

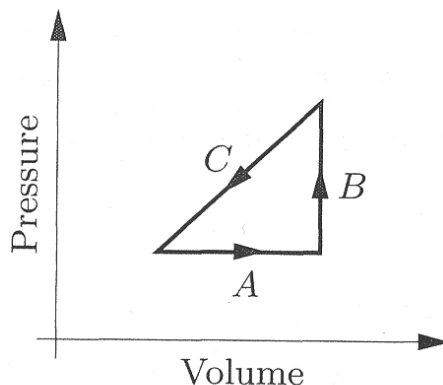
Dugga 1 i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Måndagen den 23 sep. 2013, kl 10.00-12.00, HA1

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare

Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2013/2014.

1. En gas är innesluten i en behållare vars volym kan varieras. Gasen genomgår en cyklisk process bestående av 3 kvasistatiska delprocesser; A, B och C (se figur). Vid delprocess A ökar volymen från V_1 till V_2 vid konstant tryck. Vid delprocess B ökar trycket från P_1 till P_2 vid konstant volym. Bestäm hur mycket värme som tillförs/bortförs under en cykel, uttryckt i P_1, P_2, V_1 och V_2 ! Observera, du får inte anta att gasen är ideal. Motivera ditt svar väl.



2. Multipliciteten för en en-atomig klassisk idealgas kan skrivas på formen

$$\Omega(U, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N}$$

Förklara bakgrunden till den första faktorn, $\frac{1}{N!}$. Bestäm därefter systemets temperatur utgående från det givna uttrycket på $\Omega(U, V, N)$.

3. För ett visst ämne gäller att värmekapacititeten ges av uttrycket

$$c = aT + bT^3 \text{ (J/mol} \cdot \text{K)} ; \quad \text{då } T_1 < T < T_2$$

där T är temperaturen i Kelvin. Bestäm entropiändringen för ämnet då dess temperatur höjs från T_1 till T_2 .

4. Mättad vätska av kylmedlet HFC-134a (se bifogade tabeller) med temperaturen 46.3°C pressas genom en strypventil. Trycket sjunker då till 8.0 bar. Förändras kylmedlets entropi vid denna process? I så fall, med hur mycket?

P (bar)	T (°C)	H_{liquid} (kJ)	H_{gas} (kJ)	S_{liquid} (kJ/K)	S_{gas} (kJ/K)
1.0	-26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	-18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	-10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

Table 4.3. Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at -40°C . Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

P (bar)		Temperature (°C)		
		40	50	60
8.0	H (kJ)	274	284	295
	S (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	H (kJ)	269	280	291
	S (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	H (kJ)		276	287
	S (kJ/K)		0.916	0.953

Table 4.4. Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995).

Liten formelsamling

Allmänt:

$$S = k \ln \Omega$$

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

För en idealgas gäller:

$$PV = NkT$$

$$U = U(T)$$

$$C_P(T) - C_V(T) = Nk$$

$$PV = \text{konst. (isoterm process)}$$

$$PV^\gamma = \text{konst. (isentropisk process)}$$

$$\gamma = C_P/C_V$$

Termodynamik och statistisk fysik:
Lösningar till Dugga 1

2013-09-23

Uppgift 1

Värmet som tillförs/bortförs under en cykel kan bestämmas med hjälp av första huvudsatsen

$$\Delta U = Q + W$$

Då systemet återvänder till sitt ursprungliga tillstånd under en cykel är $\Delta U = 0$. Således är $Q = -W$. Vi behöver alltså beräkna W för varje delprocess. Under delprocess A ökar volymen kvasistatiskt från V_1 till V_2 under konstant tryck P_1 . Arbetet för processen ges därmed av

$$W_A = -P\Delta V = -P_1(V_2 - V_1)$$

Under delprocess B ökar trycket från P_1 till P_2 kvasistatiskt under konstant volym V_2 . Då volymen är konstant utträttas inget arbete, dvs. $W_B = 0$. Under delprocess C minskar trycket från P_2 till P_1 samtidigt som volymen minskar från V_2 till V_1 . Arbetet ges av

$$W_C = - \int_{V_2}^{V_1} P(V)dV$$

vilket motsvaras av arean under kurvan, dvs.

$$W_C = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} + P_1(V_2 - V_1)$$

Det totala arbetet för hela cykeln blir

$$\begin{aligned} W &= W_A + W_B + W_C \\ &= -P_1(V_2 - V_1) + 0 + \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} + P_1(V_2 - V_1) \\ &= \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} \end{aligned}$$

Värmet blir då

$$Q = -W = -\frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2}$$

Eftersom $P_2 > P_1$ och $V_2 > V_1$ kommer värme att bortföras under cykeln.

