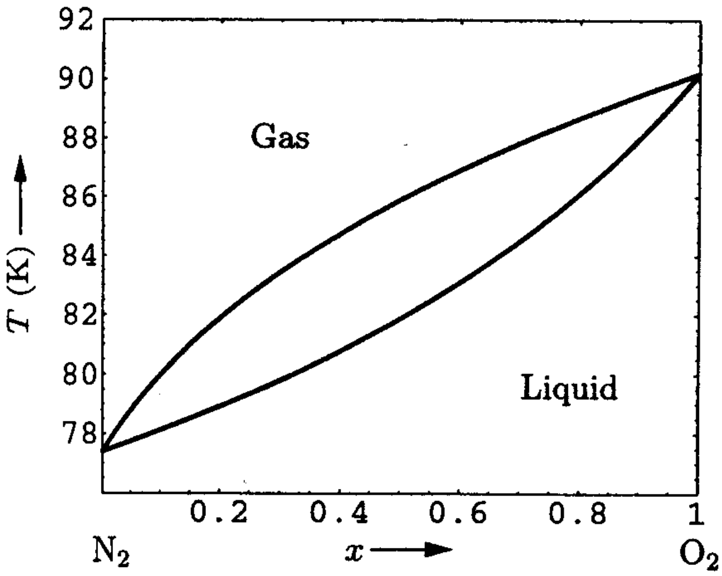
Chalmers, Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Onsdagen den 8 okt. 2014, kl 8.00-9.55, HA1
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare
Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2014/2015.

1. Betrakta ett system som är i termisk och mekanisk kontakt med en reservoar med temperaturen T och trycket P. Visa utgående från 1:a och 2:a huvudsatsen att vid jämvikt gäller att Gibbs fria energi $G = U + PV - TS$ är minimum, där U, V och S är systemets energi, volym respektive entropi.

2. Figuren visar fasdiagrammet för en blandning av syre och kväve. Betrakta luft, en gasblandning av 20% syre och 80% kväve vid temperaturen 100 K. Beskriv vad som händer om temperaturen sänks till 70 K. Ange temperatur och sammansättning av faserna då kondensationen börjar och då den avslutas.



3. Energinivåerna för en roterande heteronukleär diatomisk molekyl ges av uttrycket

$$E(j) = \frac{\hbar^2}{2I}\, j(j+1) \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

med degenerationsgraden

$$g(j) = 2j + 1$$

och där I är molekylens tröghetsmoment. Antag att molekylen är i jämvikt med en reservoar med temperaturen T. Teckna tillståndssumman Z för molekylen. Betrakta därefter höga temperaturer och härled ett förenklat uttryck för tillståndssumman.

4. Betrakta en gas av partiklar i den klassiska gränsen. Hastighetsfördelningen ges då av uttrycket

$$f(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-mv^2/2kT\right)$$

där $\boldsymbol{v}$ är partikelns hastighet, $v = |\boldsymbol{v}|$ dess fart, m partikelns massa, k Boltzmanns konstant och T temperaturen. Bestäm det mest sannolika värdet för partikelns fart v.

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Anders Lindman, 2014-10-08

Lösningar till Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

Då Gibbs fria energi ges av
$$G = U + PV - TS$$
ges en förändring i G av
$$\Delta G = \Delta U + P\Delta V + V\Delta P - T\Delta S - S\Delta T$$
Jämvikt med reservoaren ger att $\Delta T = 0$ och $\Delta P = 0$ vilket reducerar ovanstående uttryck till
$$\Delta G = \Delta U + P\Delta V - T\Delta S$$
Enligt den första huvudsatsen så gäller att
$$\Delta U = Q + W = Q - P\Delta V$$
där det sista steget gäller om enbart tryck-volymarbete utförs på systemet. Kombinationen av de ovanstående två uttrycken ger
$$\Delta G = Q - T\Delta S$$
Enligt den andra huvudsatsen så gäller att
$$\Delta S \geq \frac{Q}{T}$$
vilket tillsammans med föregående uttryck ger förhållandet
$$\Delta G \leq 0$$
vilket betyder att G antingen minskar eller är konstant. Således är G minimum vid jämvikt.

Uppgift 2

Då temperaturen sänks från 100 K kommer blandningen att befinna sig i gasfasen ända tills temperaturen är 82 K, dvs då vi når den övre kurvan i figuren. I detta ögonblick kommer en del av gasblandningen att kondensera. Kompositionen för den flytande fasen är då 50% syre och 50% kväve, vilket fås genom att vandra horisontellt från den övre kurvan till den nedre. Kompositionen för gasfasen är i detta ögonblick fortfarande 20% syre och 80% kväve. När temperaturen sänks ytterligare kommer gasfasen att följa den övre kurvan medan den flytande fasen den undre. Detta sker ända tills den flytande fasen har samma komposition som gasen hade innan den började att kondensera, dvs 20% syre och 80% kväve. Detta sker vid temperaturen 79 K och kompositionen för gasfasen i detta ögonblick är då 5% syre och 95% kväve. När temperaturen sänks ytterligare så har gasen kondenserat fullständigt.

Uppgift 3

Tillståndssumman för molekylen ges av

$$Z = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\hbar^2 j(j+1)/2IkT}$$

Vid höga temperaturer är $\hbar^2/2IkT \ll 1$ och många termer i summan bidrar. Summan kan därför approximeras med en integral

$$Z = \int_0^{\infty} (2j+1) e^{-\hbar^2 j(j+1)/2IkT} dj$$

Genom variabelsubstitutionen

$$x = \frac{\hbar^2}{2IkT} j(j+1) \implies dx = \frac{\hbar^2}{2IkT} (2j+1) dj$$

kan integralen skrivas som

$$Z = \frac{2IkT}{\hbar^2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{2IkT}{\hbar^2} \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = \frac{2IkT}{\hbar^2}$$

Uppgift 4

Den givna uttrycket beskriver fördelningen av hastighetsvektorer men för att bestämma den mest sannolika farten så krävs ett uttryck som beskriver fartens fördelningen. Varje vektor $\vec{v}$ vars längd ligger i intervallet $[v, v + dv]$ befinner sig i hastighetsrummet i ett sfärisk skal vars mantelarea är $4\pi v^2$ och tjocklek är dv. Antalet hastighetsvektorer som motsvarar farten v är därav

$$4\pi v^2 dv$$

Med detta uttryck kan fartens fördelningsfunktion (Maxwells hastighetsfördelning) skrivas som

$$D(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Den mest sannolika värdet för farten fås genom att lösa ekvationen

$$0 = \frac{dD(v)}{dv} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \left(2v - \frac{mv^3}{kT} \right) e^{-mv^2/2kT}$$

Då varken förfaktorn eller exponenten kan vara lika med noll så gäller att

$$v \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) = 0$$

Den här ekvationen har tre lösningar men två av dom är inte relevanta då den ena är negativ och den andra är $v = 0$ vilket ger $D = 0$. Vi får därmed att den mest sannolika farten ges av

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$