

## Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

**Tid och plats:** Måndagen den 18 sep. 2017, kl 15.15-17.00, HA1

**Hjälpmedel:** Inga. Räknare är ej tillåtet hjälpmedel.

**Bedömning:** Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2017/2018.

### Liten formelsamling

Allmänt:

$$S = k \ln \Omega$$
$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

För en idealgas gäller:

$$PV = NkT$$
$$U = U(T)$$
$$C_P(T) - C_V(T) = Nk$$
$$PV = \text{konst. (isoterm process)}$$

om dessutom temperaturoberoende värmekapacitet

$$PV^\gamma = \text{konst. (isentropisk process)}$$
$$\gamma = C_P/C_V$$

Samband:

$$nR = Nk$$
$$R = N_A k$$

1. I "Physics Handbook" kan man hämta följande data för fem olika gaser.

| Gas | $C_P$ (kJ/kg·K) | $C_P/C_V$ |
|-----|-----------------|-----------|
| A   | 1.51            | 1.18      |
| B   | 0.92            | 1.401     |
| C   | 5.2             | 1.66      |
| D   | 1.71            | 1.26      |
| E   | 0.50            | 1.35      |

Värdena gäller vid rumstemperatur. En av dessa är syrgas, vilken?  
Redogör kort för hur du har resonerat!

2. Betrakta ett system av  $N$  harmoniska oscillatorer. Systemets energi kan skrivas på formen

$$U = U_0 + qhf$$

där  $q$  är totala antalet energikvanta för systemet,  $h$  Plancks konstant,  $f$  oscillatorfrekvensen och  $U_0$  en konstant, systemets grundtillståndsenergi. I gränsen

$$q \gg N \gg 1$$

gäller att multipliciteten ges av uttrycket

$$\Omega(N, q) = \left(\frac{eq}{N}\right)^N$$

där  $e$  är Eulers tal, basen för den naturliga logaritmen. Bestäm utgående från detta systemets entropi som funktion av  $N$  och temperaturen  $T$ , dvs  $S = S(N, T)$ !

3. Betrakta ett ändligt system med den temperaturberoende värmekapaciteten

$$C = aT$$

där  $a$  är en konstant och  $T$  temperaturen i Kelvin. Från början har systemet temperaturen  $T_0$  (K), som också är omgivningens temperatur. Man vill nu sänka systemets temperatur genom att utnyttja en kylmaskin. Hur stort är det minsta arbete som krävs för att sänka temperaturen till  $T_0/2$  (K)? Omgivningen har hela tiden den konstanta temperaturen  $T_0$  (K).

4. Mättad vätska av kylmedlet HFC-134a (se bifogade tabeller) med temperaturen  $46.3^\circ\text{C}$  pressas genom en strypventil. Trycket sjunker då till 8.0 bar. Förångas vätska och i så fall ungefär hur stor andel?

| $P$<br>(bar) | $T$<br>(°C) | $H_{\text{liquid}}$<br>(kJ) | $H_{\text{gas}}$<br>(kJ) | $S_{\text{liquid}}$<br>(kJ/K) | $S_{\text{gas}}$<br>(kJ/K) |
|--------------|-------------|-----------------------------|--------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1.0          | -26.4       | 16                          | 231                      | 0.068                         | 0.940                      |
| 1.4          | -18.8       | 26                          | 236                      | 0.106                         | 0.932                      |
| 2.0          | -10.1       | 37                          | 241                      | 0.148                         | 0.925                      |
| 4.0          | 8.9         | 62                          | 252                      | 0.240                         | 0.915                      |
| 6.0          | 21.6        | 79                          | 259                      | 0.300                         | 0.910                      |
| 8.0          | 31.3        | 93                          | 264                      | 0.346                         | 0.907                      |
| 10.0         | 39.4        | 105                         | 268                      | 0.384                         | 0.904                      |
| 12.0         | 46.3        | 116                         | 271                      | 0.416                         | 0.902                      |

**Table 4.3.** Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at  $-40^{\circ}\text{C}$ . Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

| $P$ (bar) |            | Temperature (°C) |       |       |
|-----------|------------|------------------|-------|-------|
|           |            | 40               | 50    | 60    |
| 8.0       | $H$ (kJ)   | 274              | 284   | 295   |
|           | $S$ (kJ/K) | 0.937            | 0.971 | 1.003 |
| 10.0      | $H$ (kJ)   | 269              | 280   | 291   |
|           | $S$ (kJ/K) | 0.907            | 0.943 | 0.977 |
| 12.0      | $H$ (kJ)   |                  | 276   | 287   |
|           | $S$ (kJ/K) |                  | 0.916 | 0.953 |

**Table 4.4.** Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

# LÖSNINGAR TILL DUGGA 1

## FTF140 TERMODYNAMIK OCH STATISTISK MEKANIK 2017

---

Magnus Rahm

2017-09-18

### Uppgift 1

Syrgas,  $O_2$ , har vid rumstemperatur 5 frihetsgrader (3 translation, 2 rotation). Därför är

$$C_V = \frac{5}{2}Nk, \quad C_P = \frac{7}{2}Nk \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4 \quad (1)$$

alternativt

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5+2}{5} = 1,4. \quad (2)$$

Gas B är alltså syrgas..

