6/11 Matematisk Fysik

Greenfunktioner

Bakgrund: Inhomogen diff ekvation

$$L_x u(x) = f(x) \xrightarrow{\text{Dirac Notation}} L|u\rangle = |f\rangle$$

Linjär differential operator

t.ex. $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$.

Snabbrepetition Dirac notation

$|\alpha\rangle \in V$, $\langle\alpha| = |\alpha\rangle^* \in V'$ ← Dual till V'

$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* \in \mathbb{C}$

Uppräkneligt vektorrum "Separabelt"

ON Bas $\{|\alpha\rangle\}$ $\langle\alpha|\alpha'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}$

$V \ni |v\rangle = \sum_\alpha v_\alpha|\alpha\rangle$ $v_\alpha \in \mathbb{C}$

$$\langle\beta|v\rangle = \langle\beta|\sum_\alpha v_\alpha|\alpha\rangle = \sum_\alpha v_\alpha \underbrace{\langle\beta|\alpha\rangle}_{\delta_{\beta\alpha}} = v_\beta$$

Betrakta en icke uppräknelig bas till V $\{|x\rangle\}$ $x \in \mathbb{R}$ kontinuum

$$\sum_\alpha \ldots \curvearrowright \int dx$$

Exakt analogi med uppräkneliga fallet

$$|f\rangle = \int dy\, f_y |y\rangle = \int dy\, f(y)|y\rangle$$

$$\langle x|f\rangle = \langle x|\int dy\, f(y)|y\rangle = \int dy\, f(y) \underbrace{\langle x|y\rangle}_{\delta(x-y)} = f(x)$$

Operatorer från yttre produkter

$|v\rangle\langle v'| = L$ operator

Ex.

$|v\rangle = v_1|1\rangle + v_2|2\rangle$ $|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle 1|v\rangle\\ \langle 2|v\rangle\end{pmatrix}$

$|v'\rangle^* = \langle v'| = (v_1'^* \;\; v_2'^*)$

Notera $|\alpha\rangle^* = |\alpha\rangle^\dagger$

$$|v\rangle\langle v'| = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1'^* & v_2'^* \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} v_1 (v_1'^* & v_2'^*) \\ v_2 (v_1'^* & v_2'^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 v_1'^* & v_1 v_2'^* \\ v_2 v_1'^* & v_2 v_2'^* \end{pmatrix}$$ Matris representation av operatorer

Kör med resolutn of identity när en faktor i kvant

"Resolutn of identity"

$$|v\rangle = \sum_\alpha v_\alpha |\alpha\rangle = \sum_\alpha \underbrace{\langle\alpha|v\rangle}_{\in \mathbb{C}} |\alpha\rangle = \underbrace{\left(\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right)}_{\Rightarrow I} |v\rangle \Rightarrow$$

$$I = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

Kräver $|\alpha\rangle$ en komplett mängd

Analogt för icke uppräkneliga fallet

$$|f\rangle = \int dx\, f(x)\, |x\rangle = \int dx \langle x|f\rangle |x\rangle =$$

$$= \left(\int dx\, |x\rangle\langle x|\right)|f\rangle \Rightarrow I = \int dx\, |x\rangle\langle x|$$

Givet $|x\rangle$ komplett mängd ⊿

Tillbaka till $\underbrace{\boxed{L_x u(x) = f(x)}}_{\text{koordinat representation.}} \longrightarrow L|u\rangle = |f\rangle$ multiplicera med $\langle x|$

$$\langle x|L|u\rangle = \langle x|f\rangle = \boxed{f(x)}$$

$$\langle x|L|u\rangle = \langle x|L I|u\rangle = \langle x|L \int dy\, |y\rangle\langle y|u\rangle \overset{*}{=}$$

$$= \int dy \underbrace{\langle x|L|y\rangle}\langle y|u\rangle = \int dy\, L_x \delta(x-y) \langle y|u\rangle =$$

$L_{xy} \equiv L_x \delta(x-y)$ Egenskap om för lokal linjär operator ex derivata.

$$= L_x \int dy\, \delta(x-y)\, u(y) = \boxed{L_x u(x)}$$

* Inre produkt linjär ⇒ Distributiva lagen gäller

$$\langle\alpha|V_1 + V_2|\beta\rangle = \langle\alpha|V_1|\beta\rangle + \langle\alpha|V_2|\beta\rangle$$

Antar L inverterbar dvs. $\exists\, G$:

$G = L^{-1}$

$$\underbrace{G L}_{I} \overbrace{|u\rangle}^{|f\rangle} = |u\rangle = G|f\rangle$$

koordinat rep.

$$u(x) = \langle x|u\rangle = \langle x|G|f\rangle =$$

$$= \langle x|G I|f\rangle = \langle x|G \int dy\, |y\rangle\langle y|\, |f\rangle =$$

$$= \int dy\, \underbrace{\langle x|G|y\rangle}_{G(x,y)} \overbrace{\langle y|f\rangle}^{f(y)} = \int dy\, G(x,y) f(y)$$

Inte nödvändigtvis lokal.

Hur hitta $G(x,y)$?

Undersök $\langle x|LG|y\rangle = \langle x|L \overset{\int dx'\, |x'\rangle\langle x'|}{1}\, G|y\rangle = \langle x|y\rangle =$
$= \delta(x-y)$

$$= \langle x|L \int dx'\, |x'\rangle\langle x'|\, G|y\rangle$$

$$= \int dx' \langle x|L|x'\rangle\langle x'|G|y\rangle =$$

$$= \int dx'\, L_x\, \delta(x-x')\, G(x',y) = L_x G(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad L_x G(x,x') = \delta(x-x')$$

SUMMASUMMARUM $G(x,y)$ lösningen till $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$ och Lösningen till Diffekvationen $L_x v(x) = f(x)$ ges av $v(x) = \int dy\, G(x,y) F(y)$

Ex Poissons ekvation

$$\nabla^2 \phi(\bar{r}) = -\rho(\bar{r})$$

$$\nabla^2 G(\bar{r},\bar{r}') = -\delta(\bar{r}-\bar{r}')$$

Så länge avståndet är samma mellan $\bar{r}$ och $\bar{r}'$ blir greenfunktionen samma

Antag translationsinvarians

$$\nabla^2 G(\bar{r}-\bar{r}') = -\delta(\bar{r}-\bar{r}') \qquad ①$$

Fouriertransformer för att hitta lösning till 1 Standardmetod

$$\begin{cases} G(\bar{r}-\bar{r}') = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \overset{\overset{3D}{\downarrow}}{\int} d\bar{k}\, e^{ik\cdot(\bar{r}-\bar{r}')} G(\bar{k}) \\ \delta(\bar{r}-\bar{r}') = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\int d\bar{k}\, e^{ik(\bar{r}-\bar{r}')} \end{cases} \qquad ②$$

Kontinuer transla i rum ⇒ Bevar rörelsemängd

Kontinu tidstranslation ⇒ Bevarad energi

$$① + ② \Rightarrow -k^2 G(\bar{k}) = -1 \Rightarrow G(\bar{k}) = \frac{1}{k^2}$$

$$G(\bar{r}-\bar{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\bar{k}\, e^{ik(\bar{r}-\bar{r}')}/\bar{k}^2 = -\frac{1}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

$$\boxed{\phi(\bar{r}) = \int d\bar{r}'\, G(\bar{r}-\bar{r}')\,(-\rho(\bar{r}'))} = \frac{1}{4\pi}\int d\bar{r}' \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\rho(\bar{r})$$

respons "Output" Responsfunktion Störning "Input"

ALLMÄNT!

Förutsatt att responsen är vad en kallar linjär.

Liten störning ⇒ liten respons.

8/11

Rep $L_x u(x) = f(x)$ Inhomogen differekvation.

Hitta $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$

$$\underset{\text{Respons}}{u(x)} = \int \underset{\text{Responsfunktion}}{G(x,y)} \underset{\text{störning}}{f(y)}\, dy$$

Fysik $X_i(\mathbb{r},t) = \int d\mathbb{r}' dt'\, X_{ij}(\mathbb{r},'t')\, F_j(\mathbb{r}',t')$

Summerar över j

Ex

X_i	X_{ij}	F_j
U	C	T
V	R	P
I_i	y_{ij}	V_j
	kondaktans.	

$C = \frac{dU}{dT} \Rightarrow U = \int C\, dT$

Exempel

$\ddot{x}(t) + w_0^2 x(t) = F(t)$.

$L_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + w_0^2$ Antar translations tidsinvarians

$G(t,t') = G(t-t') = G(t'')$

$\Rightarrow \frac{d^2}{\partial t^2} G(t'') + w_0^2 G(t'') = \delta(t'')$

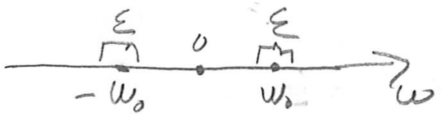
FT $\begin{cases} G(t'') = \frac{1}{2\pi}\int dw\, e^{iwt} G(w) \\ \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int dw\, e^{iwt} \Rightarrow \delta(t) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow -w^2 G(w) + w_0^2 G(w) = 1 \Rightarrow G(w) = \frac{1}{w_0^2 - w^2}$

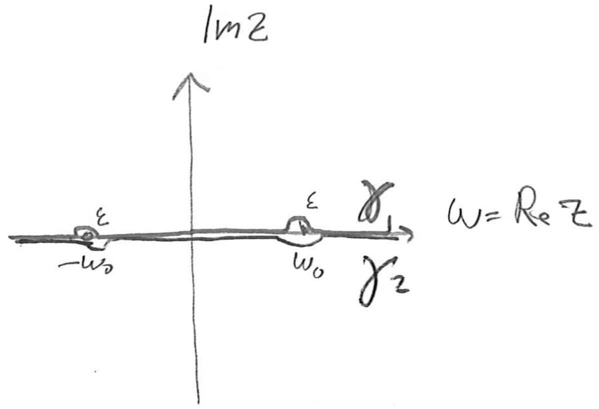
$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int dw\, e^{iwt} \frac{1}{w_0^2 - w^2}$ Poler i $\pm w_0$

Hur beräkna detta?

1) Cauchys Principal Integral



$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \underset{\varepsilon\to 0}{=} \int_{-\infty}^{-w_0-\varepsilon/2} \dots + \int_{-w_0+\varepsilon/2}^{w_0-\varepsilon/2} \dots + \int_{w_0+\varepsilon/2}^{\infty} \dots$$



2)

$$\int \dots = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_1} \dots$$

3) $$\int \dots = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_2}$$

Analytiska funktioner uppfyller.

$f(z) = u(z) + iv(z)$ $\qquad z = x + iy$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \Rightarrow \underbrace{\frac{d^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}}_{\nabla^2 U} = \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V} = 0$$

Ex

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!}(z-0)^n$$

Då $z \to 0$ kommer $f(z)$ godtyckligt nära varje komplext tal

t.ex $\lambda = 3+2i$

$z \to 0$ Välj λ Visa $f(z) \overset{z\to 0}{\simeq} \lambda$

Definiera $z_n = \frac{1}{\log \lambda + 2n\pi i}$ $\qquad n \to \infty \quad z_n \to 0$

$$f(z) \overset{n>>1}{\approx} f(z_n) = e^{\ln \lambda + 2n\pi i} = e^{\ln \lambda} = \lambda$$

Ex Trigonometriska Funktioner på enhetscirkeln.

$z = e^{i\theta}$ $\quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ $\qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

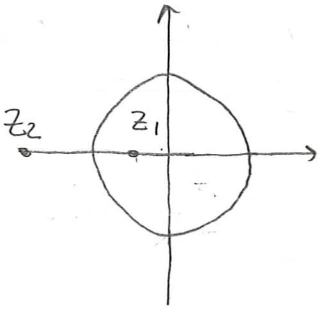
$d\theta = \frac{dz}{iz}$ $\qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1\, d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz}$$

$a > 1$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$$= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z\, dz}{(z-z_1)^2 (z-z_2)^2} \qquad \begin{aligned} z_1 &= -a + \sqrt{a^2-1} \\ z_2 &= -a - \sqrt{a^2-1} \end{aligned}$$



Residy teoremet

$$I = \frac{2}{i}\, 2\pi i\, \operatorname{Res}[f(z_1)] =$$

$$\frac{2}{i}\, 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left((z-z_1)^2 f(z)\right) =$$

$$= 4\pi \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right) = 4\pi \left(\frac{(z-z_2)^2 - z\, 2\, (z-z_2)}{(z-z_2)^4} \right)\Bigg|_{z=z_1} =$$

$$4\pi \frac{z_1 - z_2 - 2z_1}{(z_1 - z_2)^3} = 4\pi \frac{2a}{(2\sqrt{a^2-1})^3} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$$

Ofta krävs val av smart kurva.

Ex $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R \to \infty} \underbrace{\int_0^{R} \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$

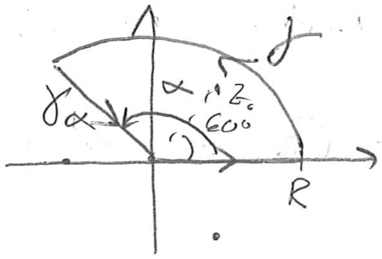
Komplexifiera $\quad x \to z \quad f(z) = \frac{1}{z^3+1} \quad$ Poler $z^3 = -1$

$\Rightarrow z = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$

$C = [0, R] \cup \gamma \cup \gamma_\alpha$

Hur välja α



$$\int_C \ldots = I_R + \int_{\gamma_R} \cancelto{0}{\frac{dz}{z^3+1}} + \int_{\gamma_\alpha} \ldots = \quad \text{ty} < \frac{1}{|z|}$$

$2\pi i \ \mathrm{Re}\{f(z_0)]$

Välj $\alpha = 2\pi/3$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_\alpha} \ldots = \text{konst} \cdot I_R.$$

$$\int_{\gamma_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \left\{ \begin{array}{l} z = re^{i\alpha} \\ dz = e^{i\alpha} dr \end{array} \right\} = \int_R^0 \frac{e^{i\alpha}}{r^3 e^{3i\alpha}+1} dr = -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{1}{r^3 e^{3i\alpha}+1} dr$$

$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{1}{r^3 e^{3i\alpha}+1} dr = \left\{ \alpha = \frac{2\pi}{3} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1}{r^3+1} dr = \frac{1}{2} I_R$$

$$\lim_{R \to \infty} \frac{3}{2} I_R = 2\pi i \ \mathrm{Res}\{f(z_0)\}$$

$$I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

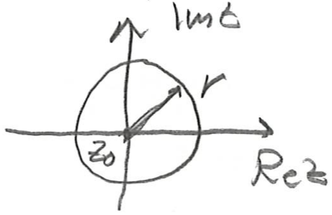
13/11

BAKGRUND: Flervärda funktioner i $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$f(z) = f(r,\theta) = -f(r, \theta + 2\pi)$$

Dock θ, $\theta + 2\pi$ samma punkt

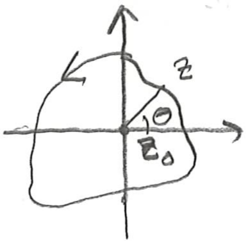


Grenpunkt

z_0 grenpunkt till $f(z)$

om $f(z) = f(r,\theta) \neq f(r, \theta + 2\pi)$

för godtycklig sluten kurva runt z_0



Ex 2

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) \neq \ln(re^{i(\theta + 2n\pi)}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

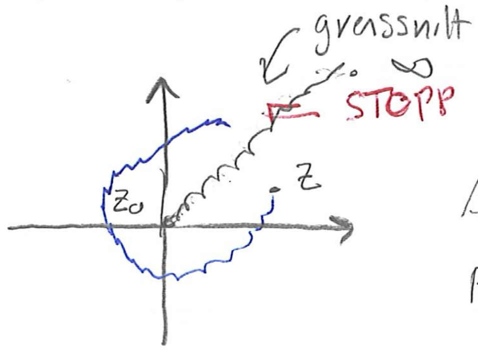
$$\ln r + i\theta \qquad \ln r + i\theta + 2\pi i n$$

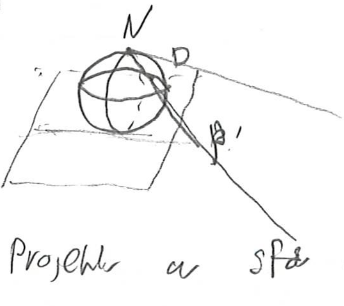
Oändligt många värden på $\ln z$ i en och samma punkt

Lösning: Definiera en "gren" genom att lägga ett "grensnitt" i $\mathbb{C}$

Vanligt val längs axlar.

