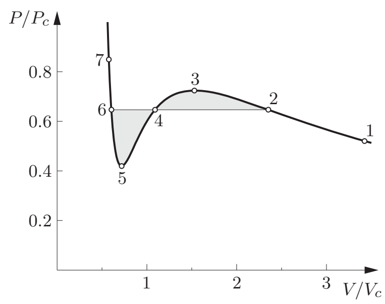
Chalmers, Institutionen för Fysik
Göran Wahnström

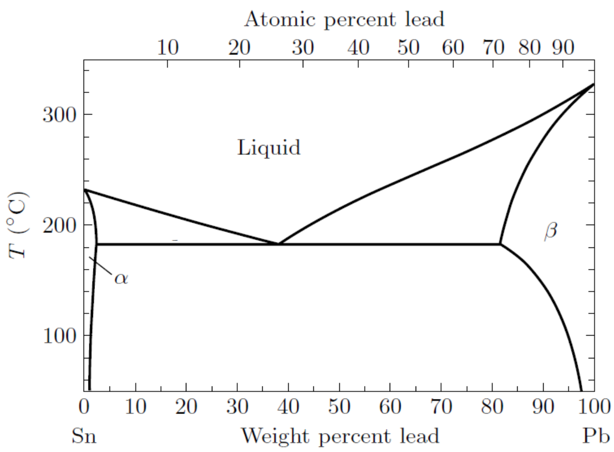
Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Onsdagen den 5 okt. 2016, kl 13.15-15.00, HA1
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare
Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2016/2017.

1. I figuren nedan anges en isoterm för ett system som följer van der Waals tillståndsekvation. Den horisontella linjen mellan punkterna 6 och 2 brukar kallas för Maxwells konstruktion. Vad gäller för de två skuggade areorna 6-4-5-6 och 4-3-2-4? Vilka tre tillståndsvariabler är lika i punkterna 6 och 2?



2. Nedanstående figur visar fasdiagrammet för en blandning av tenn (Sn) och bly (Pb) som funktion av temperatur och blandningsförhållande. Betrakta en blandning med 50 atomprocent bly. Ange antal faser, om det är fasta eller flytande faser samt fasernas approximativa sammansättning vid temperaturen i) 100 °C, ii) 200 °C och iii) 300 °C! Du får anta att blandningen är i termodynamisk jämvikt vid varje temperatur.



3. För väteatomen gäller att elektron-energinivåerna ges av uttrycket

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

med degenerationen $g_n = 2n^2$ och där $E_1 = 13.6$ eV. Vid vilken temperatur är de två lägsta exciterade nivåerna, dvs n=2 och n=3, besatta med lika stor sannolikhet? Vid rumstemperatur $T = 293$ K gäller att $kT = 25.2$ meV.

4. Betrakta ett system med enbart två energinivåer som båda är icke degenererade. Systemet är i kontakt med en reservoar med temperaturen T. Beteckna skillnaden i energi mellan de två energinivåerna med ΔE och bestäm systemets värmekapacitet som funktion av temperaturen! Visa att värmekapaciteten måste ha ett maximum som funktion av temperaturen. Du behöver inte ge ett explicit uttryck för maximat.

Chalmers
Institutionen för Fysik
Anders Lindman, 2016-10-05

Lösningar till Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

Areorna för de två områdena är lika stora.
De tre tillståndsvariabler som är lika i punkt 2 och 6 är trycket, temperaturen samt Gibbs fria energi (alt. kemisk potential).

Uppgift 2

För de tre temperaturerna så gäller följande:

i) Blandningen separerar till två fasta faser: en i α-struktur med ca 2% Pb och en i β-struktur med ca 90% Pb.

ii) Blandningen separerar till en fast fas i β-struktur med ca 75% Pb och en flytande fas med ca 30% Pb.

iii) Blandningen består av en flytande fas med 50% Pb.

Uppgift 3

Med de givna energinivåerna och degenerationsgraden ges sannolikheten för att en energinivå n är ockuperad av

$$P(n) = \frac{2n^2 e^{E_1/n^2 kT}}{Z}.$$

Då de två lägst exciterade tillstånden är lika sannolika så gäller att

$$P(2) = P(3)$$

vilket ger

$$4e^{E_1/4kT} = 9e^{E_1/9kT}.$$

Löser vi ut kT från detta uttryck får vi

$$kT = \frac{E_1}{2\ln 3/2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 2.33\,\text{eV}.$$

Då $kT = 25.2\,\text{meV}$ vid $T = 293\,\text{K}$ så får vi att

$$T = 2.33 \cdot \frac{293}{25.2 \cdot 10^{-3}}\,\text{K} = 2.7 \cdot 10^4\,\text{K}.$$

Uppgift 4

Om vi väljer att sätta energin för grundtillståndet till 0 så gäller för det två energinivåerna att

$$g_0 = 1 \quad , \quad E_0 = 0$$
$$g_1 = 1 \quad , \quad E_1 = \Delta E$$

Tillståndssumman blir då

$$Z = 1 + e^{-\Delta E/kT}$$

och medelenergin ges av

$$\langle E \rangle = 0 \cdot \frac{1}{1 + e^{-\Delta E/kT}} + \Delta E \cdot \frac{e^{-\Delta E/kT}}{1 + e^{-\Delta E/kT}} = \frac{\Delta E}{1 + e^{\Delta E/kT}}.$$

Värmekapaciteten kan nu beräknas enligt

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = k \left(\frac{\Delta E}{kT} \right)^2 \frac{e^{\Delta E/kT}}{\left(1 + e^{\Delta E/kT}\right)^2} = kx^2 \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

där $x = \Delta E/kT$. Då $x > 0$ så är $C > 0$. Vidare så gäller för gränserna att

$$C(T \to 0) = C(x \to \infty) \longrightarrow kx^2 e^{-x} \longrightarrow 0$$
$$C(T \to \infty) = C(x \to 0) \longrightarrow \frac{kx^2}{4} \longrightarrow 0.$$

Då C är noll vid gränserna och positiv däremellan måste C ha ett maximum.