Chalmers, Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

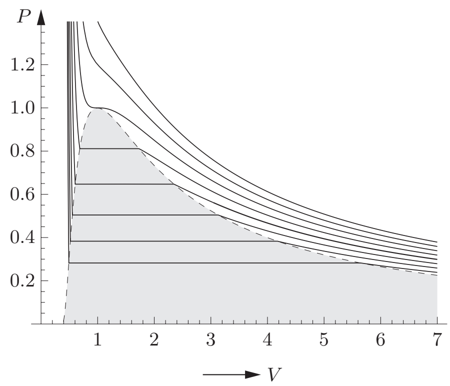
Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Måndagen den 9 okt. 2017, kl 15.15-17.00, HA1
Hjälpmedel: Inga. Räknare är ej tillåtet hjälpmedel.
Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2017/2018.

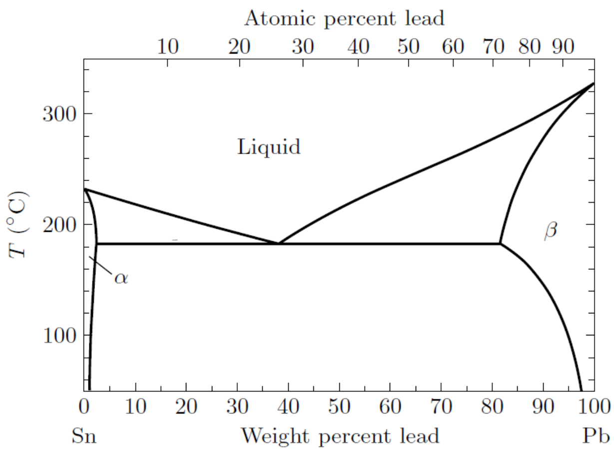
1. Van der Waals tillståndsekvation

$$P = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

förutsäger existensen av en kritisk punkt (se figuren). Bestäm kritiska temperaturen T_c uttryckt i a och b !



2. Nedanstående figur visar fasdiagrammet för en blandning av tenn (Sn) och bly (Pb) som funktion av temperatur och blandningsförhållande. Betrakta en blandning med 10 atomprocent bly. Från början har blandningen temperaturen 300 °C. Beskriv vad som händer med blandningen då temperaturen långsamt sänks till 100 °C!



3. Betrakta ett system med energinivåerna

$$E_n = n\varepsilon \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Systemet är i kontakt med en reservoar med temperaturen T. Bestäm den temperatur då sannolikheten är lika med 20% för att ett tillstånd med udda n är ockuperat!

4. Betrakta ett system som består av tre identiska (ej särskiljbara) icke-växelverkande partiklar. Varje partikel kan ockupera ett av 4 olika enpartikeltillstånd med energierna 0, ε, 2ε, respektive 3ε. Antag att systemet har energin 6ε. Bestäm degenerationsgraden i detta fall, dels om partiklarna är bosoner och dels om de är fermioner.

Liten formelsamling

Allmänt:

$$\begin{aligned} S &= k \ln \Omega \\ dS &= \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN \end{aligned}$$

För en idealgas gäller:

$$\begin{aligned} PV &= NkT \quad (Nk = nR, \quad R = N_A k) \\ U &= U(T) \\ C_P(T) - C_V(T) &= Nk \\ PV &= \text{konst. (isoterm process)} \end{aligned}$$

om dessutom temperaturoberoende värmekapacitet

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= \text{konst. (isentropisk process)} \\ \gamma &= C_P / C_V \end{aligned}$$

Kanonisk fördelning:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(s) &= \frac{1}{Z} e^{-E(s)/kT} \\ Z &= \sum_s e^{-E(s)/kT} \\ F(T, V, N) &= -kT \ln Z(T, V, N) \\ dF &= -SdT - PdV + \mu dN \end{aligned}$$

Geometrisk summa:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a q^k = a \frac{1 - q^n}{1 - q} \ , \quad q \neq 1$$

LÖSNINGAR TILL DUGGA 2

FTF140 TERMODYNAMIK OCH STATISTISK MEKANIK 2017

Magnus Rahm 2017-10-11

Uppgift 1

Van der Waals tillståndsekvation lyder

$$P = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}. \tag{1}$$

Den kritiska punkten kan i PV-diagrammet identifieras som den punkt där en av isotermerna har en sadelpunkt. Matematiskt kan kritiska punkten alltså karakteriseras av att såväl första- som andraderivatan av P med avseende på V vid konstant T

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{NkT}{(V - Nb)^2} + \frac{2aN^2}{V^3} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2NkT}{(V - Nb)^3} - \frac{6aN^2}{V^4} \tag{3}$$