Förbjudet att passera grensnitt!





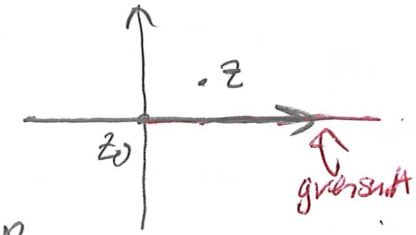
Projektion av sfär i plan.

Kan nu definiera grenar av vår flervärda funktion med grenpunkt z_0

$f(z) = \ln z$, $\quad f_1(z) = \ln z \quad 0 < \theta \leq 2\pi$

1:a grenen 2:a grenen.

$F_2(z) = \ln z \quad 2\pi < \theta < 4\pi$



o.s.v.

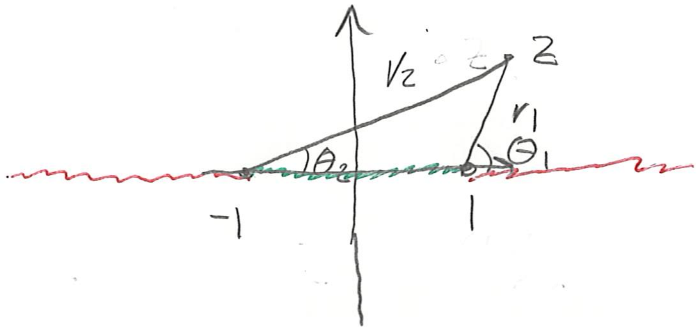
Hur ersatt en flervärd komplex funktion med en sekvens av enkelvärda komplexa funktioner. *

Flera grenpunkter, fiffigt att lägga gränssnitten mella dessa.

Ex

$$f(z) = \sqrt{z^2-1} = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1} = \left\{ \begin{matrix} z-1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z+1 = r_2 e^{i\theta_2} \end{matrix} \right] =$$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}}$$



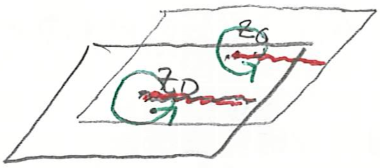
Enkla fallet!

Fiffigt

* Ersätts med en enkelvärd kontinuerlig funktion definierad på en uppsättning ihopklistrade Riemannblad.

Kopia av uppskuret komplext talplan ← lagt gränssnitt

Detta ger en Riemannyta.



ANVÄNDNING AV GRENSNITT I RESIDYKALKYL

Ex INLÄMNINGSUPPGIFT!

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)} =$$

Komplexifiera

Bilda en sluten kurva

$$\longrightarrow \oint \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,(1+z^2)}$$

Poler $z = \pm i$ enkla

ty $(1+z^2) = (z+i)(z-i)$

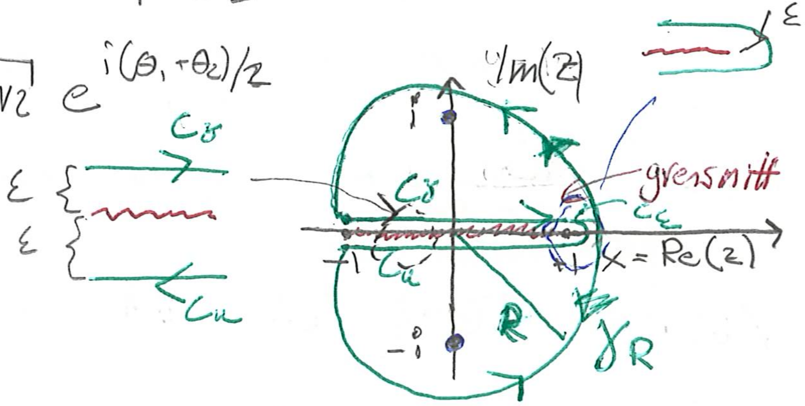
$\sqrt{1-z^2}$ exponent $1/2$ ⇒ grenpunkt ej pol

grenpunkter i ± 1

Utnyttja att $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

Integrera runt kurva.

$C = C_ö \cup C_u \cup C_\varepsilon \cup \gamma_R$

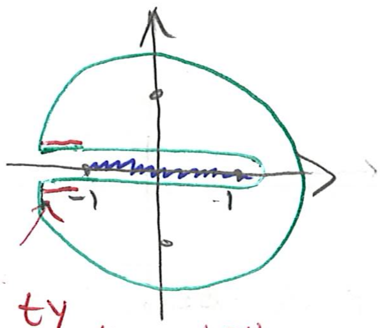


Tag gränserna $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

γ_R Jordans lemma (Ska alltid motiveras)

Innesluta båda poler, minst en måste inneslutas. Passera ej grensnittet.

<u>SVAR</u>: $I = \pi/\sqrt{2}$



De här bitarna tar ut varandra ty integreras åt olika håll.

<u>Ex</u> Också inlämningsuppgift

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

Inga grenpunkter ⇒ Inget grensnitt

Hur utnyttja integration längs ett gränsnitt?

Komplexifiera! Inför en <u>flervärd</u> "hjälpfunktion" $g(z)$

Måste införa grensnitt!

Bilda sluten kurva C och integrera längs grensnittet.

$$I_H' = \oint \frac{g(z)}{z^3+1}\, dz$$

↖ Hjälpintegral.

<u>SVAR</u> $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Låt oss gå tillbaks till problemet att räkna Green-funktioner

Ofta behöver vi räkna integraler av typen

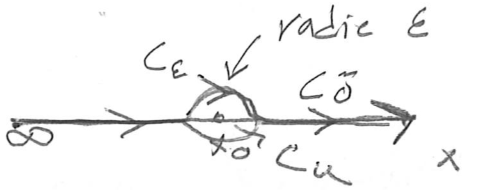
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx$$ (jfr driv harmon oscillator)

CAUCHYS PRINCIPAL VÄRDE av integralen I

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx \overset{\text{Definition}}{\equiv} \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \dots\, dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \dots\, dx\right]$$

Hur beräkna $P\int$? (Principal värdet)

Komplexifiera och Välj en kurva C



Halvcirkel i övre komplexa talplanet

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{C_ö} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz = P\int \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz + \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz$$

$z = x_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ $\theta : \pi \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{f(x_0 + \varepsilon e^{i\theta})}{x_0 + \varepsilon e^{i\theta} - x_0}\, i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta = \int_{\pi}^{0} \lim_{\varepsilon \to 0} i f(x_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta =$$

Antar f kontinuerlig
kan byta plats $\lim \int$ $= \int_{\pi}^{0} i f(x_0)\, d\theta = -\pi i f(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{C_ö} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz = P\int \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz - i\pi f(x_0) \quad ①$$

P.S.S.

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{C_u} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz = P\int \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz + i\pi f(x_0) \quad ②$$

13/11 Räkneövning Integraler

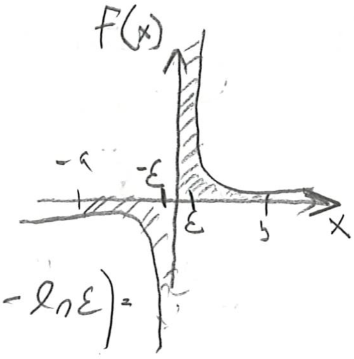
Cauchys principalvärde

- Pol på konturen av integralen.

$\Rightarrow$ Integralen divergent

Ex $I = \int_{-a}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x} \right) =$

$a,b>0$ $\quad$ $y=-x$



$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{a}^{\varepsilon} \frac{dy}{y} + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln\varepsilon - \ln a + \ln b - \ln\varepsilon) =$

$= \ln b - \ln a$

Betydar inte att $\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x}$ är konvergent

Ty för det behövs $I = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0\\ \varepsilon_1,\varepsilon_2>0}} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^{b} \frac{dx}{x} \right)$ Två olika ε för konvergent

Exempel $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$

$\Rightarrow I = \lim_{\varepsilon_1\to 0} (\ln\varepsilon_1 - \ln a + \ln b - \ln 2\varepsilon_1) =$

$= \ln b - \ln a - \ln 2$ Annan lösning

Definiera Cauchys Principalvärde

$$P\left(\int_{a}^{b} f(x)\,dx \right) \equiv \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{a}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Uppgift 1

$$I = P\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} \right)$$

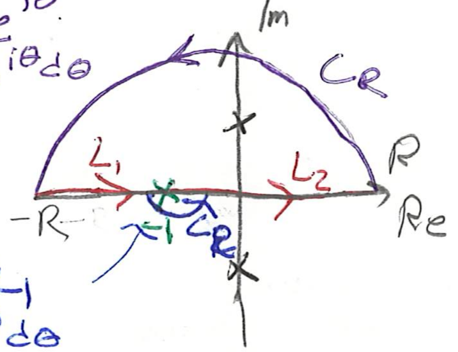
$$x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1) = (x+1)(x+i)(x-i)$$

Pole $-1, \; \pm i$ Enkelvärda

-1 ligger längs integral axel.

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{\infty}^{-1+\varepsilon} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} + \int_{-1+\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} \right)$$

$$z = Re^{i\theta}$$
$$dz = iRe^{i\theta} d\theta$$



$$z = \varepsilon e^{i\theta} - 1$$
$$dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$$

$$\gamma = L_1 + C_\varepsilon + L_2 + C_R$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}$$

$$I_\gamma = \int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \left(\int_{C_R} + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{R} \right) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}(i) \right)$$

$$I_{C_\varepsilon} = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{i \cancel{\varepsilon e^{i\theta}}\, d\theta}{\left[(\varepsilon e^{i\theta} - 1)^2 + 1\right] \cancel{\varepsilon e^{i\theta}}} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{i\, d\theta}{1+1} = \frac{\pi i}{2}$$

$$I_{C_R} = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{\underbrace{\left[(R^2 e^{2i\theta} + 1\right]\left(Re^{i\theta}+1\right)}_{\approx R^2 e^{2i\theta} \cdot Re^{i\theta}}} d\theta = \lim_{R \to \infty} \int \frac{ie^{-2i\theta}}{R^2} d\theta = 0$$

$$\Rightarrow I_\gamma = I + \frac{i\pi}{2}$$

$$\operatorname{Res}(-1) = \lim_{z \to -1} f(z)(z+1) = \frac{1}{z^2+1} = 1/2$$

$$\operatorname{Res}(+i) = \lim_{z \to +i} \frac{1}{(z+1)(z+i)} = \frac{1}{2i(1+i)}$$

$$I_\gamma = I + \frac{\pi i}{2} = 2\pi i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i(1+i)}\right) =$$

$$= \pi i + \frac{\pi}{1+i} = \pi i + \frac{\pi(1-i)}{2} = \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Svar

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{I = \frac{\pi}{2}}}$$

Alternativt ute omslut ej $(-i)$

$$\Rightarrow \quad I - \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi(1-i)}{2}$$

Uppgift 2 Integration längs ett grensnitt

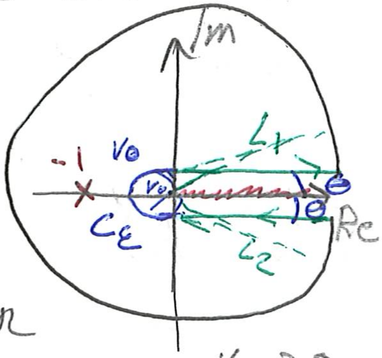
$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{x+1}\,dx \qquad 0<\alpha<1$$

Anmärkning: Integralen finns för att

1) $\frac{x^{-\alpha}}{x+1} \xrightarrow[x\to 0]{} x^{-\alpha}$ integrerbar vid $x=0$ $\quad \alpha<1$

2) $\frac{x^{-\alpha}}{x+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} x^{-\alpha-1}$ integrerbar vid x "=" ∞ för $\alpha>0$

$x^{-\alpha}$ positiv reell välj grensnitt $0<\theta<2\pi$



$V_0 \to 0$
$\varepsilon \to 0$
$R \to \infty$

Komplexifiera

$$z^{-\alpha} = (e^{\ln z})^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln z} =$$

$$= e^{-\alpha(\ln|z| + \arg(z))} =$$

$$e^{-\alpha(\ln r + i\theta)} = r^{-\alpha}\cdot e^{-i\alpha\theta} \qquad 0<\theta<2\pi$$

$$\gamma = L_1 + L_2 + C_R + C_\varepsilon$$

Residy - Teoremet

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{-1}(f) \qquad f(z) = \frac{z^{-\alpha}}{z+1}$$

- C_ε : $z = r_0 e^{i\theta}$ $\quad dz = r_0 i e^{i\theta} d\theta$

$$z^{-\alpha} = r_0^{-\alpha} e^{-i\alpha\theta}$$

$$I_{C_\varepsilon} = \int \frac{z^{-\alpha}}{z+1} dz = \lim_{\substack{r_0 \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} \int_{2\pi-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{r_0^{-\alpha} e^{-i\alpha\theta}}{\underbrace{r_0 e^{i\theta}+1}_{\to 1}} r_0 i e^{i\theta} d\theta =$$

$$= \lim_{r_0 \to 0} r_0^{1-\alpha} \int_{2\pi}^{0} i e^{i\theta(1-\alpha)} d\theta = 0$$

- C_R $\quad z = Re^{i\phi}$

$$I_{C_R} = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{R^{-\alpha} e^{-i\alpha\phi}}{\underset{\to Re^{i\phi}}{Re^{i\phi}+1}} Rie^{i\phi} d\phi =$$

$$= \lim_{R \to \infty} i R^{-\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha\phi} d\phi = 0$$

- L_1 : $z = re^{i\varepsilon}$ $\quad dz = re^{i\varepsilon} dr$

$$z^{-\alpha} = r^{-\alpha} e^{-i\alpha\varepsilon}$$

$$I_{L_1} = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0 \\ r_0 \to 0}} \int_{r_0}^{R} \frac{r^{-\alpha} e^{-i\alpha\varepsilon}}{re^{i\varepsilon}+1} e^{i\varepsilon} dr =$$

$$= \lim_{\substack{R \to \infty \\ r_0 \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} e^{i(1-\alpha)\varepsilon} \int_{r_0}^{R} \frac{r^{-\alpha}}{re^{i\varepsilon}+1} dr = \int_0^\infty \frac{r^{-\alpha}}{r+1} dr$$

- L_2 $\quad z = re^{i\underline{(2\pi-\varepsilon)}}$ $\quad$ Viktigt $2\pi - \varepsilon$ och ej $-\varepsilon$

$dz = e^{i(2\pi-\varepsilon)} dr$ $\quad z^{-\alpha} = r^{-\alpha} e^{-i\alpha(2\pi-\varepsilon)}$

$$I_{L_2} = \lim_{\substack{R \to \infty \\ r_0 \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} \int_{R}^{r_0} \frac{r^{-\alpha} e^{-i\alpha(2\pi-\varepsilon)}}{re^{i(2\pi-\varepsilon)}+1} e^{i(2\pi-\varepsilon)} dr = e^{-i\alpha 2\pi} \int_{\infty}^{0} \frac{r^{-\alpha}}{r+1} d$$

$$= -e^{-i\alpha 2\pi} \int_0^\infty \frac{r^{-\alpha}}{r+1} dr = -e^{-i\alpha 2\pi} I$$

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0+0+I - e^{-ia2\pi} I = 2\pi i \, \text{Res}_{-1}(f)$$

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i a}} \text{Res}_{-1}(f)$$

$$\text{Res}_{-1}(f) = \lim_{z\to -1} (z+1) \frac{z^{-a}}{z+1} = (-1)^{-\alpha} = (e^{i\pi})^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i a}} e^{-i\pi a} = \frac{2\pi e^{-i\alpha\pi}}{e^{-i\pi\alpha}(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})} =$$

$$\frac{2\pi i}{2i \sin \pi\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Uppgift 3 Välj en smart kurva

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx \qquad b>0 \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

