

Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Fredagen den 23 sep. 2016, kl 13.15-15.00, HA1

Hjälpmedel: Inga

Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2016/2017.

Liten formelsamling

Allmänt:

$$S = k \ln \Omega$$
$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

För en idealgas gäller:

$$PV = NkT$$
$$U = U(T)$$
$$C_P(T) - C_V(T) = Nk$$
$$PV = \text{konst. (isoterm process)}$$
$$PV^\gamma = \text{konst. (isentropisk process)}$$
$$\gamma = C_P/C_V$$

Samband:

$$nR = Nk$$
$$R = N_A k$$

1. I "Physics Handbook" kan man hämta följande data för de tre gaserna ammoniak (NH_3), helium (He) och syre (O_2).

Gas	C_P (kJ/kg·K)	C_P/C_V
A	2.05	1.31
B	0.92	1.401
C	5.2	1.66

Värdena gäller vid rumstemperatur. Markera vilken gas som är A, B, respektive C! Redogör för hur du har resonerat!

2. Betrakta ett system av N harmoniska oscillatorer. Systemets energi kan skrivas på formen

$$U = U_0 + qhf$$

där q är totala antalet energikvanta för systemet, h Plancks konstant, f oscillatorfrekvensen och U_0 en konstant, systemets grundtillståndsenergi. I gränsen

$$N \gg q \gg 1$$

gäller att multipliciteten ges av uttrycket

$$\Omega(N, q) = \left(\frac{eN}{q} \right)^q$$

där e är Eulers tal, basen för den naturliga logaritmen. Bestäm utgående från detta systemets energi som funktion av N och temperaturen T , dvs $U = U(N, T)$.

3. Betrakta en gas (n mol) innesluten i en behållare med volymen V_0 . Gasen får behandlas som en idealgas. Behållaren är helt värmeisolerad från omgivningen. Gasen upptar från början enbart halva volymen av behållaren, $V = V_0/2$. I den andra halvan är det vakuum. Man låter därefter gasen fritt expandera ut till fulla volymen, $V = V_0$. Expansionen är fri och inget arbete tas ut under denna process. Processen är irreversibel (den omvända processen sker inte spontant) och entropin ökar. Men med hur mycket?

Man kan bestämma denna entropiökning kvantitativt för den irreversibla processen genom att studera en tänkt kvasistatisk process. Genomför detta resonemang och bestäm entropiökningen med hjälp av detta för gasen vid den irreversibla processen!

4. Betrakta två system A och B . Systemen har temperaturoberoende värmekapaciteter, $C_A = 3a$ och $C_B = a$, för system A respektive B , och där a är en konstant. Från början har system A begynnelsestemperaturen T_A (K) och system B begynnelsestemperaturen T_B (K), där $T_A > T_B$. Vi utnyttjar nu dessa två system för att utvinna arbete med hjälp av en värmemoter. Hur mycket arbete kan maximalt utvinnas fram till dess att systemen har antagit en gemensam sluttemperatur?

Lösningförslag till dugga i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3
Fredag den 23/9 2016

1. För en gas gäller approximativt att

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f}$$

där f är antalet frihetsgrader som är klassiskt exciterade.

He: Enatomig gas med 3 frihetsgrader $\implies \gamma = \frac{5}{3} = 1.67$

O₂: Tvåatomig gas med 5 frihetsgrader $\implies \gamma = \frac{7}{5} = 1.4$

NH₃: Fleratomig gas med mer än 5 frihetsgrader $\implies \gamma < 1.4$

Således för vi när vi jämför med den i uppgiften givna tabellen

A: NH₃

B: O₂

C: He

2. Börja med att ta fram ett uttryck för entropin

$$S = k \ln \Omega = k \ln \left(\frac{eN}{q} \right)^q = kq (1 + \ln N - \ln q)$$

Vi har sambandet

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N = \frac{dq}{dU} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)_N$$

så

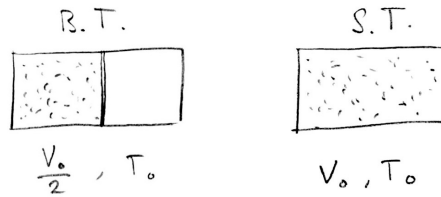
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{hf} \cdot k \left(1 + \ln N - \ln q - \frac{q}{q} \right) = \frac{k}{hf} \ln \left(\frac{N}{q} \right)$$

$$\frac{hf}{kT} = \ln \left(\frac{N}{q} \right)$$

$$q = N e^{-\frac{hf}{kT}}$$

Med $U = U_0 + qhf$ får vi

$$U = U_0 + N h f e^{-\frac{hf}{kT}}$$



Figur 1: Irreversibel process

3. För den irreversibla processen gäller att värmebehållaren är värmeisolerad och $Q = 0$, inget arbete tas ut $W = 0$ och därmed enligt första huvudsatsen ($\Delta U = Q + W$) att $\Delta U = 0$. För en idealgas är $U = U(T)$ en funktion av enbart T så $\Delta T = 0$. Låt oss beteckna denna temperatur med T_0 .

