

## Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

**Tid och plats:** Tisdagen den 22 sep. 2015, kl 8.00-9.45, HA1

**Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd räknare

**Bedömning:** Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2015/2016.

### Liten formelsamling

Allmänt:

$$S = k \ln \Omega$$
$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

För en idealgas gäller:

$$PV = NkT$$
$$U = U(T)$$
$$C_P(T) - C_V(T) = Nk$$
$$PV = \text{konst. (isoterm process)}$$
$$PV^\gamma = \text{konst. (isentropisk process)}$$
$$\gamma = C_P/C_V$$

1. I en dieselmotor komprimeras luft till ett högt tryck. Antag att kompressionen sker så snabbt så att värmeförluster till omgivningen kan försummas och att luften från början har rumstemperatur, 20 °C. Om luften komprimeras till en 1/20 del av begynnelsevolymen, vad blir då sluttemperaturen?
2. Betrakta ett system av  $N$  harmoniska oscillatorer. Systemets energi kan skrivas på formen

$$U = U_0 + qhf$$

där  $q$  är systemets totala antal energikvanta,  $h$  Plancks konstant,  $f$  oscillatorfrekvensen och  $U_0$  en konstant, systemets grundtillståndensenergi. I gränsen

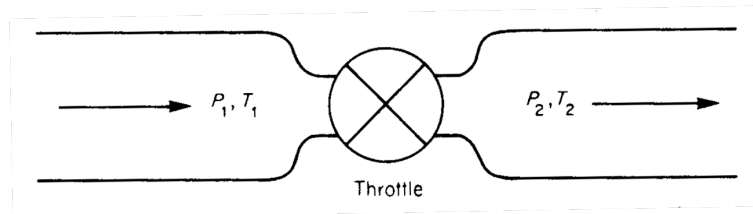
$$N \gg q \gg 1$$

gäller att multipliciteten ges av uttrycket

$$\Omega(N, q) = \left( \frac{eN}{q} \right)^q$$

Bestäm utgående från detta systemets energi som funktion av  $N$  och temperaturen  $T$ , dvs  $U = U(N, T)$ .

3. Betrakta ett system  $A$  som har värmekapaciteten  $C = a$  (J/K). Från början har systemet temperaturen  $T_0$  (K), som också är omgivningens temperatur. Man vill nu sänka systemets temperatur genom att utnyttja en kylmaskin. Hur stort är det minsta arbete som krävs för att sänka temperaturen till  $T_0/2$  (K). Omgivningen har hela tiden den konstanta temperaturen  $T_0$  (K).
4. En gas pressas genom en strypventil ("throttle") varvid trycket sjunker från  $P_1$  till  $P_2$ . Om värmeförluster till omgivningen kan försummas kan man med hjälp av första huvudsatsen visa att en viss termodynamisk storhet är konserverad, dvs  $X_1 = X_2$ . Vilken är denna termodynamiska storhet, dvs vad är  $X$ ? Vad gäller för entropin vid denna process, dvs hur är  $S_1$  relaterad till  $S_2$ ?



1. Kompressionen är adiabatisk vilket betyder att

$$PV^\gamma = PVV^{\gamma-1} = NkTV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

om vi förutsätter idealgas. Vidare består luften främst av  $N_2$  och  $O_2$  för vilket antalet frihetsgrader är 5 vilket ger

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Vi får nu

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$
$$T_f = T_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = 293 \text{ K} \cdot \left( \frac{V_i}{\frac{1}{20} V_i} \right)^{0.4} = 971 \text{ K}$$

2. Börja med att ta fram ett uttryck för entropin

$$S = k \ln \Omega = k \ln \left( \frac{eN}{q} \right)^q = k (q + q \ln N - q \ln q)$$

Vi har sambandet

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_N = \frac{dq}{dU} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)_N$$

så

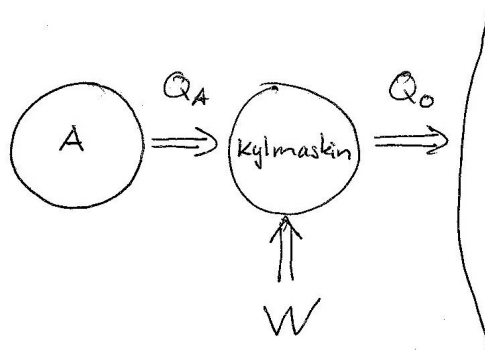
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{hf} \cdot k \left( 1 + \ln N - \ln q - \frac{q}{q} \right) = \frac{k}{hf} \ln \left( \frac{N}{q} \right)$$

$$\frac{hf}{kT} = \ln \left( \frac{N}{q} \right)$$

$$q = N e^{-\frac{hf}{kT}}$$

Med  $U = U_0 + qhf$  får vi

$$U = U_0 + N h f e^{-\frac{hf}{kT}}$$



**Figur 1:** Skiss över en kylmaskin

3. Med positiva riktningar definierade som i figur 1 kan vi skriva första huvudsatsen som

$$Q_A + W = Q_O$$

$Q_A$  kan vi beräkna direkt via

$$Q_A = - \int_{T_0}^{T_0/2} C dT = -a \left( \frac{T_0}{2} - T_0 \right) = \frac{aT_0}{2}$$

Observera minustecknet som kommer av att vi definierar positiv riktning ut ur kroppen snarare än in i som är brukligt.

$Q_O$  beräknar vi med hjälp av andra huvudsatsen

$$\Delta S_A = \int_{T_0}^{T_0/2} \frac{C dT}{T} = a \ln \left( \frac{T_0/2}{T_0} \right) = a \ln \left( \frac{1}{2} \right) = -a \ln(2)$$

$$\Delta S_B = \frac{Q_O}{T_0}$$

Maximal verkningsgrad och därmed minsta möjliga arbete fås då  $\Delta S_{\text{tot}} = 0$

$$0 = \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{Q_O}{T_0} - a \ln(2) = 0$$

$$\implies Q_O = aT_0 \ln(2)$$

Arbetet kan då fås som

$$W = Q_O - Q_A = aT_0 \ln(2) - \frac{aT_0}{2} = aT_0 \left( \ln(2) - \frac{1}{2} \right)$$

4. Detta är en Joule-Thompson process. Vid en sådan är entalpin,  $H$ , bevarad. Processen är irreversibel, d.v.s. den omvända processen kan inte ske spontant. Det betyder att entropin ökar,  $S_2 > S_1$ .