Gaussisk integral

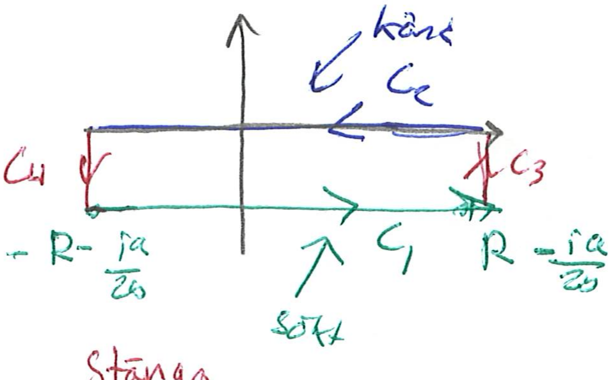
Vill utnyttja att $G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

- Kvadratkomplettera $iax - bx^2 = -b(x^2 - \frac{iax}{b}) =$

$$-b\left(x - \frac{ia}{2b}\right)^2 - \frac{a^2}{4b}$$

$$\Rightarrow \quad I = \lim_{R\to\infty} e^{-\frac{a^2}{4b}} \int_{-R}^{R} e^{-b\left(x-\frac{ia}{2b}\right)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} z = x - \frac{ia}{2b} \\ \to dz = dx \end{array} \right.$$

$$= e^{-\frac{a^2}{4b}} \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{-R-\frac{ia}{2b}}^{R-\frac{ia}{2b}} \underbrace{e^{-bz^2}}_{F(x)} dz}_{I_R}$$



Stänga

Residy

$$I_R + \int_{C_2} \cdots + \int_{C_3} \cdots + \int_{C_4} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Inga pol}}}{=} 0$$

$$\int_{C_2} e^{-bz^2}\,dz \underset{z=x}{=} \int_{R}^{-R} e^{-bx^2}\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\int_{C_3} e^{-bz^2}\,dz \underset{\substack{z=R+iy \\ dz=i\,dy}}{=} \int_{-\frac{a}{2b}}^{0} e^{-b(R+iy)^2}\,i\,dy = \underbrace{e^{-bR^2}}_{\to 0} \int_{-\frac{a}{2b}}^{0} e^{by^2} e^{-2ibRy}\,dy$$

$$\left| e^{-2ibRy} \right| = 1$$

$$\to 0$$

$$\int_{C_4} e^{-bz^2}\,dz \underset{\substack{z=-R-iy \\ dz=-i\,dy}}{=} -\int_{0}^{\frac{a}{2b}} e^{-b(R+iy)^2}\,i\,dy =$$

$$= -i\underbrace{e^{-bR^2}}_{\to 0} \underbrace{\int_{0}^{a/2b} e^{by^2} e^{2ibRy}\,dy}_{\text{Begränsad}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} I_R = -\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\Rightarrow I - \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-a^2/4b}$$

15/11 Pol på reella axeln.

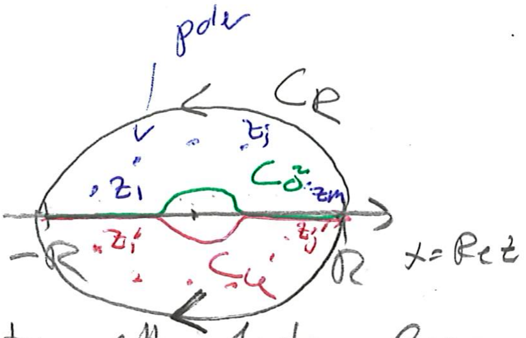
Cauchys Principalvärde. f kontinuerlig

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\tilde{\delta}}}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx - i\pi f(x_0) \quad ①$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_u}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx + i\pi f(x_0) \quad ②$$

Residy teoremet

Antar Jordans lemma $R\to\infty_0$



$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\tilde{\delta}}}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz + \cancel{\int\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz}$$

$$= 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z_j)}{z_j-x_0}\right] \quad ③$$

Antas att Jordans lemma är uppfyllt i övre halvplanet

$$(1) \text{ o } (3) \Rightarrow \quad P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = i\pi f(x_0) + 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z_j-x_0}\right.$$

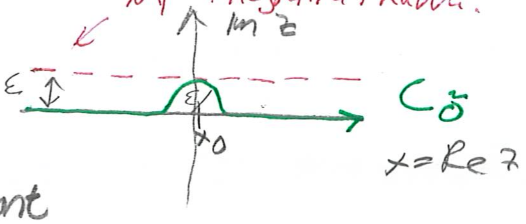
Antas istället att Jordan lemma är uppfyllt i undre halvplanet

$$2 \text{ o } 3 \Rightarrow \quad P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = -i\pi f(x_0) + 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z_j')}{z_j'-x_0}\right.$$

(3'') Kolla tecken

(3)' och (3)'' Kan snyggas upp med hjälp av Feynmans trick

Kolla in $C_{\tilde{\delta}}$



$$\int_{C_{\tilde{\delta}}}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \approx \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+i\varepsilon)}{x+i\varepsilon-x_0}\,dx \underset{f \text{ kont}}{=}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x+i\varepsilon-x_0}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx$$

Flyttat ner polen i nedre halvplanet.

$$1\ \underline{o}\ 4 \Rightarrow \quad P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x-x_0}\,dx = i\pi F(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx \quad ⑤$$

Samma typ av konstruktion för C_u : Beräkna själv om tid

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x-x_0}\,dx = -i\pi F(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x-(x_0+i\varepsilon)}\,dx$$

↳ puffat upp polen i övre halvplanet

(5) och (6) och tillsammans

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x-x_0}\,dx = \pm i\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\delta(x-x_0)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x-(x_0\mp i\varepsilon)}\,dx \quad (7$$

Förkorta bort $\int_{-\infty}^{\infty} dx$

$$\boxed{\frac{1}{x-x_0\pm i\varepsilon} = P\,\frac{1}{x-x_0} \mp i\pi\,\delta(x-x_0)}$$

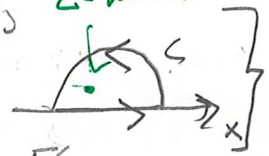
Masterformeln

Kramers - Kroning Relationen

Givet en funktion F analytisk i övre halvplanet $\varepsilon \in \mathbb{C}$

$z = x + i\varepsilon$

Betrakta $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon - z}\,d\varepsilon = \{$ Cauchys integralsats



$$= \begin{cases} F(z) & \text{om } \quad \operatorname{im} z > 0 \\ 0 & \text{om } \quad \operatorname{im}(z) < 0 \end{cases} \qquad F(z) = F(x+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\varepsilon-(x+i\varepsilon)} = F(x) \quad ①'$$

$$\text{Masterformeln} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon-(x+i\varepsilon)}\,d\varepsilon = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon - x}\,d\varepsilon + i\pi F(x) \quad (2)'$$

Antag Jordans lemma uppfyllt i övre halvplanet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon-(x+i\epsilon)} d\varepsilon = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon-(x+i\epsilon)} d\varepsilon \quad 3'$$

$$\Rightarrow (1)' \ (2)' \ (3)' \Rightarrow \cancel{2}\pi i F(x) = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon - x} d\varepsilon + \cancel{i\pi F(x)}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\pi i} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon - x} d\varepsilon$$

Tag Real- resp Imaginär-del av identiteten

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(F(x)) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon - x}\right) d\varepsilon$$

Tillämpbar på en inkomningsuppsitt.

$$\mathrm{Im}(F(x)) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(F(\varepsilon))}{\varepsilon - x} d\varepsilon$$

$\Longleftrightarrow$ Hilbert transform

Viktig tillämpning för Masterformeln / Kramers - Kroning

Fluktuations - Dissipationsteoremet

Ex Nyqvist relationen 1928

$I(\omega) = \frac{-2}{1-e^{-\beta\omega}}\, \omega \cdot \sigma$ Fouriertransformen $\langle I(t) I(0) \rangle$

$\beta = 1/kT$ $\quad \sigma = (\text{resistans})^{-1}$ Konduktans

Ex Brownsk rörelse Einstein 1905

$D = \mu k T$

$\uparrow$ Diffusions konstant $\quad \uparrow$ mobilitet

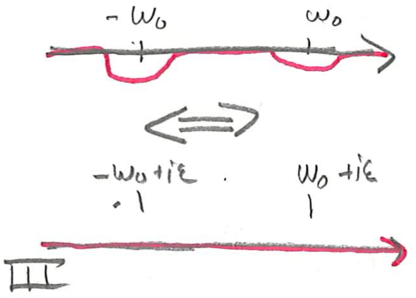
$\mu = V_d/F$ $\quad V_d$ drifthastighet

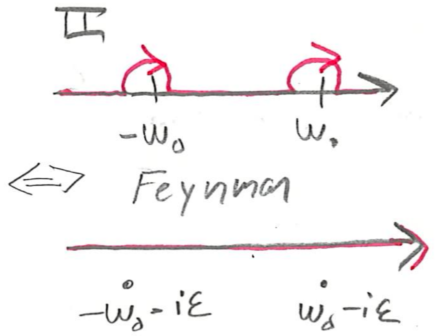
Tillbaka till drivna Harmoniska oscillatorn

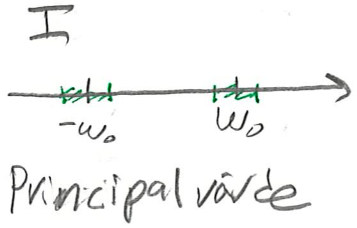
$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)$ $\quad$ Poler i $\omega = \pm\omega_0$

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

Tre möjliga definitioner av $\int$ för $G(t)$







Ger olika resultat!

Test av III

$G(t)$: $\pm\omega_0 \Rightarrow \pm\omega_0+i\varepsilon$

$$G(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-\omega_0-i\varepsilon)(\omega+\omega_0+i\varepsilon)}\,d\omega =$$

$\left\{ \text{Välj } t \geq 0 \Rightarrow \text{Sluta kurvan i övre halvplanet} \right] =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left(\text{Res}\left[f(-\omega_0+i\varepsilon)\right] + \text{Res}\left[f(\omega_0+i\varepsilon)\right]\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left(\frac{e^{i(-\omega_0+i\varepsilon)t}}{-\omega_0+i\varepsilon-(\omega_0+i\varepsilon)} + \frac{e^{i(\omega_0+i\varepsilon)t}}{\omega_0+i\varepsilon+(\omega_0-i\varepsilon)}\right)$$

$$= -i\left(\frac{e^{-i\omega_0}}{-2\omega_0} + \frac{e^{i\omega_0}}{2\omega_0}\right) = \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \qquad t \geq 0$$

$G(t)$ $\quad t<0 \Rightarrow 0$ ty saknas poler i undre halvplanet

III $\Rightarrow$ $G(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\;\Theta(t)$ kallas G^R retarderad.

p.s.s

II $\Rightarrow$ $G(t) = -\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\;\Theta(-t)$ kallas G^A avancerad

$\Rightarrow$ I ger $G(t) = \frac{1}{2}\left(G^R(t)+G^A(t)\right)$ kallas G^S symmetrisk

Chanse på att $G^{(A)}$ är rätt

Linjär respons

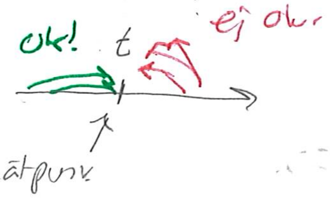
$$X(t) = \int_0^\infty G(t-s)\, F(s)\, ds = \{ G \to G^A \} =$$

0 ← När systemet börjar störas

Antar translationsinvarians i tid.

$$= \int_0^\infty G^A(t-s)\, F(s)\, ds = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty \sin(\omega_0(t-s))\, F(s)\, \Theta(s-t)\, ds =$$

$$= -\frac{1}{\omega_0} \int_t^\infty \sin(\omega_0(t-s))\, F(s)\, ds.$$



Uttrycket beror på vad som händer i framtiden

⇒ Icke kausal

Väljer $G^{(R)}$ som ej beror på framtiden.

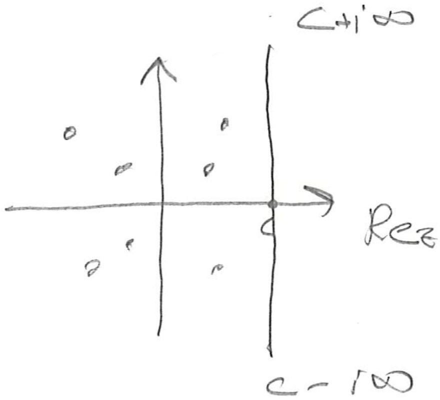
20/11-2019

[illegible]

Standardmetod för att ta fram Greens funktioner : Fourier
andra alternativ Laplace Transform.

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} G(t)\, dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p) e^{pt}\, dp$$



Ex
Driven harmonisk oscillator

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

Laplace transform.

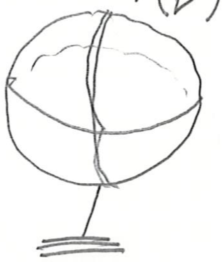
$$\Rightarrow \quad (p^2 + m\omega^2)\, \tilde{G}(p) = 1$$

$$\Rightarrow \quad G(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \;\; \Theta(t).$$

Ger rätt dock ofta svårare att beräkna

Hur hantera randvillkor vid GF beräkningar

På skalet $V(\bar{r}) = 0$



Ex $\quad \nabla^2 v(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$

Definiera $\quad \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\text{sing}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + F_{\text{REG}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

Löser $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ i detta exempel. $\qquad \nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ lösning till homogena ekvationen

Välj $\bar{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ så att randvillkor uppfylles.

Integralekvationer

I bland lättar än differentialekvationer.

Även om fysiken formulerad med diffekvationer

Klassisk fysik

Newtons – Partikelmekanik – Hamiltonsekvationer $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial p} = -\dot{q} \end{array}\right.$ 2st

Elektrodynamik – Maxwells fyra ekvationer.

Hydrodynamiken – Navier-Stokes 3 st

Allmän relativitetsteori – Einsteins fältekvationer 10st

19 fundamenta ekvationer.

Kvantfysik

Icke relativistisk: Schrödinger.

Relativistisk KM (kvant fält teori) Euler-Lagrange för $\underset{\sim}{\overset{\overset{\text{electro}}{\downarrow}}{\text{QED}}}$, $\underset{\sim}{\overset{\downarrow}{\text{QCD}}}$, $\underset{\sim}{\text{QFD}}$

Hur skriva om en diffekvation som en integralekvation?

Ex $y''(x) = g(x, y(x))$ T.ex. $g(x,y) = 5x^2 \overset{\text{linjär}}{+} y(x)$

eller $g(x,y) = y^2(x)$ icke linjär.

Integrera!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\,dz + C_1$$

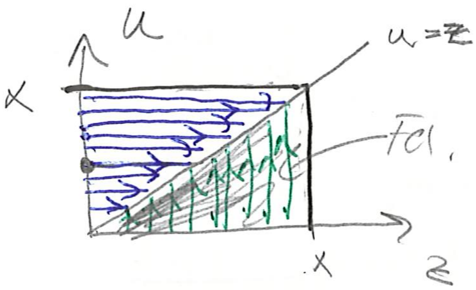
Igen!

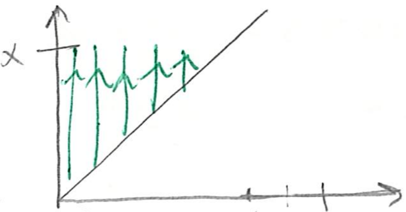
$$y(x) = \underbrace{\int_0^x du \int_0^u g(z, y(z))\,dz}_{\text{Kolla in denna!}} + C_1 x + C_2$$

$$\int_0^x du \int_0^u g(z, y(z) dz$$

$$= \int_0^x dz (g(z, y(z)) \int_z^x du$$

$$= \int_0^x (x-z) \quad dz (g(z, y(z))$$





$$\Rightarrow \quad y(x) = \int_0^x \underbrace{(x-z)}_{\text{integalkärna } K(x,z)} \quad g(z, y(z)) dz + \underbrace{C_1 x + C_2}_{F(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = F(x) + \int_0^x K(x,t) g(z, \underline{y(z)}) dz$$

Den okända befinner sig innanför integraltecknet

Typfall: Volterra av andra slaget

Notera inbyggda randvillkor.

