

Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Måndagen den 22 sep. 2014, kl 10.00-11.55, HA1

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare

Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2014/2015.

Liten formelsamling

Allmänt:

$$S = k \ln \Omega$$
$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

För en idealgas gäller:

$$PV = NkT$$
$$U = U(T)$$
$$C_P(T) - C_V(T) = Nk$$
$$PV = \text{konst. (isoterm process)}$$
$$PV^\gamma = \text{konst. (isentropisk process)}$$
$$\gamma = C_P/C_V$$

1. Betrakta ett system av N harmoniska oscillatorer. Systemets energi kan skrivas på formen

$$U = N \frac{hf}{2} + qhf$$

där q är systemets totala antal energikvanta, h Plancks konstant och f oscillatorfrekvensen. För systemet gäller att multipliciteten ges av uttrycket

$$\Omega(N, q) = \left(\frac{q+N}{q}\right)^q \left(\frac{q+N}{N}\right)^N$$

Bestäm utgående från detta systemets energi som funktion av temperaturen T och N , dvs $U = U(N, T)$.

2. Betrakta ett system med värmekapaciteten

$$C = aT + bT^3 \quad (J/K)$$

där a och b är två konstanter och T temperaturen i Kelvin. Systemet bringas i kontakt med en stor värmereservoar med temperaturen T_0 . Vad blir den **totala** entropiändringen, för system och omgivning, när termisk jämvikt har ställt in sig om systemets begynnelse-temperatur är $2T_0$?

3. Betrakta en gas (n mol) innesluten i en behållare med volymen V_0 . Gasen får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet, C_V och C_P . Gasen upptar från början halva volymen av behållaren, $V = V_0/2$, och har temperaturen T_0 .
- i) Antag först att behållaren är helt värmeisolerad från omgivningen. Låt gasen expandera fritt ut till fulla volymen. Vad blir entropiändringen för **gasen** vid denna process?
- ii) Antag nu istället att behållaren är i god termisk kontakt med omgivningen som också har temperaturen T_0 . Omgivningen är stor. Låt gasen expandera långsamt, kvasistatiskt, till fulla volymen. I denna process erhålls arbete. Vad blir entropiändringen för **gasen** i detta fall?
4. Mättad vätska av kylmedlet HFC-134a (se bifogade tabeller) med temperaturen 46.3°C pressas genom en strypventil. Trycket sjunker då till 10.0 bar. Förångas vätska och i så fall hur stor andel?

P (bar)	T (°C)	H_{liquid} (kJ)	H_{gas} (kJ)	S_{liquid} (kJ/K)	S_{gas} (kJ/K)
1.0	-26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	-18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	-10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

Table 4.3. Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at -40°C . Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

P (bar)		Temperature (°C)		
		40	50	60
8.0	H (kJ)	274	284	295
	S (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	H (kJ)	269	280	291
	S (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	H (kJ)		276	287
	S (kJ/K)		0.916	0.953

Table 4.4. Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

Lösningförslag till dugga i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3
Måndagen den 22/9 2014

1. Vi börjar med att ta fram ett uttryck för entropin:

$$S = k \ln \Omega = k[(q + N) \ln(q + N) - q \ln q - N \ln N]$$

Vi vet att

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N = \frac{dq}{dU} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)_N$$

så

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{k}{hf} \left[\ln(q + N) + \frac{q}{q + N} - \ln q - 1 + \frac{N}{q + N} \right] \\ &= \frac{k}{hf} \ln \left(\frac{q + N}{q} \right) \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{hf}{kT} &= \ln \left(\frac{q + N}{q} \right) \\ \frac{q + N}{q} &= e^{hf/kT} \\ q &= \frac{N}{e^{hf/kT} - 1} \end{aligned}$$

Med $U = N \frac{hf}{2} + qhf$ får vi

$$U(N, T) = N \left[\frac{hf}{2} + \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right]$$

2. Både entropin och temperaturen ändras i systemet. Då temperaturen inte är konstant ges entropiändringen av

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T} dT.$$

I det här fallet är $T_1 = 2T_0$, $T_2 = T_0$ och $C = aT + bT^3$ J/K. Vi får för systemet entropiändringen

$$\Delta S_s = \int_{2T_0}^{T_0} (a + bT^2) dT = \left[aT + \frac{b}{3} T^3 \right]_{2T_0}^{T_0} = -aT_0 - \frac{7b}{3} T_0^3$$

I värmereservoaren sker en förändring i entropin utan någon förändring av temperaturen. Entropiändringen är i detta fall

$$\Delta S_R = \frac{Q_R}{T} = -\frac{Q_s}{T}$$

där Q_R är den värme som tas upp av reservoaren och Q_s den värme som avges av systemet. Vi har

$$Q_s = \int_{2T_0}^{T_0} C dT = \int_{2T_0}^{T_0} (aT + bT^3) dT = \left[\frac{a}{2} T^2 + \frac{b}{4} T^4 \right]_{2T_0}^{T_0} = -\frac{3a}{2} T_0^2 - \frac{15b}{4} T_0^4$$

Entropiförändringen i reservoaren blir därför

$$\Delta S_R = \frac{3a}{2}T_0 + \frac{15b}{4}T_0^3$$

Den totala entropiändringen är då

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_S + \Delta S_R = \frac{a}{2}T_0 + \frac{17b}{12}T_0^3$$

3. Det är lättare att börja med deluppgift (ii): När behållaren har god termisk kontakt med omgivningen blir expansionen isoterm. För en isoterm process gäller

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = -W$$

Då expansionen dessutom är kvasistatisk får vi

$$Q = \int P dV = nRT_0 \int_{V_0/2}^{V_0} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln 2$$

Entropiökningen blir då

$$\Delta S = \frac{Q}{T_0} = nR \ln 2$$

På deluppgift (i) kan man då använda att eftersom ingen värme tillförs och inget arbete utförs (gasen expanderar fritt) så har vi även här $\Delta U = 0$, vilket innebär $\Delta T = 0$. Det betyder att vi för den icke kvasistatiska processen har samma start- och sluttillstånd som för den kvasistatiska. Entropiökningen bör då bli densamma, d.v.s. $\Delta S = nR \ln 2$.

Man kan notera att för den icke kvasistatiska processen i (i) förändras inte omgivningens entropi eftersom systemet är värmeisolerat. I fall (ii) däremot avger omgivningen värmen $-Q$ vid temperaturen T_0 och får alltså $\Delta S_{\text{omg}} = -nR \ln 2$. För den kvasistatiska processen sker alltså ingen total entropiökning i system plus omgivning.

4. Processen då vätskan passerar strypventilen är isentalpisk, d.v.s.

$$H_{\text{in}} = H_{\text{ut}}$$

Innan strypventilen har vi en mättad vätska vid $T = 46.3^\circ\text{C}$, vilket enligt Tabell 4.3 ger

$$H_{\text{in}} = 116 \text{ kJ}$$

Efter strypventilen är $P = 10$ bar. Samma tabell ger då att

$$H^{\text{vätska}} = 105 \text{ kJ}, \quad H^{\text{gas}} = 268 \text{ kJ}$$

Låt x vara den andel av vätskan som förångats. Vi får då

$$H_{\text{in}} = xH^{\text{gas}} + (1-x)H^{\text{vätska}}$$
$$x = \frac{H_{\text{in}} - H^{\text{vätska}}}{H^{\text{gas}} - H^{\text{vätska}}}$$

Med de angivna värdena blir då $x \approx 0.067$, dvs ca 6.7% förångas.