = H_{\text{ut}}$$

Innan strypventilen har vi en mättad vätska vid  $T = 46.3^\circ\text{C}$  och vi kan läsa av entalpin och entropin från Tabell 4.3

$$H_{\text{in}} = 116 \text{ kJ} , S_{\text{in}} = 416 \text{ J/K}$$

Efter strypventilen är  $P = 8 \text{ bar}$ . Enligt samma tabell är då

$$\begin{aligned} H_{\text{ut}}^{\text{vätska}} &= 93 \text{ kJ} , S_{\text{ut}}^{\text{vätska}} = 346 \text{ J/K} \\ H_{\text{ut}}^{\text{gas}} &= 264 \text{ kJ} , S_{\text{ut}}^{\text{gas}} = 907 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Då entalpin är bevarad så förstår vi att en del av vätskan förångas. Om vi antar att andelen vätska och ånga efter strypventilen är  $x$  respektive  $(1 - x)$  kan vi skriva

$$H_{\text{in}} = xH_{\text{ut}}^{\text{vätska}} + (1 - x)H_{\text{ut}}^{\text{gas}}$$

ur vilket vi skulle kunna beräkna  $x$ . Vi kan nu beräkna entropin efter strypventilen enligt

$$S_{\text{ut}} = xS_{\text{ut}}^{\text{vätska}} + (1 - x)S_{\text{ut}}^{\text{gas}}$$

Med hjälp av det ovan funna  $x$  och de tabellerade värdena kan vi beräkna  $S_{\text{ut}}$ .

**Kommentar:** Med insatta värden finner vi  $x \approx 0.865$  samt  $S_{\text{ut}} \approx 422 \text{ J/K}$ , vilket innebär en entropiändring genom ventilen på

$$\Delta S = 422 - 416 \text{ J/K} = 6 \text{ J/K}.$$

$\Delta S$  är positivt vilket är rimligt eftersom processen är irreversibel.