Fyra klasser av integralekvationer!

1. $f(x) = \int_a^b K(x,t) \, y(t) \, dt$ FREDHOLM Integralekvation av första typen
$a, b \in \mathbb{R}$

2. $\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) \, dt$ FREDHOLM av andra typen
$\lambda \in \mathbb{C}$

3. $F(x) = \int_a^x K(x,t) \, \varphi(t) \, dt$ Volterra av första typen. andra integrationsgränse $b \Rightarrow x$

4. $\varphi(x) = F(x) + \int_a^x K(x,t) \varphi(t) dt$ Volterra av andra typen. $\lambda \to 1$ $b \to x$

Särskilt viktig integralekvation – Fredholm II typen

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad ①$$

Antag K separabel $\quad K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x)\,N_j(t)$

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, M_j(x) \qquad (1)$$

$$\uparrow \; c_j \equiv \int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Multiplicera (1) med $N_i(x)$ och integrera $\int_a^b \cdots dx$

$\Downarrow$

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_j \qquad (2)$$

$$b_i = \int_a^b N_i(x)\, f(x)\,dx \qquad a_{ij} = \int_a^b N_i(x)\, M_j(x)\,dx$$

Skriv två på vektor form

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(2) $\Rightarrow$ $(1 - \lambda A)\,c = b$ $\quad$ (3) linjärt ekvationsystemet.

Lös för c sätt in i (1) $\Rightarrow$ problemet löst!

Finns alltid en lösning ?

Svar: Fredholm alternativet. För varje $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$:

Antingen så har den inhomogena ekvationen en unik lösning för varje

↖ $f(x) \neq 0$ i ①

val av λ eller så har den homogena ekvationen $f(x) \equiv 0$ åtminstone en trivial lösning

↑ icke

Diskutera som del av inlämnings-uppgift.

Generalisering (FREDHOLM 1903)

Varje tillräckligt "snäll" kärna K kan skrivas som

$$K(x,t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

Antag att $k(x,t)$ ej är separabel. Vad görs?

Ett (populärt!) alternativ Neumann serie (Störningsräkning)

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad ①$$

Gissa lösning! ("Välj ett frö" $\varphi_0(x)$")

T.ex $\varphi(x) \approx F(x) = \varphi_0(x)$ Ok om λ liten $[a,b]$ liten
K litet etc.

Nollte ordningens ↗
approximation.

Sätt in i ① Får då φ_1 ⇒

$$\varphi_1 = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\underbrace{F(t)}_{\varphi_0(t)}dt$$

itereras.

$$\varphi_2 = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left(F(t) + \lambda\int_a^b K(x,t)F(t)dt'\right)dt$$

⇒ Serie där n:te ordningens approximation ges av

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x)$$

där $u_0(x) = F(x)$ och $u_n(x) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots$

$\cdots K(t_{n-1},t_n)F(t_n)dt_1\cdots dt_n$.

Kontroll vi får

Förvänt $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda^i u_i(x)$

Villkorat.
$|\lambda|\cdot\int_a^b dx \int_a^b dt\,|K(x,t)|^2 < 1$

I Fysik OFTA en eller två termer.

Tenta uppgift
2 inlämninga.

Tenta annorlunda än inlämningar.

Mer teori / konceptuell karaktär. Skissa lösnings strategier.

konstruera ekvationer, av fysik problem,

Räkneövning

Green funktioner

För partiella differentialekvationer

Ex D'Alemberts operator

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}$$

$$\Box g = \nabla^2 g(\bar{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Våg ekvation}$$

Används i elektromagnetisk fältteori

$$\Box \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}$$ tidsberoende poisson ekvation för skalärfält

$$\Box \bar{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 j(\bar{r}, t)$$ för vektorfält

$$\bar{E} = \bar{\nabla}\phi + \frac{d\bar{A}}{dt} \qquad \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Green funktion till d'Alemberts operator

$$\Box G(\bar{r}, \bar{r}', t, t') = \delta(\bar{r} - \bar{r}')\,\delta(t - t')$$

- $\Box$ är translations och tidsinvariant

Operatorn har bara konstanta koefficienter

till ex. $L_x = \frac{d^2}{\partial x^2} + p\frac{d}{dx} \; x + q$

blir p och q oberoende av x om q ej

$$L_x = \frac{d}{dx^2} + \cancel{p(x)}\frac{d}{dx} + \cancel{q(x)}$$

$$\Rightarrow G(\bar{r},\bar{r}',t,t') = G(\bar{r}-\bar{r}', t-t') = G(\bar{r},t)$$

väljer $\bar{r}'=0$ $t'=0$

Centr i origo stöt vid $t=0$

$$\Box G(\bar{r},t) = \delta(\bar{r})\,\delta(t)$$

fysik konvention.

FT

$$\circ\ G(\bar{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{k},\omega)e^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)}\,d\bar{k}\,d\omega$$

$$\circ\ G(\bar{k},\omega) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{r},t)e^{-i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)}\,d\bar{r}\,dt$$

$$\delta(\bar{r})\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)}\,d\bar{k}\,d\omega =$$

$$\Rightarrow \Box G(\bar{r},t) = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)G(\bar{r},t) = \delta(\bar{r})\,\delta(t)$$

FT

$$\Leftrightarrow \left((ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2\right) G(\bar{k},\omega) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\bar{k},\omega) = 1$$

$$G(\bar{k},\omega) = \frac{c^2}{c^2k^2-\omega^2}$$

$$G(\bar{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{c^2k^2-\omega^2}e^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)}\,d\bar{k}\,d\omega$$

Poler i $\omega = \pm ck = \pm \omega_0$ $\qquad k=|k|$

Sfäriska koordinater → förenkl. integralen.

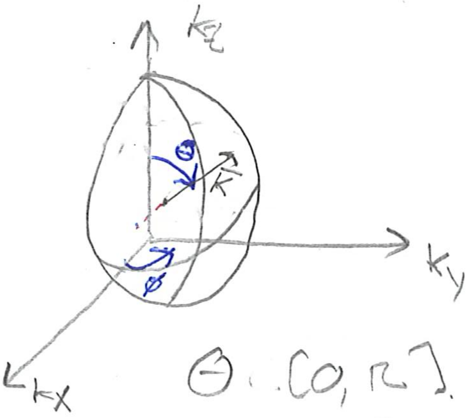
$k = |\bar{k}|$ $\quad r = |\bar{r}|$

$d\bar{k} = k^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dk$

$= -k^2 \, dk \, d\varphi \, d(\cos\theta)$

$\vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot r \cdot \cos\theta$

Välj $\bar{r} \parallel k_z$



$\theta \; [0, \pi]$.

$\cos\theta \; [1, -1]$.

$$G(\bar{r}, t) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\cos\theta=1}^{-1} d(\cos\theta)) \int_0^{\infty} dk \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \frac{c^2 k^2}{c^2k^2 - \omega^2} \cdot e^{i(krcos\theta - \omega t)}$$

$$\int_{\cos\theta - 1}^{-1} e^{ikr\cos\theta} d(\cos\theta) = \left[\frac{1}{ikr} e^{ikr\cos\theta} \right]_{-1}^{1} =$$

$$\frac{1}{ikr}\left(-e^{ikr} + e^{-ikr}\right) = -\frac{2}{kr} \sin(kr)$$

$$\Rightarrow G(\bar{r}, t) = \frac{c^2}{(2\pi)^3} \int_{k=0}^{\infty} \frac{2}{kr} \sin(kr) \cdot k^2 \, dk \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{c^2k^2 - \omega^2} d\omega$$

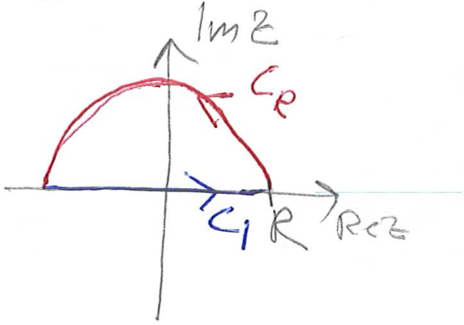
$$I = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{c^2k^2 - \omega^2} d\omega$$

Beräkn. först I
ty enkl. med intervall $(-\infty, \infty)$

Jordas lemma

"Om $g(z)$ är en funktion sådan att $\lim\limits_{r \to \infty} g(re^{i\theta}) = 0$
för alla $\theta \in [0, \pi]$ så gäller

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\boxed{C_R}} g(z) e^{imz} dz = 0 \quad m > 0$$



- komplexifiering, residykalkyl, Jordans lemma.

Vill anva Jordans lemma.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2k^2-\omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

- $t<0$: Slut kurvan i övre halvplanet ?
- $t>0$: Slut kurvan i undre halvplanet.

$$\lim_{r\to\infty} g(re^{i\theta}) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{ck^2 - r^2e^{i2\theta}} = 0 \quad \forall\theta \text{ ok!}$$

Retarderade Greens funktionen $G^{(R)}$

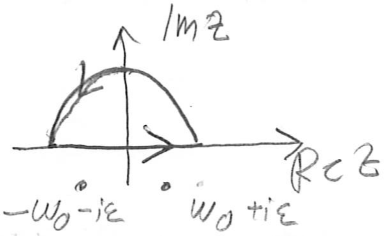
$\hookrightarrow \quad G^{(R)}(\bar{r},t) = 0$ för $t<0$

$\neq 0$ för $t>0$

Referenstid $t=0$ från $t'=0$.

$\Rightarrow \quad G^{(R)}(\bar{r},t) \sim \theta(t)$ Heaviside funktion

$\Rightarrow$ knuffa ner polerna i undre halvplanet $\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 - i\varepsilon$

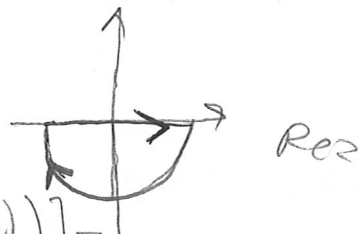


- För $t<0$

inga poler i kurvan

$\Rightarrow \quad I = 0$

- För $t>0$



$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\pi i\left(\text{Res}_f(-\omega_0 - i\varepsilon) + \text{Res}_f(\omega_0 - i\varepsilon)\right)\right] =$$

$$\left\ulcorner f(\omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{(ck-\omega)(ck+\omega)} \right\lrcorner$$

$$= -2\pi i\left[\frac{e^{ickt}}{ck+ck} + \frac{e^{-ickt}}{ck+ck}\right] = \frac{-\pi i}{ck}\left(e^{ickt} + e^{-ickt}\right)$$

$$G^{(R)}(\bar{r},t) = \frac{c^2}{(2\pi)^3 r}\int_{k=0}^{\infty} \underbrace{2\sin kr}_{(e^{ikr}-e^{-ikr})/2i}\, k\, dk\ \frac{i\pi}{ck}\left(e^{ickt}+e^{ickt}\right)\theta(t)dk$$

$$= \frac{c\pi}{(2\pi)^3 r}\int_{k=0}^{\infty}\Big(-e^{ik(r+ct)}-\underset{k\to -k}{e^{ik(r+ct)}}+e^{ik(r-ct)}+\underset{k\to -k}{e^{-ik(r-ct)}}\Big)\theta(t)\,dk$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ik(r-ct)}-e^{ik(r-ct)}\right)dk\ \theta(t) =$$

Fourier integral!

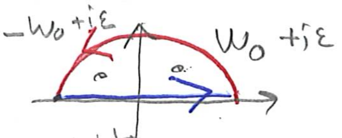
$$= \frac{c}{4\pi r}\big(\delta(r-ct)-\underbrace{\delta(r+ct)}_{=0 \text{ by } r,c,t>0}\big)\,\theta(t)$$

$$G^R(\bar{r},t) = \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r-ct)\,\theta(t)$$

Avancerade Green Funktion

$$G^A(\bar{r},t)\ \begin{matrix}\neq 0 & t<0\\ 0 & t>0\end{matrix} \qquad G^A(\bar{r},t)\sim\theta(-t)$$

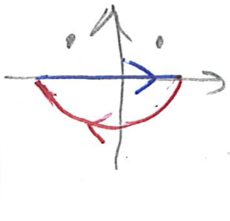
- for $t<0$



$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\pi i\left(\mathrm{Res}_f(-w_0+i\varepsilon)+\mathrm{Res}_f(-w_0-i\varepsilon)\right)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{ickt}}{ck+ck}+\frac{e^{-ickt}}{ck+ck}\right] = \frac{\pi i}{ck}\left[e^{ickt}+e^{-ickt}\right]$$

- For $t>0$



$$I = \frac{\pi i}{ck}\left[e^{ickt}+e^{ickt}\right]\theta(-t)$$

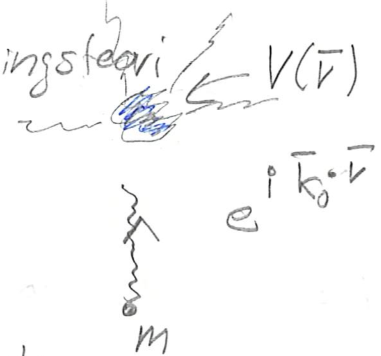
$$\Rightarrow\quad G^{(A)}(\bar{r},t) = -\frac{c}{4\pi}\big(\underbrace{\delta(r-ct)}_{0 \text{ by } t<0,\ rc>0}-\delta(r+ct)\big)\,\theta(-t)$$

$$G^A(\bar{r},t) = \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r+ct)\,\theta(-t)$$

22/11

Ex Integrations ekvationer.

Born approximation för stationär spridningsteori



Tidsoberoende Schrödingerekv.
(Stationär $V(|r|)$ oberoende av t)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\bar r)+V(\bar r)\psi(\bar r)=E\psi(\bar r) \quad ①$$

↖ Antas ellastisk spridning ⇒ Bevarar E

$$E=\frac{\hbar k_0^2}{2m}$$

$\psi(\bar r,t)=e^{-iEt/\hbar}\psi(\bar r)$ Där $\psi(\bar r)$ är lösningen till ①

$$① \Rightarrow \underbrace{(\nabla^2+k_0^2)}_{L}\underbrace{\psi(\bar r)}_{g}=\underbrace{-\frac{2m}{\hbar^2}V(\bar r)\psi(\bar r)}_{f}$$

Kom ihåg $Lg=f \Rightarrow g=\int Gf$ där $LG=\delta$

Givet detta $\Rightarrow$ $$\psi(\bar r)=\int_{\mathbb{R}^3}G(\bar r,\bar r')\left(-\frac{2m}{\hbar^2}V(\bar r')\psi(\bar r')\right)d\bar r' \quad ②$$

↑ Välj retarderade GF till $L=\nabla^2+k^2$

$$G(\bar r,\bar r')=G(\bar r-\bar r')=-\frac{e^{ik_0|\bar r-\bar r'|}}{4\pi|\bar r-\bar r'|} \quad ③$$

Men $V(\bar r)=0 \Rightarrow \psi(\bar r)=0$ FEL!

Inför randvillkor $\psi(\bar r)=e^{i\bar k\cdot\bar r}$ När $V(\bar r)=0$

$$\Rightarrow \psi(\bar r)=e^{ik_0\cdot\bar r}-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{\mathbb{R}^3}G(\bar r-\bar r')V(\bar r')\psi(\bar r)\,d\bar r' \quad ④$$

$$\rho(\bar r)=f(\bar r)-\lambda\int K(\bar r,\bar r')\rho(\bar r')\,dv$$

Fredholm II typen.

3 i 4

$$\Rightarrow \psi(\bar{r}) = e^{i\bar{k}_0\cdot\bar{r}} + \frac{2m}{\hbar^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|} V(\bar{r}')\psi(\bar{r}')d\bar{r}' \quad ⑤$$

Antag $V(\bar{r}')$ litet m.a.p. en skala och referens.
dvs $|V(\bar{r}')| << E$

Neumann $\psi(\bar{r}) \approx e^{i\bar{k}_0\cdot\bar{r}} = \psi_0(\bar{r})$ i 5

$$\psi_1(\bar{r}) \approx e^{i\bar{k}_0\cdot\bar{r}} + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} V(\bar{r}) e^{i\bar{k}_0\cdot\bar{r}'} d\bar{r}'$$

Born approximationen!

$k(\bar{r}, t) = k(t, \bar{r})$ Symmetrisk
Speciell teori.