är lika med noll, dvs

$$\frac{NkT_c}{(V_c - Nb)^2} = \frac{2aN^2}{V_c^3} \tag{4}$$

$$\frac{NkT_c}{(V_c - Nb)^2} \cdot \frac{2}{V_c - Nb} = \frac{6aN^2}{V_c^4} \tag{5}$$

där T_c och V_c betecknar kritiska temperaturen och volymen. Om den första ekvationen sätts in i den andra erhålls

$$\frac{2aN^2}{V_c^3} \cdot \frac{2}{V_c - Nb} = \frac{6aN^2}{V_c^4} \tag{6}$$

som enkelt visas ha lösningen

$$V_c = 3Nb \tag{7}$$

vilket kan sättas in i ekv. (4),

$$\frac{NkT_c}{(3Nb - Nb)^2} = \frac{2aN^2}{27N^3b^3} \tag{8}$$

som har lösningen

$$\boxed{T_c = \frac{8a}{27bk}.} \tag{9}$$

Uppgift 2

En blandning av tenn (Sn) och bly (Pb) med 10 atom-% Pb kyls ned från 300°C till 100°C. Till en början är blandningen en homogen vätska. Vid ca 210°C börjar en Sn-rik (ca 2 % Pb) α-fas att kristallisera. När temperaturen sänks ytterligare kommer mer och mer α att kristalliseras, samtidigt som dess Pb-halt ökar en liten aning. Den kvarvarande vätskan får högre och högre halt Pb allteftersom temperaturen sjunker. Den sista vätskan kristalliserar vid temperaturen 183°C och har då 26 atom-% Pb och 74 atom-% Sn (den eutektiska punkten). Ytterligare temperatursänkning leder till uppdelning i två faser, dels den Sn-rika α-fasen och dels den Pb-rika β-fasen, inledningsvis med ca 2 respektive 70 atom-% Pb. När vi når 100°C har β-fasens Pb-halt ökat till knappt 90 atom-%, medan Pb-halten i α-fasen har sjunkit något till ca 1 atom-%.

Uppgift 3

Den kanoniska tillståndssumman för systemet ges av

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{då } (q<1) \tag{10}$$

där beteckningen

$$q \equiv e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{11}$$

är införd. Sannolikheten för att ett udda tillstånd är ockuperat ges av

$$\begin{aligned} P(\text{udda}) &= \frac{q}{Z} + \frac{q^3}{Z} + \frac{q^5}{Z} + \ldots = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} = \frac{1}{Z} q \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{q}{1-q^2} = (1-q)\frac{q}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}. \end{aligned} \tag{12}$$

Vi söker nu den temperatur för vilken $P(\text{udda}) = 0{,}2$

$$\frac{q}{1+q} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{4} \tag{13}$$

och alltså

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\varepsilon}{k \ln 4}.} \tag{14}$$

Alternativ lösning (kudos till några finurliga studenter!):

Om sannolikheten för ett udda tillstånd är 0,2 måste sannolikheten för ett jämnt vara 0,8. Alltså,

$$\frac{P(\text{jämn})}{P(\text{udda})} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4. \tag{15}$$

Samma kvot kan vi skriva

$$\frac{P(\text{jämn})}{P(\text{udda})} = \frac{\frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n\varepsilon}{kT}}}{\frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)\varepsilon}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n\varepsilon}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n\varepsilon}{kT}}} = \frac{1}{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = e^{\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{16}$$

Alltså har vi

$$e^{\frac{\varepsilon}{kT}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\varepsilon}{k \ln 4}.} \tag{17}$$

Uppgift 4

Vi ska samla ihop til totala energin 6ε genom att placera tre partiklar i enpartikeltillstånd. I tabellen är alla sätt att göra det uppradade. I (flerpartikel)tillstånd 1 befinner sig en partikel i enpartikeltillståndet med energi 0 och två partiklar i tillståndet med energi 3ε. Två partiklar i samma enpartikeltillstånd är tillåtet om partiklarna är bosoner, men inte om de är fermioner. Tillstånd 2 är inte heller tillåtet för fermioner eftersom vi har flera partiklar i ett enpartikeltillstånd. Tillstånd 3, däremot, är tillåtet för både bosoner och fermioner eftersom alla partiklar befinner sig i olika enpartikeltillstånd. Degenerationsgraden (antalet tillstånd med samma energi) för energin 6ε är alltså $\boxed{\text{3 om partiklarna är bosoner och 1 om partiklarna är fermioner}}$.

Tillstånd	0ε	1ε	2ε	3ε	**Bosoner**	**Fermioner**
(Flerpartikel)tillstånd 1	1	0	0	2	OK	Inte OK
(Flerpartikel)tillstånd 2	0	0	3	0	OK	Inte OK
(Flerpartikel)tillstånd 3	0	1	1	1	OK	OK
					Degeneration 3	Degeneration 1

Alternativt (men ekvivalent) synsätt:

Vi kan tänka oss att vi först bestämmer enpartikeltillståndet för varje partikel. Eftersom partiklarna inte är särskiljbara är det dock inte meningsfullt att prata om partikel 1, 2 och 3 – alla permutationer motsvarar samma flerpartikeltillstånd, det vill säga alla kombinationer med samma färg motsvarar samma flerpartikeltillstånd. Alla tillstånd (rött, gult och grönt) är tillåtna för bosoner. Det finns alltså tre flerpartikeltillstånd med samma energi – degenerationsgraden är 3. Fermioner får inte ha flera partiklar i samma enpartikeltillstånd. Alltså är bara det gröna tillståndet tillåtet och degenerationsgraden är 1.

Partkel 1	Partikel 2	Partikel 3
3ε	3ε	0ε
3ε	0ε	3ε
0ε	3ε	3ε
1ε	2ε	3ε
2ε	1ε	3ε
1ε	3ε	2ε
2ε	3ε	1ε
3ε	1ε	2ε
3ε	2ε	1ε
2ε	2ε	2ε