Uppgift 2

Faktorn $\frac{1}{N!}$ härstammar från det faktum att alla partiklarna är icke-särskiljbara. Om två partiklar byter plats med varandra förändras alltså inte systemet.

Gasens temperatur kan beräknas med uttrycket

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{N,V}$$

Med uttrycket för multipliciteten ges gasens entropi av

$$\begin{aligned} S = k_B \ln \Omega(U, V, N) &= k_B \ln \left(\frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2mU})^{3N} \right) \\ &= k_B \ln \left(\frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2m})^{3N} \right) + \frac{3Nk_B}{2} \ln U \end{aligned}$$

Vi kan nu bestämma T genom att derivera S med avseende på U . Då den första termen i sista högerledet inte beror på U ges T av

$$\frac{1}{T} = \frac{3Nk_B}{2U} \Rightarrow T = \frac{2U}{3Nk_B}$$

Kommentar: Notera att detta ger ekvipartitionsteoremet för ett system med tre frihetsgrader om U löses ut, vilket är så många frihetsgrader som en enatomig idealgas har.

Uppgift 3

En förändring i entropin då temperaturen varieras ges av

$$dS = \frac{c}{T}dT$$

I intervallet $T_1 < T < T_2$ ges värmekapaciteten av $c = aT + bT^3$ och då gäller att

$$dS = (a + bT^2)dT$$

Då temperaturen ökas från T_1 till T_2 ges entropiförändringen av

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} (a + bT^2)dT = \left[aT + \frac{b}{3}T^3 \right]_{T_1}^{T_2} = a(T_2 - T_1) + \frac{b}{3}(T_2^3 - T_1^3)$$

Uppgift 4

En förändring i entropin när vätskan pressas genom strypventil ges av

$$\Delta S = S_{\text{ut}} - S_{\text{in}}$$

Då detta är en irreversibel process så gäller att $\Delta S > 0$. För processen så gäller att entalpin bevaras

$$H_{\text{in}} = H_{\text{ut}}$$

Innan strypventilen har vi en mättad vätska vid $T = 46.3^\circ\text{C}$. Enligt Tabell 4.3 är

$$H_{\text{in}} = 116 \text{ kJ} , S_{\text{in}} = 416 \text{ J/K}$$

Efter strypventilen är $P = 8 \text{ bar}$. Enligt samma tabell är då

$$\begin{aligned} H_{\text{ut}}^{\text{vätska}} &= 93 \text{ kJ} , & S_{\text{ut}}^{\text{vätska}} &= 346 \text{ J/K} \\ H_{\text{ut}}^{\text{gas}} &= 264 \text{ kJ} , & S_{\text{ut}}^{\text{gas}} &= 907 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Då entalpin bevaras kan vi baserat på dessa värden dra slutsatsen att en del av vätskan förångas under processen. Om vi antar att andelen vätska och ånga efter strypventilen är x respektive $(1 - x)$ kan vi skriva

$$H_{\text{in}} = xH_{\text{ut}}^{\text{vätska}} + (1 - x)H_{\text{ut}}^{\text{gas}}$$

Löser vi ut x erhålls

$$x = \frac{H_{\text{ut}}^{\text{gas}} - H_{\text{in}}}{H_{\text{ut}}^{\text{gas}} - H_{\text{ut}}^{\text{vätska}}}$$

Med de angivna värdena är $x \approx 0.865$. Vi kan nu beräkna entropin efter strypventilen enligt

$$S_{\text{ut}} = xS_{\text{ut}}^{\text{vätska}} + (1 - x)S_{\text{ut}}^{\text{gas}}$$

Tabellvärdena samt $x = 0.865$ ger $S_{\text{ut}} \approx 422 \text{ J/K}$. Entropiförändringen då vätskan pressas genom strypventilen är således

$$\Delta S = 422 - 416 \text{ J/K} = 6 \text{ J/K}$$

ΔS är positivt vilket är rimligt eftersom processen är irreversibel.