Avsluta delen av integralekvationer.

Variationskalkyl.

Bilda integralen

beroende variabel

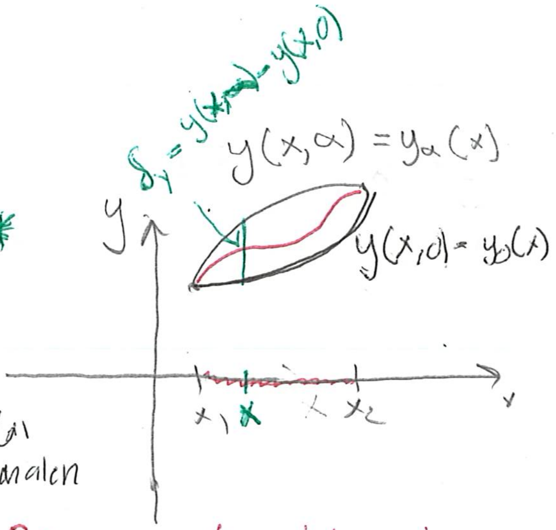
Oberoende variabel

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F\left[y(x,\alpha), \frac{dy(x,\alpha)}{dx}, x\right] dx \; *$$

Funktion av α

eller funktional av ~~y~~ y_α
(funktion av funktioner)

Antag $y_0(x)$ löser funktionalen



Börja och sluta i samma punkt

Variationskalkylens problem.

Hitta den funktion $y(x,\alpha)$ som gör $I(\alpha)$ stationär

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow df = 0$$

$$\left.\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha_0=0} = 0$$

Vanlig benämning på lösningens index.

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \quad \delta I = 0$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \Leftrightarrow \left.\frac{\delta I}{\delta y_\alpha}\right|_{\alpha_0=0} = 0$$

$$\delta y = y(x,\alpha) - y(x,0) = \alpha\,\eta(x)$$

Deformation

Med randvillk $\eta(x_1) - \eta(x_2) = 0$

$$\Rightarrow \quad y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\,\eta(x) \qquad ①$$

Betrakta $\frac{dI}{d\alpha}$!

$$* \Rightarrow \quad \frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \cancel{\frac{\partial F}{\partial x}} \cdot \overset{0}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} \right) dx \qquad ②$$

$$① \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \\ \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta(x)}{dx} \end{cases}$$

Snälla funktioner!

PI

$$2 \Rightarrow \frac{dI}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta(x) + \boxed{\frac{\partial F}{\partial y'}\,\frac{\partial \eta(x)}{dx}} \right) dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\,\frac{d\eta(x)}{dx} = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\cancel{\eta(x)} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta(x)\,dx$$

0

Villkor för stationäritet

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x)\,dx = 0$$

godtycklig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Eulers ekvation

F = lagrangian

$\Rightarrow$ Välj $F = L$ $\Rightarrow$ Euler Lagrange ekvation

$y \to x, \quad x \to t$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Två kommentarer

① max, min eller sadelpunkt ?

Använd fysikalisk intuition

② Antag $F = F[y, y', x]$ saknas explicit x-beroende

$$\Downarrow \text{ Euler.}$$

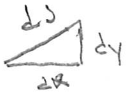
$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow F - y'\frac{dF}{\partial y'} = \text{Konstant}$$

Bevis utför $\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{dF}{\partial y'}\right) = y'\left(\frac{dF}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{dF}{\partial y'}\right) =$

$= 0$ Altern $y' = 0 \Rightarrow y = \text{konst}$

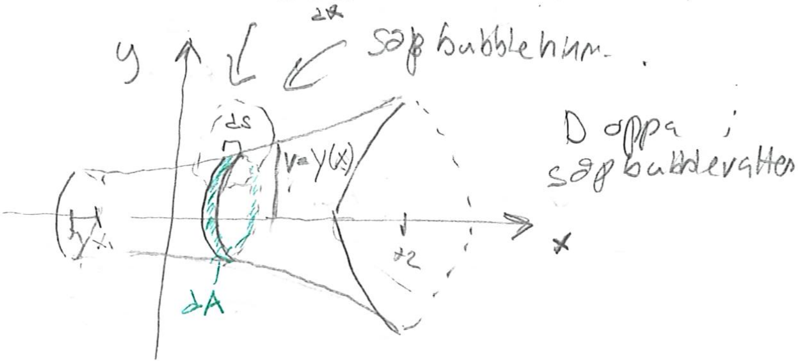
Eulers ekvation.

Ointressant.



$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Ex Söp bubbleproblemet



Problem

Hur ser ytan ut?

Vill minimera fria energin

$F = E - TS$

Sätt $T = 0$ ty S försumbar i frågeställningen

$$E = \overset{\uparrow}{\sigma} A$$

ytspänning

Vill alltså minime A

$$I = A = \int \overbrace{2\pi y}^{\text{omkretsen}} \overbrace{ds}^{\text{tjocklek}} = \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y\left(1 + y'^2\right)^{1/2}}_{F(y, y', x)} dx$$

saknar explicit x

$$\Rightarrow F - y'\frac{dF}{dy'} = C$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} =$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y\cdot(1+y'^2)^{1/2} - y\,y'^2\left(\frac{1}{1+y'^2}\right)^{1/2} = C$$

$$\frac{y(1+y'^2) - y\,y'^2}{(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{y}{(1+y'^2)^{1/2}} = C$$

Kvadrera

$$\frac{y^2}{1+y'^2} = C^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y'} = \frac{C}{(y^2-C^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{dy} = \frac{C}{(y^2-C^2)^{1/2}}$$

Variabel separation.

$$\Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{C}{\left(\left(\frac{y}{C}\right)^2-1\right)^{1/2}}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad x = C\,\mathrm{arccosh}\, y/C - C'$$

$$\boxed{y = C\cosh\left(\frac{x-C'}{C}\right)}$$

Lösningen måste kontrolleras!

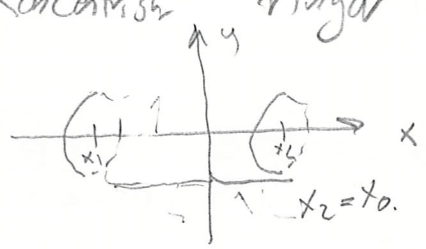
C och C' bestäms med randvillkoret

$y(x_1)=y_1$ lilla radien $y(x_2)=y_2$ radie stora ringen.

Euler ger ett nödvändigt villkor för en lösning

OBS! Ej tillräckligt, gäller inte nödvändigtvis allmänt

Till Ex Välj två lika stora koncentriska ringar



$y_1=1 \quad y_2=1$

$$y = C\cosh\left(\frac{x-C'}{C}\right)$$

$\Rightarrow \quad C'=0$ p.g.a. symmetri

Randvillkor $\quad 1 = C\cosh\frac{x_0}{C}$

Välj $x_0 = 1/2$

$$\Rightarrow 1 = c \cosh \frac{1}{2c} \begin{cases} c \approx 0.24 \Rightarrow A = 6.85 \\ \underline{c \approx 0.85} \Rightarrow A = 6.00 \end{cases}$$

Ger min.

Antag istället att $x_0 = 1$

$\Rightarrow 1 = c \cosh \frac{1}{c} \Rightarrow$ saknar reellvärda lösningar

<u>Tolkning</u> Såpbubblan har spruckit

$1 = c \cosh \frac{x_0}{c} \Leftrightarrow x_0 = c \operatorname{arccosh} 1/c$

Har reellvärd lösning omm $c \leq 1$ maximalt x_0 då

$\frac{dx_0}{dc} = 0 \Rightarrow x_{0\,max} = 0.66$ kritisk punkt.

26/11

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^3}{\partial t^2}$$

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Fel på förra ~~före~~ räkneövningen.

~~Sadelmetoden~~ Sadelpunktsmetoden

Tag bara formeln på inlämningsuppgiften behöver ej härledas.

→ För att approximera integraler på formen

$$I(r) = \int_\gamma g(z) e^{F(z)r} dz$$

För stora $r > 0$ $r \in \mathbb{R}$ $F(z)$ analytisk funktion $g(z)$ ett polynom i z, γ en kurva så att ändpunkterna inte bidrar till integralen.

Idé

- $|I(r)|$ stort då realdelen av $F(z)$ är stor

$$|g(z) \cdot e^{F(z)\cdot r}| = |g(z)| \cdot |e^{[Re(F(z))+i\,Im(F(z))]r}| = $$
$$= |g(z)| \cdot e^{Re(F(z))r}$$

- $F(z)$ analytisk → förskjuta γ så att den passerar området där realdelen är stor.

- approximera integralen med en utveckling av funktionen $F(z)$ i närheten av det området (där realdelen är stor).

Större r → bättre approximation

Varför sadelpunkter?

F - analytisk → realdelen o imaginärdelen är harmoniska funktioner $F(z) = u(z) + iV(z)$

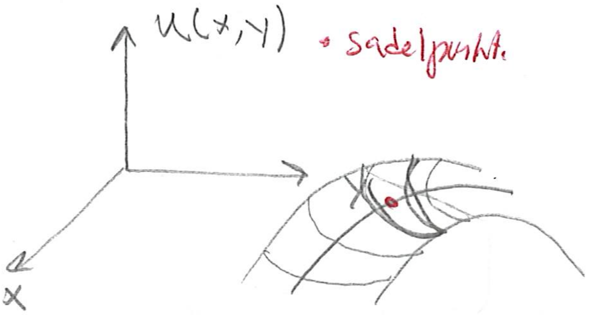
Cauchy - Riemanns ekvationer

$$① \begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} ②$$

$$① \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \overset{①}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{du}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(z) \text{ hamonisk}$$

Bara sadelpunkt vid analytisk funktion



Max i x-led
men min i y-led

⇒ Inga lokal max min
men sadelpunkter.

Plan

1. Hitta en stationär punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ till $u(x,y)$
2. Taylorutveckla $F(z)$ runt z_0 till andra ordningen
& approximera $g(z) \approx g(z_0)$
3. Definiera γ så att den passerar genom z_0 i de två riktningar där u avtar snabbast
4. Evaluera integralen med hjälp av $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a>0$

Detaljer

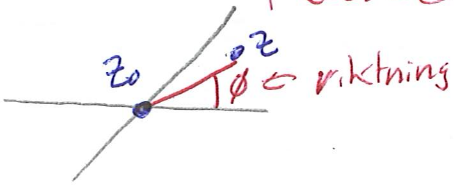
Antag att $z_0 = x_0 + iy_0$ är en stationär punkt till $u(z) = \text{Re}(F(z))$

Taylor. $F(z) = F(z_0) + \frac{1}{2} F''(z_0)(z-z_0)^2$

Stationär punkt ger $F'(z_0) = 0$.

Låt $F''(z) = \rho e^{i\theta}$

$z - z_0 = se^{i\phi}$



$$\Rightarrow \quad f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 e^{i\theta+2i\phi}$$

$$u(z) \approx u(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \cos(\theta+2\phi)$$
$$v(z) \approx v(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \sin(\theta+2\phi)$$

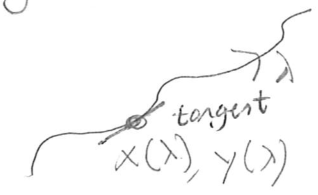
- $\frac{du}{ds} = s\rho \cos(\theta+2\phi)$ Avtar snabbast då $\cos(\theta+2\phi) = -1$

$$\theta+2\phi = \pi + 2\pi n$$
$$\phi = \frac{\pi+\theta}{2} + \pi n$$

För givet θ finns två lösningar för ϕ

ϕ_0 $(n=0)$ = $\phi_0 + \pi$ $(n=1)$ "dalriktningar"

- Vad händer med imaginärdelen?



Titta på $v(x(\lambda), y(\lambda)) = C$

Kurva med konstant imaginärdel.

Deriverar båda sidor med avseende på λ;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\substack{\nabla V \\ \text{gradient}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial u}{\partial \lambda} \end{pmatrix}}_{\text{tangent}} = 0$$

Cauchy Riemanns ekvationer $\Rightarrow \bar{\nabla} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$

$$= (\bar{\nabla} u)^\perp$$

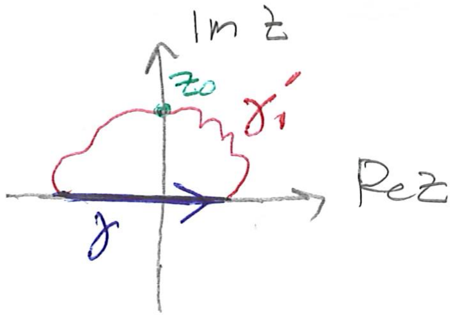
Ty $(\bar{\nabla} u)^\perp \cdot (\bar{\nabla} u) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} v = (\bar{\nabla} u)^\perp$$

Tangenten till kurva är parallel med gradienten till u och vinkelrät mot gradienten till v. Riktningar med konstant imaginärdel ~~v~~ är precis de riktningar där u förändras snabbast

⇒ Kan sätta imaginärdel $v = c = v(z_0)$ istället för $v(z)$ på hela kurvan.

Förskjuta integrationskurvan



Integranden är analytisk

$$\int_{\gamma\cup\gamma'} g(z)e^{rF(z)}dz = 0$$

$$\int_{\gamma} g(z)\, e^{rF(z)}dz = \int_{\gamma'} g(z)\, e^{rF(z)}\, dz$$

Formel för Sadelpunktsmetoden

$$I(r) = \int_{\gamma} g(z)e^{F(z)r}dz$$

Taylor $F(z) \approx u(z_0) + iv(z_0) - \frac{1}{2}\rho s^2$

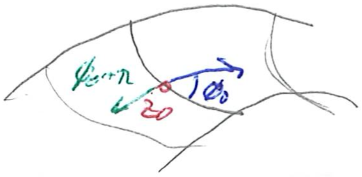
$g(z) \approx g(z_0)$

med $z - z_0 = se^{i\phi_0}$ $\quad dz = e^{i\phi_0}ds$

$$\phi_0 = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$\phi_0 : s \in [0, \infty)$ $\quad e^{i\phi_0}$

$\phi_0 + \pi \quad s \in [0, \infty)$ $\quad e^{i(\phi_0 + \pi)} = e^{-i\phi_0}$



$$I(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z_0)\, e^{[u(z_0)+iv(z_0) - \frac{1}{2}\rho s^2]v}\, e^{i\phi} ds$$

$$= e^{f(z_0)\cdot v} e^{i\phi_0} g(z_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v}{2}\rho s^2} ds$$

$$\boxed{I(v) \approx e^{f(z_0)v} e^{i\phi_0} g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{v\rho}}}$$

Ex For Stora N

$$N! = \int_0^\infty e^{-x} x^N dx = \left\{\begin{matrix} x = Nz \\ dx = Ndz \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty e^{-Nz} (Nz)^N N dz =$$

$$= N^{N+1} \int_0^\infty e^{-Nz} z^N dz = N^{N+1} \int_0^\infty e^{-Nz} e^{N\ln z} dz$$

$$= N^{N+1} \int_0^\infty e^{N(\ln z - z)} dz$$

Visa ändpunkt ej bidrar

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}\cdot x^N = 0 \qquad \text{Ok!}$$

$$\lim_{x \to 0} e^{-x} x^N = 0$$

$g(z) = N^{N+1}$ konstant $\Rightarrow g(z_0) = N^{N+1}$

$f(z) = \ln z - z \Rightarrow f(z_0) = -1$

$f'(z) = \frac{1}{z} - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow z_0 = 1$

$f''(z) = -\frac{1}{z^2} \Rightarrow f''(z_0) = -1 = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \rho = 1 \quad \theta = \pi$

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 = -1 - \frac{1}{2}(z-z_0)^2$$

$$\boxed{\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = 0} \qquad \phi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \pi = \pi$$

$$N! \approx e^{Nf(z_0)} e^{i\phi_0} g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{N\beta}} = e^{-N} e^{0} \cdot N^{N+1} \sqrt{\frac{2\pi}{N1}}$$

$$= e^{-N} N^{N+1} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} = \sqrt{2\pi N}\, e^{-N} N^{N+1}$$

Stirlings Formel for stor N

27/11

Variationskalkyl

$$I = \int F(y, y', x)\,dx$$ y deriverbar

$$\delta I = 0 \Rightarrow$$ Eulers ekvation $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Ej ekvivalens.