Vi kan nu konstruera en tänkt kvasistatisk process mellan samma begynnelse- och sluttillstånd. Genom att långsamt ta ut arbete kan vi låta gasen expandera kvasistatiskt. Om vi samtidigt hela tiden håller gasen i termisk jämvikt med omgivningen som här kan betraktas som en reservoar med temperaturen T_0 kommer gasen hela tiden att ha temperaturen T_0 . Vi får då.

$$W = \int_{V_0/2}^{V_0} -P dV = -nRT_0 \int_{V_0/2}^{V_0} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln 2$$

Eftersom gasen betraktas som idealga måste $\Delta T = 0$ måste $\Delta U = 0$ precis som ovan. Ur första huvudsatsen ($\Delta U = Q + W$) får vi att

$$Q = -W = nRT_0 \ln 2$$

Detta är det värme som passerar från reservoaren till gasen under den kvasistatiska processen. Detta ger upphov till en entropiändring

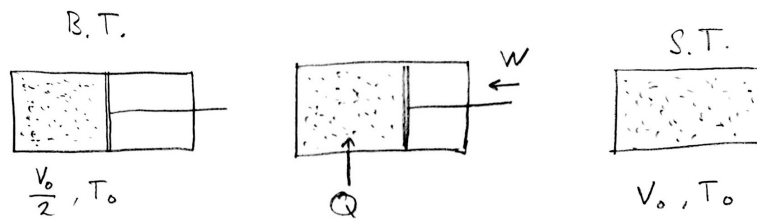
$$\Delta S = \frac{Q}{T_0} = nR \ln 2$$

hos gasen.

Eftersom entropi är en tillståndsfunktion som inte beror på vägen utan bara på systemets tillstånd måste entropiändringen vara den samma, $\Delta S = nR \ln 2$ för båda processerna.

Notera dock att för den reversibla processen kompenseras gasens entropiökning av en lika stor entropisänkning hos omgivningen så att

$$\Delta S_{\text{reversibel}} = \Delta S + \Delta S_{\text{omgivning}} = 0$$



Figur 2: Kvasistatisk process

medan för den irreversibla processen gäller att den totala entropiändringen är positiv

$$\Delta S_{\text{irreversibel}} = \Delta S + \Delta S_{\text{omgivning}} = \Delta S + 0 = nR \ln 2 > 0$$

4. Med positiva riktningar definierade som i figur 3 kan vi skriva första huvudsatsen som

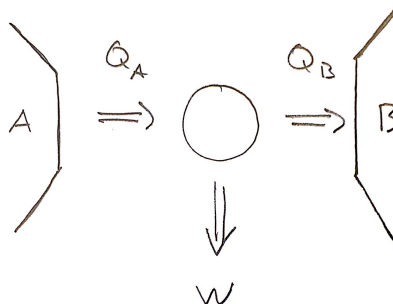
$$Q_A = W + Q_B$$

Q_A och Q_B kan vi beräkna direkt via

$$Q_A = - \int_{T_A}^{T_f} C_A dT = 3a(T_A - T_f)$$

$$Q_B = \int_{T_B}^{T_f} C_B dT = a(T_f - T_B)$$

Observera minustecknet som kommer av att vi definierar positiv riktning ut ur kroppen snarare än in i som är brukligt.



Figur 3

Entropiändringarna blir

$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_f} \frac{C_A dT}{T} = 3a \ln \left(\frac{T_f}{T_A} \right)$$
$$\Delta S_B = \int_{T_B}^{T_f} \frac{C_B dT}{T} = a \ln \left(\frac{T_f}{T_B} \right)$$

Andra huvudsatsen ger oss

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_A + \Delta S_B = 3a \ln \left(\frac{T_f}{T_A} \right) + a \ln \left(\frac{T_f}{T_B} \right) \geq 0$$

med likhet vid maximal verkningsgrad. Detta ger oss

$$\ln \left(\frac{T_f}{T_A} \right)^3 = \ln \left(\frac{T_B}{T_f} \right)$$
$$T_f^4 = T_A^3 T_B$$

Maximalt arbete erhålls sålunda som

$$W = Q_A - Q_B = 3a(T_A - T_f) - a(T_f - T_B) = 3aT_A + aT_B - 4aT_f$$
$$= a \left(3T_A + T_B - 4(T_A^3 T_B)^{1/4} \right)$$