## Uppgift 2

För entropin gäller att

$$S = k \ln \Omega = k \ln \left( \frac{eq}{N} \right)^N = kN \left[ 1 + \ln \frac{q}{N} \right]. \quad (3)$$

Det är också givet att

$$U = U_0 + qhf \quad (4)$$

och alltså

$$q = \frac{U - U_0}{hf} \quad (5)$$

så att

$$S = kN \left[ 1 + \ln \frac{U - U_0}{Nhf} \right]. \quad (6)$$

Vidare har vi att

$$\frac{1}{T} \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_N = kN \frac{Nhf}{U - U_0} \cdot \frac{1}{Nhf} = \frac{kN}{U - U_0} \quad (7)$$

ur vilket vi får att

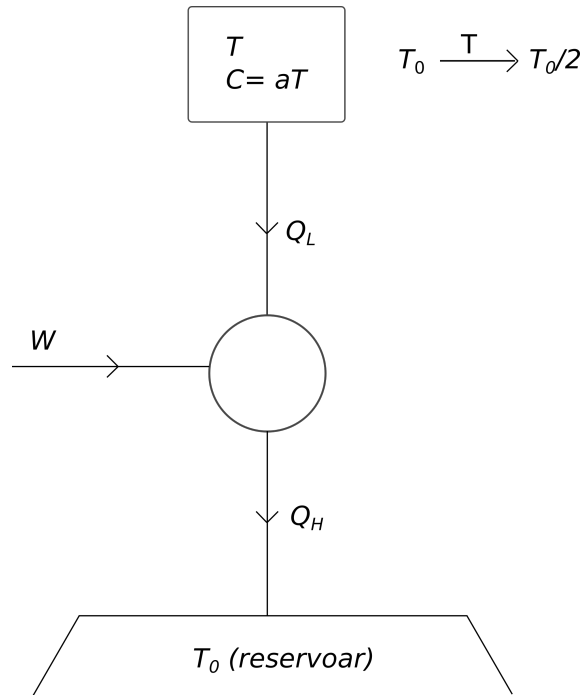
$$U - U_0 = NkT \quad (8)$$

vilket kan sättas in i ekv. (6),

$$S(N, T) = kN \left[ 1 + \ln \frac{kT}{hf} \right]. \quad (9)$$

**Kommentar:** Notera att  $U = U_0 + NkT$  är precis det resultat vi förväntar oss utifrån ekvipartitionsteoremet (varje oscillator har två frihetsgrader, ofta sätter vi  $U_0 = 0$ ). Ekvipartition gäller i den klassiska gränsen, det vill säga då temperaturen är hög, vilket är samma sak som att  $q \gg N$ .

### Uppgift 3



$$\text{Första huvudsatsen: } Q_H = W + Q_L \Rightarrow W = Q_H - Q_L \quad (10)$$

$$\text{Andra huvudsatsen: } \frac{Q_H}{T_0} + \frac{-Q_L}{T} = 0 \Rightarrow Q_H = \frac{T_0}{T} Q_L \quad (11)$$

där vi satt likhet istället för " $\geq$ " eftersom vi är intresserade av det minsta möjliga arbetet som krävs, det vill säga det ideala fallet då den totala entropin bevaras. Kombinerar vi (10) och (11) ser vi att

$$W = \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) Q_L. \quad (12)$$

Eftersom  $T$  varierar under processens gång måste vi integrera för att få det totala arbetet. Vi kan skriva

$$Q_L = -CdT = -aT dT \quad (13)$$

där minustecknet kommer av att vi definierat  $Q_L$  som arbetet som flödar från systemet. Alltså

$$W_{\min} = -a \int_{T_0}^{T_0/2} \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) T dT = \boxed{\frac{aT_0^2}{8}}. \quad (14)$$

**Kommentar angående tecken:** Om värmets definieras "med pil in" i systemet så gäller att  $Q = CdT$  medan pil utåt betyder att  $Q = -CdT$ . Observera att tecknet på entropiförändringen (förstås) inte påverkas; med pil in har vi  $dS = \frac{Q}{T} = \frac{CdT}{T}$  och med pil ut  $dS = \frac{-Q}{T} = \frac{-(-CdT)}{T} = \frac{CdT}{T}$ . För att vara på den säkra sidan bör man alltid kontrollera resultatet. Om systemets temperatur sjunker och man definierat värmets som positivt då det flödar ut ("pil ut") så bör man förstås också komma till ett positivt resultat när man beräknar värmets (negativt tecken skulle betyda flöde i andra riktningen). Vidare, om värme flödar från systemet måste systemets entropi minska och tvärtom.

## Uppgift 4

När vätskan passerar strypventilen kommer trycket och temperaturen sjunka, men entalpin bevaras,

$$H_{\text{innan}} = H_{\text{efter}} \quad (15)$$

I tabell 4.3 kan vi läsa av entalpin för den mättade vätskan innan passagen genom strypventilen

$$H_{\text{innan}} = 116 \text{ kJ}. \quad (16)$$

Enligt uppgiftsbeskrivningen sjunker trycket till 8 bar, där vi enligt samma tabell har

$$H^{\text{vätska}} = 93 \text{ kJ} \quad \text{och} \quad H^{\text{gas}} = 264 \text{ kJ}. \quad (17)$$

Låt  $x$  vara den andel som förångats. Vi har då

$$H_{\text{innan}} = xH^{\text{gas}} + (1-x)H^{\text{vätska}} \quad (18)$$

ur vilket vi kan lösa ut  $x$ ,

$$x = \frac{H_{\text{innan}} - H^{\text{vätska}}}{H^{\text{gas}} - H^{\text{vätska}}} = \frac{116 - 93}{264 - 93} \approx 0,13, \quad (19)$$

det vill säga ca 13 % förångas.

**Kommentar 1:** Entropin är *inte* bevarad i processen (den ökar).

**Kommentar 2:** Värdena som hämtades ur tabellen gäller alla för 1 kg, vilket vi kan anta att vi har "without loss of generality" eftersom vi i slutändan ändå bara är intresserade av *andelen* som förångas.