1) Måste alltid testa att Euler verkligen ger ett extremvärde på I

② Kolla alltid att lösningen y är deriverbar.

Generalisering till flera beroende variabler

Bevis i bok, s 1096

$$I = \int F(y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n', x)\,dx \overset{dI = 0}{\Longrightarrow} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{\partial y'_i} = 0 \quad \forall i$$

Viktig tillämpning Euler-Lagrange för ett mångpartikelsystem i 1D

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0}$$

$y_i \to x_i$

$y_i' \to \dot{x}_i$

$x \to t$

$F \to L$

Generalisering till flera oberoende variabler

$$I = \int F(u; u_x, u_y, u_z; x, y, z)\,dx\,dy\,dz \overset{\delta I = 0}{\Longrightarrow}$$

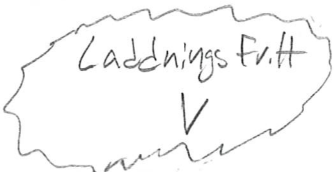
$y \to u$

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial u_z} = 0$$

KOM IHÅG!

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u_x} F(u(x, y, z), u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)\, x, y, z)$$

EXEMPEL På fallet med flera oberoende variabler



Problem elektromagnetisk energi i området V

Statiskt

Energitäthet $E_0(\bar{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon \bar{E}^2(\bar{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon(-\nabla\phi(\bar{r}))^2$

$$I = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i volym } V}}{E_V} = \int_V d\bar{r}\, E_0(r) = \frac{1}{2}\varepsilon\int (\nabla\phi(r))^2\, d\bar{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon \int \underbrace{\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2\right)}_{F} dx\,dy\,dz = \left\{\begin{matrix}\text{Använd Euler} \\ \text{För flera} \\ \text{oberoende} \\ \text{variable}\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \overset{0}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial \phi}}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \phi_x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial \phi_y} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial \phi_z} = 0$$

$$-\frac{d}{dx}(2\phi_x) - \frac{d}{dy}(2\phi_y) - \frac{d}{dz}(2\phi_z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$$ Laplace ekvation

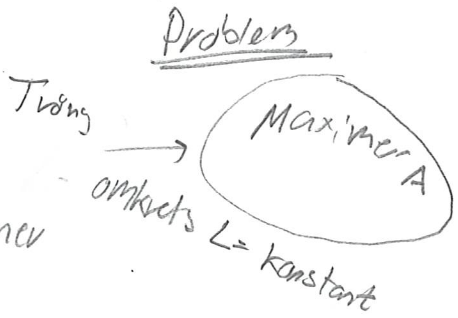
Många av fysikens ekvationer kan återföras på (eller har härletts från) Eulers ekvation

Särskilt viktig klass av variationskalkylproblem i Fysiken:

ISOPERIMETRISKA (på inlämningsuppgiften). PROBLEM

"Variationskalkyl med tvång".

Ex



Bakgrund Låt oss först kolla problemet att hitta max/min för "vanliga" funktioner med ett tvång.

Ex $F = f(x,y,z)$ Villkor $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$ ①

dx, dy, dz OBEROENDE

$\Downarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$ ②

Antag istället
dx, dy, dz beroende!

← konstant

"Tvång" $g(x,y,z) = C$ ③

Stationäritet för tvånget $dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz = 0$ ④

Tvånget ⇒ Två oberoende variabler (T.ex kan lösa ut en som en funktion av de två andra)

Introducera en Lagrange multiplikator. λ

Bilda följande uttryck

$$df + \lambda dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z}\right)dz = 0$$ ⑤

Lös ut t.ex. $z = z(x,y)$ från ③

Hitta λ s.a. $\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = 0$ ⑥

5 och 6

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$ ⑦

Sid 1108 ff

4 variabler x, y, z, λ

4 ekvationer nämligen ③ ⑥ ⑦

Lyft över Lagrange lösningsstrategi för vanliga funktioner till funktionaler!

$$I = \int F(y, y', x)\,dx \qquad ⑧$$

Tvång

$$J = \int G(y, y', x)\,dx = \overset{\text{konstant}}{C} \qquad ⑨$$

/ Exakt analogi med fallet med vanliga funktioner, bilda uttrycket.

$$K = I + \lambda J = \int \overbrace{(F + \lambda G)}^{g}\,dx$$

Formellt bev. sic IIIiF AWH

$$\partial(I + \lambda J) = \partial I + \partial \lambda J = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{dg}{dy'} = 0} \qquad ⑪$$

Två obekant λ, y

Två ekvation ⑨, ⑪ Ok!

Ex Variationskalkyl med tvång

Minimera energin E i ett kvantmekaniskt system som bestäms av H (Hamiltonoperatorn) . .

Dirac notation $E = \langle \psi | H | \psi \rangle$ givet $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ och $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

I 3D $r = (x, y, z)$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int \psi^*(x, y, z)\,\hat{H}\,\psi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = E = I$$

Minimera energin

$$\delta I = \delta E = \partial \int \psi^*(x, y, z)\,\hat{H}\,\psi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad ①$$

Tvång

$$\int \overbrace{\psi^*(x, y, z)\,\psi(x, y, z)}^{G}\,dx\,dy\,dz = 1 \qquad ②$$

Ty total sannolikhet ska vara 1

Sätt in $H = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(x, y, z)$ i ①

$\Rightarrow$ För bevis av typen kinetisk energi betrakta

$$\int \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \, dx \overset{P.I.}{=} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx =$$

Antag periodiska randvillkor $\Rightarrow$ $\psi(a, y z) = \psi(b, y, z)$

fixa y, z

P.s.s. för y och z integraler

$$\Rightarrow \delta \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + V \psi^* \psi\right) dx\, dy\, dz = 0 \quad ③$$

Inför Lagrange multiplikator λ vsa

$$g = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + V \psi^* \psi}_{F} - \lambda \underbrace{\psi^* \psi}_{G} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_x^* \psi_x + \psi_y^* \psi_y + \psi_z^* \psi_z\right)$$

$$+ V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi \quad ④$$

Kom ihåg Euler för flera oberoende variabler

här: x, y, z

$$\frac{dg}{dy_i} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial g}{d \frac{dy_i}{dx_j}} = 0 \qquad \text{Här } j = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial \psi_x^*} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial \psi_y^*} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \psi_z^*} = 0} \quad ⑤$$

Sätt in ④ i ⑤ så följer.

$$\Rightarrow V\psi - \lambda \psi - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = \overset{E \nearrow}{\lambda} \psi}$$

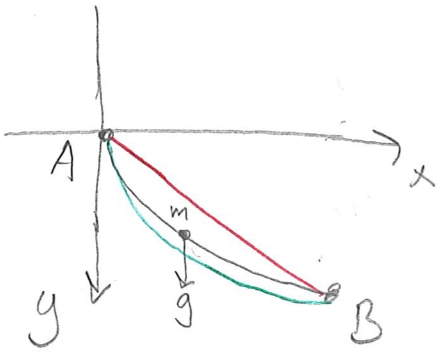
Tolka λ som energi, av dimensionsskäl

Schrödingerekvationen!

Räkneövning

Antag Friktionsfritt

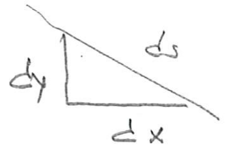
En punktmassa glida friktionsfritt under inverkan av gravitationen från A till B. Vilken väg tar minst tid?



1) Beräkna tiden t

$$t = \int_a^b \frac{ds}{v}$$

Behöver $\frac{ds}{v}$ med x, y, y'



$$mgy = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx = \int_A^B \underbrace{\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}}_{F}\,dx$$

2) Euler Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$ Svårlöst.

Om F inte beror explicit på x $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ $\frac{dF}{dx} \neq 0$.

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$ Belltrami identiteten.

Härledning av Belltrami identiteten

Saknar explicit beroende.

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} + \overset{0}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' - \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'' = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\int\left(\frac{dF}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(y'\frac{dF}{\partial y'}\right)\right)dy = F - y'\frac{dF}{\partial y'} = C$$

V.S.V.

Räkneledarens Lösning

$$0 = \frac{dF}{dy}\cdot y' - y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{\partial y'}\right) =$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right) -$$

$$\frac{d}{dx}\left[F - y'\frac{dF}{\partial y'}\right] \Rightarrow F - y'\frac{dF}{\partial y'} = C$$

Färre antaganden än i mini C^2 krav på y.

Åter till uppgiften.

3) Lösning

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \qquad F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$\frac{dF}{\partial y'} = \frac{1}{2}\cdot 2y'\sqrt{\frac{1}{2gy(1+y'^2)}}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - y'^2\sqrt{\frac{1}{2gy(1+y'^2)}} = \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} \Leftrightarrow C^2 = \frac{1}{2gy(1+y')^2}$$

$$\Leftrightarrow (1+y'^2)y = \frac{1}{2gc^2} = K$$

$$y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = k$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k}{y}-1} = \sqrt{\frac{k-y}{y}}$$

$$\sqrt{\frac{y}{k-y}}\,dy = dx$$

Integrera

$$x = \int\sqrt{\frac{y}{k-y}}\,dy = \left\{\begin{matrix} y = k\sin^2\frac{\theta}{2} \\ dy = k\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \end{matrix}\right].$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{k}{2}(\theta - \sin(\theta)) + D$$

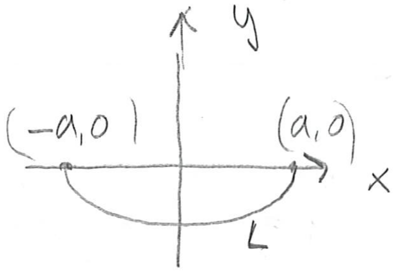
$$y = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)$$ k & D från A & B.

Problem 2 Upphängt rep.

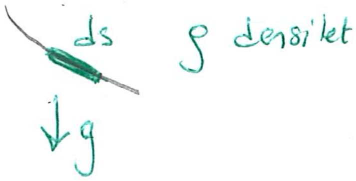
Sökt $y(x)$ repets form

Vill minimera energin

Betrakta potentiella energin.



$$dE = \rho \cdot ds \cdot g \cdot y(x)$$



$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad E = \int dE = \int \overbrace{\rho \cdot g \cdot y\sqrt{1+y'^2}}^{F}\,dx \quad ①$$

Tvångsvillkor $L = \int ds = \int \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{G}\,dx$ ②

$\delta E = 0$ för att hitta extrempunkt (stationär integral ①)

Använd Lagrange multiplikator λ för bivillkor ②.

$$\hat{E} = E + \lambda L.$$

λL konstant $\Rightarrow$ $\delta\hat{E} = \delta E = 0.$

$$\tilde{E} = \int_{-a}^{a} \underbrace{\left(\rho g y \sqrt{1+y'^2} + \lambda \sqrt{1+y'^2}\right)}_{F\ (g)} dx$$

- Euler Lagrange

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ Belltrani

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2}\frac{2y'}{\sqrt{1+y'^2}}\left(\rho g y + \lambda\right) =$$

$$\Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{1+y'^2}\left(\rho g y + \lambda\right) - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\left(\lambda + \rho g y\right) =$$

$$= \boxed{\left(\lambda + \rho g y\right)\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C}$$

- 3 konstanter bestäms med (λ, C, integrationskostant).

$L = \int\sqrt{1+y^2}\,dx$, $y(-a,0) = y(a,0) = 0$

$$\Rightarrow y = \cosh\left(\frac{x}{A}\right) + \overset{=0 \text{ i exemplet}}{y_0}$$

Kom ihåg att
skriv hur konstanterna
bestämms.

29/11 Föreläsning 8

Mandelbrot set zoom.

$$M = \{ c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c \not\to \infty, z_0 = 0 \}$$

Mandelbrot mängd, svart själva mängden, gloria -matematik, analys.

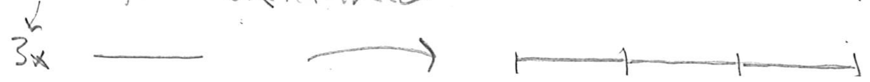
Weierstrass funktion.

Hausdorff dimension D

s = linjär skalfaktor

\# kopior

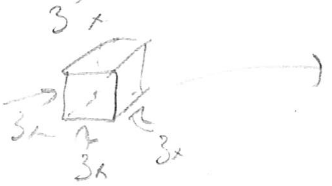
1D



$N = 3$

2D

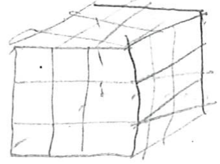
$N = 9.$



$N = 27$

$N = s^D$

$\ln N = D \ln s$

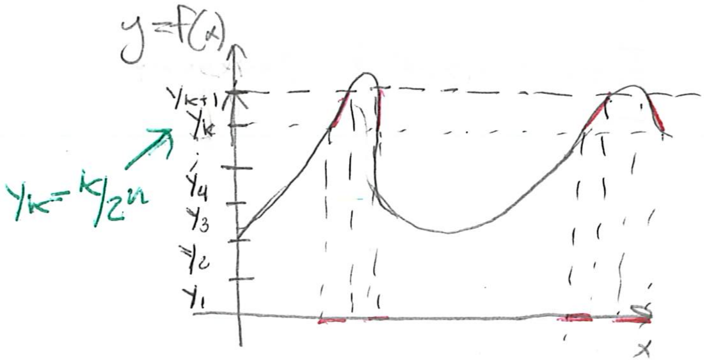


Hausdorff Dimension

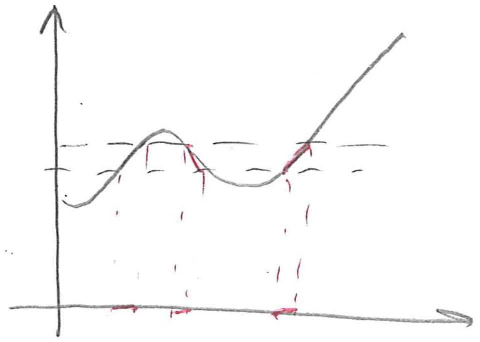
$$\Rightarrow D = \frac{\ln N}{\ln s}$$

Lebesgue integral

$$A_k^{(n)} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}]) = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$



$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV DEN INVERSA BILDEN AV F PÅ INTERVALLET $[y_k, y_{k+1}]$



Ex $[a, b]$: $\mu([a,b]) = b - a$ om $[a,b]$ REELLT INTERVALL.

$\mu([a,b]) = 0$ om $[a,b]$ BARA INNEHÅLLER ETT UPPRÄKNELIGT ANTAL PUNKTER

Villkor $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ Mätbar Funktion.

Ex Icke mätbar mängd av tal

Vitali mängden

$V \subset [0,1]$

$V = \{ V \notin \mathbb{R} \mid \forall x \; \exists v \in V: x - v \in \mathbb{Q} \}$

OBS! Icke uppräknelig!

Lebesgues (dominerande) konvergensteorem

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

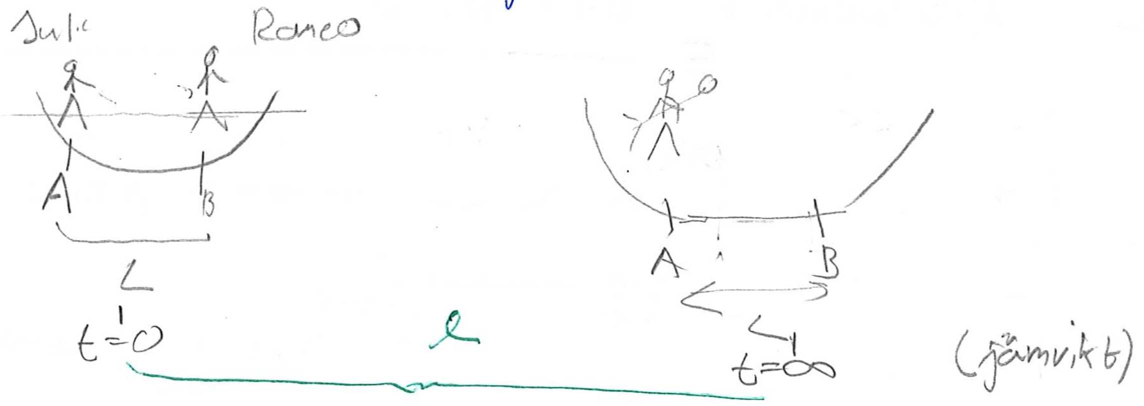
om f_n konvergerar punktvis till f nästan överallt. och det existerar en Lebesgue-integrabel funktion g sådan att $|f_n| \leq g$ nästan överallt.

