Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Tisdagen den 14 december 2010.

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.
Resultat meddelas individuellt via e-post senast 22/12.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. (a) Definiera begreppen *grenpunkt, grensnitt*, och *Riemannyta.* Vad är poängen att definiera en funktion på en Riemannyta istället för i komplexa talplanet?

(b) Integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$$

kan enkelt beräknas via residykalkyl genom att lägga delar av integrationskurvan nära ett grensnitt. Visa hur! Beräkna integralen!

2. Beskriv en metod att lösa integralekvationen

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+t)\varphi(t)\, dt.$$

För vilka värden på λ existerar en lösning?

3. Betrakta problemet att bestämma formen på ett rep som är upphängt i sina ändpunkter från två punkter på samma höjd. Visa hur man kan gå tillväga för att lösa problemet med hjälp av variationskalkyl! (Du behöver inte ta fram lösningen.)

4. (a) Kvantmekanikens andra postulat säger att ”till varje observerbar storhet svarar en självadjungerad operator på ett Hilbertrum”. Vad är ett Hilbertrum? Och varför är det viktigt att operatorn är självadjungerad?

(b) Antag at vi har en klassisk teori i vilken det uppträder en *funktion* av en observerbar storhet, t.ex. logaritmen av rörelsemängden p för en partikel, $\ln(p)$. Enligt andra postulatet behöver vi i detta fall – för att göra kvantfysik! – bilda logaritmen $\ln(\hat{P})$ av den självadjungerade operator $\hat{P}$ som svarar mot p. Men vad är egentligen en *logaritm av en operator?* Eller mer allmänt, hur skall man förstå en *funktion* $\mathcal{F}(\hat{A})$ *av en operator* $\hat{A}$ på ett Hilbertrum?

Försök att motivera följande definition av $\mathcal{F}(\hat{A})$:

$$\mathcal{F}(\hat{A}) \equiv \sum_{m=1}^{M} \mathcal{F}(a_m)\hat{P}_m,$$

där $\{a_1, a_2, ..., a_M\}$ är mängden av egenvärden till $\hat{A}$, och $\hat{P}_m$ är projektionsoperatorn på egentillståndet (eller, i fallet med degenererade egentillstånd, underrummet av egentillstånd) som svarar mot egenvärdet a_m.

5. (a) Betrakta planet $\mathbf{R}^2$ med ett fixt ortogonalt koordinatsystem Oxy. Låt gruppen G bestå av fyra transformationer e, a, b, c, där $e\colon (x, y) \to (x, y)$ *(identitetsavbildningen)*, $a\colon (x, y) \to (x, -y)$ *(spegling i x-axeln)*, $b\colon (x, y) \to (-x, y)$ *(spegling i y-axeln)*, $c\colon (x, y) \to (-x, -y)$ *(paritetstransformation)*. Denna grupp (eller en isomorf grupp) kallas *Kleins fyragrupp*. Konstruera multiplikationstabellen för G (sammansättningar av transformationer) och bestäm dess delgrupper.

(b) Illustrera Cayleys sats genom att visa att Kleins fyragrupp är isomorf med den delgrupp till S_4 som består av permutationerna $(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$.