Fubini(-Tonelli) Teoremet.

$\frac{d}{dx}$ slår på implicit x beroende.

$\frac{\partial}{\partial x}$ slår på explicit x-beroende

Romeo och Julia på roddtur.



M = båtens + Julias massa

m = Romeos massa

l = Hur långt förflyttar sig båten l ?

① Perfekt fluid $\mu = 0$

② Viskös fluid $\mu \neq 0$ $(H_2O : \mu = 9 \cdot 10^{-4}\,\text{Pa s})$

Inlämningsuppgift

① INGA YTTRE KRAFTER ⇒

$R_{cm}(\text{båt} + \text{Julia} + \text{Romeo}_B) = R_{cm}(\text{båt} + \text{Julia} + \text{Romeo}_A)$.

Masscentrum förflyttas ej.

$$\boxed{l = \frac{m}{m+M} L}$$

Var försiktig med gränsvärden!

② Yttre kraft p.g.a. viskositet.

x(t) = Masscentrum för båt + Julia

y(t) = Romeos läge.

$$M \ddot{x} + m \ddot{y} = -\mu \dot{x}$$

Integrera $0 = M \dot{x}(t) + m \dot{y}(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\mu \, x(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\mu l$

$$\Rightarrow \boxed{l = 0}$$

$l = l(\mu) \rightarrow \lim_{\mu \to 0} l(\mu) = 0$

Stämmer ej med ①

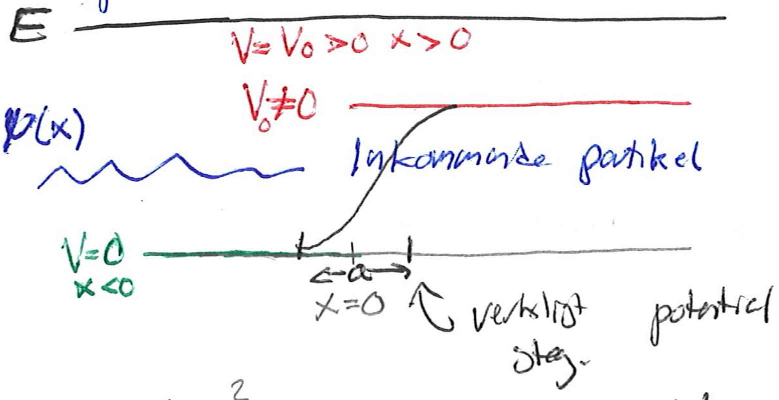
Ex Kvantmekanisk potentialbarriär.

Inkommande

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & x<0 \\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}} & \\ Ae^{ik'x} & x>0 \\ k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} & \end{cases}$$

← reflekteras

← transmitterad.



Sannolikhet För reflektion: $R = |B|^2$ T.ex. $V(x) = \frac{V_0}{1+e^{-x/a}}$ a x0.

Villkor ψ och $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ är kontinuerliga.

$$\begin{cases} 1 + B = A \\ ik(1-B) = ik'A \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{2k}{k+k'} \quad B = \frac{k-k'}{k+k'}$$

$$\Rightarrow \quad R = |B|^2 = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2 \quad ①$$

Var är fel!

OBS! Bohrs korrespondens princip: $\hbar \to 0$ ⇒ "Klassisk gräns"

Klassisk gräns betyder att $\lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{p} = \frac{1}{k} << a$

↑ Våglängd för fotoner och fotoner.   Systemets karakteristiska längd.

Ex Dörren! Ljus ej ljus

$\sim 100\,\text{nm} << 1\,\text{m}$ Klassiskt ⇒ $\lambda << a$

↑ Villkor för att diffraktion ej förekommer

Saknas karakteristisk längd i ex alltså kan ej Bohrs korrespondens princip tillämpas direkt på uttryck ①

Betraktar längd på det verkliga potentialsteget se figur.

Ny räkning ger.

$$R(\hbar, a) = \frac{\sinh((a\pi)(k-k'))}{\sinh((a\pi)(k+k'))}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\lim_{h \to 0} R(\hbar, a) = 0$$

ok!

4/12

$|\psi\rangle = \alpha_1|w_1\rangle + \alpha_2|w_2\rangle + \dots + \alpha_j|w_j\rangle + \dots$

$|w_i\rangle$ egenvektorer till operatorn $\hat{\Omega}$

operator motsvarande den observerbara storhet vi vill mäta.

$\hat{\Omega}|w_j\rangle = w_j|w_j\rangle$

Möjligt utgång av mätningen.

$P_{w_j} = |\alpha_j|^2 = |\langle w_j|\psi\rangle|^2$

4 postulat kolla pp

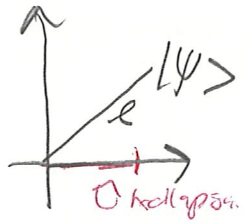
I Ett tillstånd beskrivs av en normerad vektor $|\psi\rangle$ i ett Hilbertrum

II Till varje observabel finns en Hermitisk operator på ett Hilbertrum.

III Ω observabel, mätvärden w_j egenvärde till $\Omega|w_j\rangle$

IV. Tidsutvecklingen styrs av Hamiltonoperatorn. H

Mätning kollapsar tillståndet.
Blir kvar. Mätningsproceduren kan
ej beskrivas av kvantmekaniken.



konst längd vektor
vrid z

The border territory.

Köpenhamnstolkningen. - problematiskt.

Vägintegral formulering

- minsta verkans princip
- Förenkla räkningar
- löser ej tolkningsproblemet

Bakgrund

Klassisk mekanik

Hamilton formulering

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{Ex } H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{x} = F$$

Lokal formulering

stegar fram

$x(t=0)$ $\dot{x}(t=0)$

$$\Downarrow$$

Kanonisk Kvantisering

$$\{x, p\} = 1 \longrightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Poisson parenteser

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}$$

Heisenberg, Jordan Born Schrödinger
1925 - 27

Analytisk mekanik

$$S = \int dt\, L(x, \dot{x})$$

Lagrange funktion

$$L = K - U$$

Global beskrivning

Givna randvillkor. $\delta S = 0$
Minsta verkans principen ger banan

$$\Downarrow$$

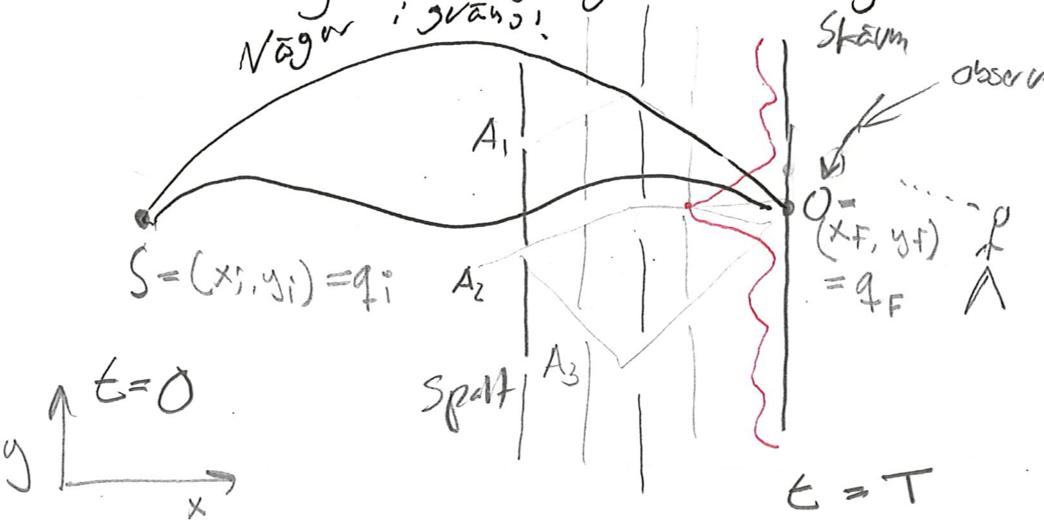
Euler - Lagrange

$$\Downarrow$$

1937 Dirac
1948 Feynman

Vägintegral formulering

Motivering för vägintegralformalering



Fysikers scen

Oändligt antal vägga med oändligt antal hål
$\Rightarrow$
Tomrum

$$\mathcal{A}_{S\to O} = \mathcal{A}_{S\to A_1\to O} + \mathcal{A}_{S\to A_2\to O}$$

$$\Rightarrow \quad P_{S\to O} = |\mathcal{A}_{S\to O}|^2$$

Skapar 3 hål A_3

$$\mathcal{A}_{S\to O} = \mathcal{A}_{S\to A_1\to O} + \mathcal{A}_{S\to A_2\to O} \quad \mathcal{A}_{S\to A_3\to O}$$

Fler hål

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A}_{S\to O} = \sum_{j=1}^{\#\text{hål}} \mathcal{A}_{S\to A_j\to O}$$

Lägg in ny skärm och ännu en ...

$$\mathcal{A}_{S\to O} = \sum_{j=1}^{\#\text{hål}} \left(\mathcal{A}_{S\to A_j^{(1)}\to A_j^{(2)}\to \cdots \to O}\right)$$

index på väggen.

Associera amplitud till varje väg

$$\mathcal{A}_{S\to O} = \langle q_F | e^{-ikT/\hbar} | q_i \rangle = \langle q_F(t=T) | \underline{q_i(t=T)\rangle}$$

Bilda $\langle q_F | e^{-iHT/\hbar} | q_i \rangle$

H okänd, krav Hermitsk.

$\Downarrow$ Konsekvens:

H är hamiltonoperatorn.

Tidsutvecklingsoperator

$$|q(T)\rangle = \alpha_A |q_A\rangle + \alpha_B |q_B\rangle + \cdots\cdots \alpha_F |q_F\rangle$$

$$U(T) = e^{-iHT/\hbar}$$

$$U(T)\,|q_i(t=0)\rangle = |q_i(t=T)\rangle$$

$$\langle q_F(T) | q_I(t=T) \rangle = \alpha_F$$

$$\Rightarrow \quad P_{S \to O} = |\alpha_F|^2$$

Alternativt

Feynman ger ett recept på hur vi kan beskriva matematiskt $A_{S \to O}$

$$\underset{\overset{\uparrow}{A_{S\to O}}}{A} = \langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle$$

Sätt $\hbar = 1$

Fortsättning följer!

Räkneövning 4/12

Patologiska funktioner.

Cauchy's patologiska funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ Kontinuerlig

1 Kontinuitet

En funktion är kontinuerlig i $x=a$ då

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

- För $x \neq 0$ f är sammansatt av två kontinuerliga funktioner $(e^x, -\frac{1}{x^2})$ för alla $x \neq 0$ $\Rightarrow$ kontinuerlig då $x \neq 0$

- $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x^2} \underset{\uparrow}{=} \exp\left\{\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^2}\right\} =$$

e^x kontinuerlig på $(0,\infty)$

- För $B > 0$ kan vi välja $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ så att $\forall x$ med $|x-0| < \delta$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty.$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$

- Jämn funktion ger sam då $x \to 0^-$

$\Rightarrow$ F kontinuerlig $\forall x \in R$ $\square$

2. Deriverbarhet

En funktion $g(x)$ är deriverbar i $x=a$ om

$$g'(a) = \lim_{h \to a} \frac{g(a+h) - g(a-h)}{2h}$$ Centraldifferens

existerar.

- Igen med $x=0$ undersökas, då övr är direkt deriverbar, ty sammansatt funktion.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - e^{-\frac{1}{h^2}}}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{2h} = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ deriverbar överallt. $\forall x \in \mathbb{R}$ och $f'(0) = 0$.

- Beräkna nu derivata för TU-utvecklingen i $x=0$

utnyttja $f(0)=0$ $f(-x) = f(x)$

$$f^{(2)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f^{(1)}(-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2h) - 2f(0) + f(-2h)}{(2h)^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot f(2h)}{(2h)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/4h^2}}{2h^2} =$$ $t = \frac{1}{4h^2}$ $h^2 = \frac{1}{4t}$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2t}{e^t} = 0.$$

- $$f^{(3)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - 3f(h) + 3f(-h) - f(-3h)}{(2h)^3} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{(2h)^3} =$$

$= 0$

- I allmänhet $0 = g^{(n)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)\, g((2k-n)h)$

(kan bevisas med hjälp av induktion.)

Maclaurinserie då,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

Utvecklingen stämmer bara i en punkt. $x=0$

Därför då, Cauchys patologiska funktion patologigsk även om den är kontinuerlig och oändligt derivarbar.

(normalt innebär det "snäll")

konvergerar Maclaurinserie bara i en enda punkt?

Varför?

3. Komplex tolkning

∘ komplex version av Cauchys patologisk funktion

$f(z) = e^{-1/z^2}$ $z \in \mathbb{C}$

Denna funktion analytisk på $|z| \in (0,\infty)$

Är singulariteten i $z=0$ borttagbar?

∘ Undersök Laurentserien

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-1/\zeta^2}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$$

runt (0,0)

C : positivt orienterad sluten kurva som passerar runt sing. i origo en gång.

Variabelbytet $u = \frac{1}{\zeta} \Rightarrow d\zeta = -\frac{1}{u^2}\, du$

C pos orienterad → neg plocka ut tecken.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{-u^2} u^{3n+1} (-1)\frac{1}{u^2}\, dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{-u^2}\cdot u^{n-1} du = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-u^3}}{u^{1-n}} du$$

- Posit $n \Rightarrow c_n = 0$ Integral analyti'
- Negativ $n \Rightarrow$ pol av ordning $|n-1| = 1-n$

$$\Rightarrow C_n = \mathrm{Res}_0\left(e^{-u^2}\cdot u^{n-1}\right)$$

- Beräkna residyn av en funktion $g(z)$ som har en pol av ordning m i z

$$\mathrm{Res}_0(g(z)) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(z^m g(z)\right)$$

$$\underset{\hookrightarrow m=1}{C_0} = \lim_{u\to0}\frac{u\cdot e^{-u^2}}{u} = 1$$

$$\underset{\hookrightarrow m=2}{C_{-1}} = \lim_{u\to0}\frac{d}{du}\left[u^2\frac{e^{-u^2}}{u^2}\right] = \lim_{u\to0}\left(-2ue^{-u^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ /n är udda $C_{-n} = 0$

$$C_{-2} = \lim_{u\to0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(u^3\frac{e^{-u^3}}{u^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{d}{du}\left(-2u\, e^{-u^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to0}\left(-2e^{-u^2}+4u^2e^{-u^2}\right) = -1$$

$$C_{-3} = \lim_{u\to0}\frac{1}{3\cdot2}\frac{d^3}{dz^3}\left(e^{-u^2}\right) = \frac{1}{6}\lim_{u\to0}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(-2u\, e^{-u^2}\right).$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{u\to0}\frac{\partial}{\partial u}\left(-2e^{-u^2}+4u^2e^{-u^2}\right) = \lim_{u\to0}\frac{1}{6}\left(4ue^{-u^2}+4ue^{-u^2}-8u^3e^{-u^2}\right) = 0$$

$$c_4 = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}\frac{d}{dw}\Big(8e^{-u^2} + 16ue^{-u^2} - 24u^2e^{-u^2}$$
$$+ 16u^4e^{-u^2}\Big)$$

$c_{-2} = -1$

$c_{-4} = \frac{1}{2}$

$c_{-6} = \frac{-1}{6}$

$c_{-8} = \frac{1}{24}$

$c_{-k} = \frac{(-1)^k}{k!}$

$\rightarrow$ Laurent serie för $P(z)$

$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^k$$

1) Oändligt många termer med negat n

$\Rightarrow$ singularitet i $z=0$ är essentiell

2) Gör att gör vi $e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \dots$

Sätt $x = -1/z^2$ $\rightarrow$ $e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} \dots$

Gabriels horn

Intresse är om V, A $0, \infty$ eller begränsad.

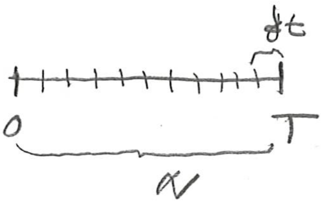
Kochs snöflinga

Cauchyfördelningen, patologiskt

6/12

Feynmans vägintegral

$\mathcal{A} = \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle$



$T = N\delta t$

OBS! $\hbar = 1$

$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \langle q_F | \underbrace{e^{-iH\delta t} \cdot 1 \cdot e^{-iH\delta t} \cdots 1 e^{-iH\delta t}}_{N \text{ faktorer}} | q_I \rangle$

Throttle decomposition

$1 = \int dq_j\, |q_j\rangle\langle q_j|$ Ger ~~$\int dq\, |q\rangle$~~ ~~$\langle q_f | q_i$~~

↑ Resolution of identity

N−1 st ettor

$j = 1, \ldots N-1$

$\langle q_j | q_j' \rangle = \delta(q_j - q_j')$

$= \langle q_F | e^{-i\hat{H}\delta t} \int dq_{N-1} |q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}| e^{-i\hat{H}\delta t} \int dq_{N-2} |q_{N-2}\rangle\langle q_{N-2}|$

$\ldots \int dq_1 |q_1\rangle\langle q_1| e^{-i\hat{H}\delta t} |q_1\rangle =$

$\left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j\right) \overset{\langle q_N|}{\langle q_F|} e^{-i\hat{H}\delta t} |q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}| e^{-i\hat{H}\delta t} |q_{N-2}\rangle \boxed{\ldots}$

$\ldots \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} \underset{|q_0\rangle}{|q_I\rangle}$

Undersök en av dessa faktorer.

$\langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_j \rangle$

$H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ antas för enkelhet FRI PARTIKEL

$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ ① $\frac{1}{2\pi}\int dp\, |p\rangle\langle p| = 1$ ②

$\langle q | p \rangle = e^{ipq}$ ③

↑ Normering

$$\Rightarrow \langle q_{j+1}| e^{-i\hat{H}\delta t} |q_j\rangle = \langle q_{j+1}| e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} |q_j\rangle$$

②

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp \langle q_{j+1}| e^{\frac{-i\hat{p}^2}{2m}\delta t} |p\rangle\langle p|q_j\rangle =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} F(\hat{\theta})|\theta\rangle = f(\theta)|\theta\rangle \\ \text{om } \hat{\theta}|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle \end{array} \right. \quad \text{Taylorutv.} \Rightarrow e^{\hat{p}^2} \to e^{p^2} \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{\frac{-ip^2}{2m}\delta t} \underbrace{\langle q_{j+1}|p\rangle}_{e^{ipq_{j+1}}} \underbrace{\langle p|q_j\rangle}_{e^{-ipq_j}} \qquad = \left\{ \int = \int_{-\infty}^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp\; e^{\frac{-ip^2}{2m}\delta t}\; e^{ip(q_{j+1}-q_j)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Generalisera} \\ \text{Gaussisk integral} \end{array} \right\} =$$

Allmänn form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{1}{2}iax^2 + iJx} = \sqrt{\frac{2\pi i}{a}}\; e^{-iJ^2/2a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$x = p$ $\quad J = q_{j+1} - q$

$a = \frac{\delta t}{m}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-2\pi i m}{\delta t}}\; e^{+i\frac{(q_{j+1}-q)^2}{2\delta t^2}\delta t\, m} \qquad *$$

* i uttrycket för A

$$A = \langle q_F| e^{-i\hat{H}\delta t} |q_I\rangle = \underbrace{\left(\frac{-i2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{(N-1)}{2}} \left(\prod_{k=1}^{N-1}\int dq_k\right)}\; e^{\frac{mi\,dt}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}\, q(t)$$

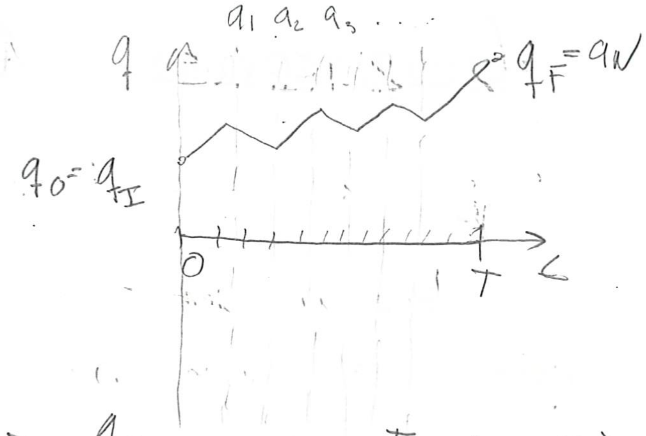
Gränsvärde $N \to \infty$ $\delta t \to 0$ Intuitivt okej, men svårt att visa rigoröst

$N \to \infty \qquad \delta t \to 0$

$$\left[\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}\right]^2 \to \dot{q}^2$$

$$\delta t \sum_{j=0}^{N-1} \to \int_0^T dt$$

Vägintegral integral över alla möjliga vägar.



$$\mathcal{U} = \langle q_F | e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)T/\hbar} | q_I \rangle \longrightarrow \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q(t)\, e^{i\int_0^T dt \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2\right)}$$

$$\mathcal{U} = \langle q_F | e^{-i\left(\frac{p^2}{2m} + V(\hat{q})\right)T} | q_I \rangle \xrightarrow[\text{p.s.s}]{} \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q(t)\, e^{i\int_0^T dt \underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} - V(q)\right)}_{\boxed{\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)}}}$$

$L(q,\dot{q})$

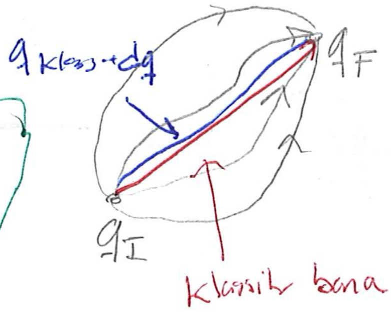
Lagrange funktionen

$$\mathcal{U} = \langle q_F | e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)T/\hbar} | q_I \rangle =$$

$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q(t)\, e^{iS(T)/\hbar}$$

S verkan ← klassisk verkan.

$$\boxed{\mathcal{U} = \langle q_F | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_I \rangle = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q(t)\, e^{-iS/\hbar}}$$



Klassisk bana ges av minimal verkan.

Minsta verkans princip. $(\delta S = 0)$ följer direkt från Feynmans Vägintegral via Bohrs korrespondens princip.

$\hbar \to 0 \Rightarrow$ klassiskt

$$\mathcal{U} = \int \mathcal{D}q\, e^{-iS/\hbar}$$

↑ Fluktuerar våldsamt $\hbar \to 0$.

↶ T.ex $\hbar = 6.03 \cdot 10^{-34}$ försumbart på makroskopiska skalor.

$\Rightarrow$ När liggande vägar interferer destruktivt $\Rightarrow$ Ingen bidrag.

$$\delta S[q_{\text{klassisk}}] = 0 \Rightarrow S[q_{\text{klassisk}}] - S[q_{\text{klassisk}} + \delta q] = 0$$

$$\Rightarrow e^{iq\, S[q_{\text{klassisk}}]/\hbar} = e^{iq\, S[q_{\text{klassisk}} + \delta q]/\hbar}$$

Konstruktiv interferens.

Gruppteorins A B C

Ante ändlig och uppräknelig

$G \begin{cases} \{g_1, g_2, \cdots, g_n\} \\ \text{Mängd av element} \end{cases}$ + kompositionsregel / Gruppmultiplikation] Viktigt Specialfall !

Bilda en grupp om gruppaxiomen är uppfyllda

Gruppaxiomen

- $g_i \, g_j \in G \quad \forall g_i, g_j \in G$ Slutenhet $\quad g_i \, g_j \equiv g_i \cdot g_j$
- $(g_i \, g_j) g_k = g_i (g_j \, g_k) \quad \forall g_i, g_j, g_k \in G$ Associativitet
- $\exists e \in G : e g_i = g_i e = g_i \quad \forall g_i \in G$ Existens av ETTA
- $\forall g_i \, \exists g_i^{-1} : g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$ Existens av invers element

$H \in G \quad H$ delgrupp om H uppfyller gruppaxiomen.

Alla grupper har två triviala delgrupper $\{e\}$, G Glöms ofta!

Om $g_i \, g_j = g_j \, g_i \quad \forall g_i, g_j \Rightarrow G$ abelsk

$\neq$ $\qquad$ G icke abelsk

$\Rightarrow$ "gruppmultiplikation" = sammansättn. av transformationer

Fysik ~~gg~~ G oftast symmetrigrupper = element i G är symmetritransformationer = transformation under vilka någonting är invariant

T.ex En ekvation, teori, kristaller.

Ex koppla till inlämningsuppgift.

Lorentz gruppen.

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$ Vågekvationen.

↓

Invariant under Lorentztransformationer

$$G \supset G_x = \left\{ g_\gamma = \left[x \to \gamma(x-vt),\ y \to y,\ z \to z,\ t \to \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \right.\right.$$

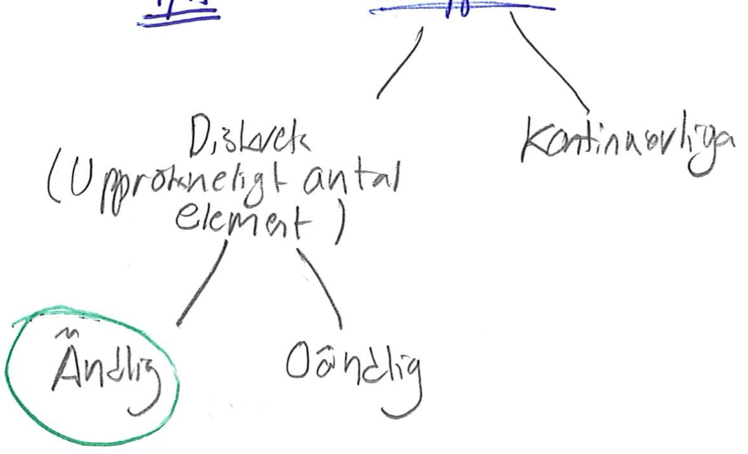
↑

Gruppen av Lorentz boostar längs x

↖ $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

9/11

Gruppteori



Viktigt exempel på ändlig grupp

Permutationsgruppen S_n

S från symmetrisk verkar på n -element

dvs $S_n = \{P_1, P_2, \dots, P_{n!}\}$

$\Rightarrow [S_n] = n!$

gruppen ordning = #element

Ex

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Permutationsgruppen är icke - abelsk

Ty $P, Q \in S_n$ så gäller $PQ \neq QP$

$$PQ = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}}_{p} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & \dots & \dots & q_n \end{pmatrix}}_{q} \neq QP.$$

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

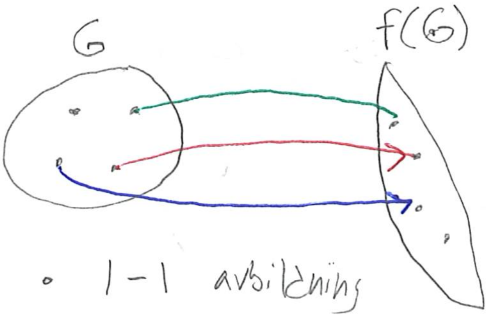
~~(1)~~ (2 3) (1 3 2) (1 2) (3)

Cykel notation.

Varje element i S_n kan skrivas som en produkt av Disjunkta cykler

Caleys sats

Cayley sats – Varje grupp av ordning n är isomorf med en delgrupp till S_n



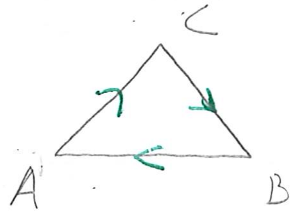
- 1-1 avbildning
- Gruppstruktur bevaras
- $g_1 g_2 = g_3$
  $\Rightarrow f(g_1) f(g_2) = f(g_1, g_2)$

Annat viktigt exempel: Cykliska gruppen C_n.

Symmetrigruppen av rotationer på en liksidig polygon med n-orienterade sidor

Ex

$n = 3$



$C_3 = \{a, b, e\}$

$2\pi/3$ rotation

$4\pi/3$ rotation

2π rotation I elementet.

Gruppstruktur ges av "Gruppmultiplikationstabellen"

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Vanligt på tentor.

Ytterligare viktigt exempel.

Dieder gruppe D_n - symmetrigruppe av rotationer från en liksidig polygon med n icke orienterade sidor

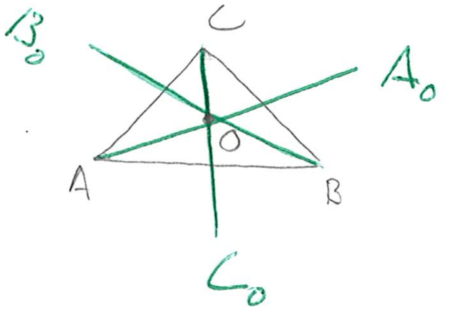
$$D_3 = \{e, a, b, c_1, c_2, c_3\} \simeq S_3$$

π-rotation runt A_0

π-rotation runt B_0

π-rotation runt C_0

(= Permutationerna av de tre hörnen A, B, C)



Rot π runt dessa.

Många viktiga begrepp

Konjugering - a, b ∈ G är konjugerade om $\exists g \in G$:

$$\boxed{a = gbg^{-1}}$$

Jmf basttransformationer i linjär algebra

anses viktigt av många matematiker!

Konjugering exempel på en ekvivalensrelation

Ekvivalensrelation - definieras av

i) $a \sim a$ Reflexiv

ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ symmetri

iii) $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitiv.

Konjugering definierar en ekvivalensrelation

TEST i) ok, ty $a = eae^{-1}$ $e \in G$

ii) ok, ty $\exists g \in G$: $\underbrace{a = gbg^{-1}}_{a \sim b} \Rightarrow \overbrace{b = g^{-1}ag}^{b \sim a}$ $g^{-1} \in G$

iii) $\exists g \in G \quad \underbrace{a = gbg^{-1}}_{a\sim b}$, $\exists h \in G \quad b = \underbrace{hch^{-1}}_{b\sim c}$

$\Rightarrow \quad a = g(hch^{-1})g^{-1} = (gh)c(h^{-1}g^{-1}) =$

$(gh)c(gh)^{-1} \Rightarrow \quad a \sim c$

$gh \in G$, $(gh)^{-1} \in G$ Ok!

Ekvivalensklass

Välj $a \in G$: $(a) = \{ b \in G \mid b \sim a \}$.

$b \in G$: $(b) = \{ c \in G \mid c \sim b \}$

$b \notin (a) \Rightarrow (b) \cap (a) = \emptyset$

Bevis

$\exists d,\ d \sim b$ och $d \sim a \underset{\text{Transitivitet}}{\Rightarrow} b \sim a$

$\Rightarrow b \in (a)$ Motsägelse

Viktigt Ex på ekvivalens klass

$(a) = \{ b \mid \exists g \in G : b = gag^{-1} \}$

Annat viktigt ex Sidoklass

$[H] = r$

Givet en grupp G välj en delgrupp $H \subset G$ ← $H = \{h_1, h_2, \dots h_r\}$

Välj $g \in G$, bilda vänstersidoklass av H m.a.p. G

$gH = \{gh_1, gh_2, \dots gh_r\}$ (p.s.s högersidoklass Hg)

Kan definiera ekvivalensrelationen $a \sim b :- b \in aH$

TEST ① $a \in aH$? Ja H delgrupp $\Rightarrow e \in H$

$\Rightarrow a = ae \rightarrow a \in aH$

② $\underbrace{b \in aH}_{b \sim a} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{a \in bH}_{a \sim b}$

$b \in aH \Rightarrow \exists h \in H : b = ah \Rightarrow a = bh^{-1}$

$h^{-1} \in H \Rightarrow a \in bH$ Ja.

iii) $b \in aH$ och $c \in bH \overset{?}{\Rightarrow} c \in aH$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\exists h \in H : b = ah$ $\exists h' \in H : c = bh'$

$\Rightarrow c = (ah)h' = \underset{\in H \text{ Ty sluta}}{a(hh')} = ah'' \Rightarrow c \in aH$

Varje sidoklass innehåller $r = [H]$ element

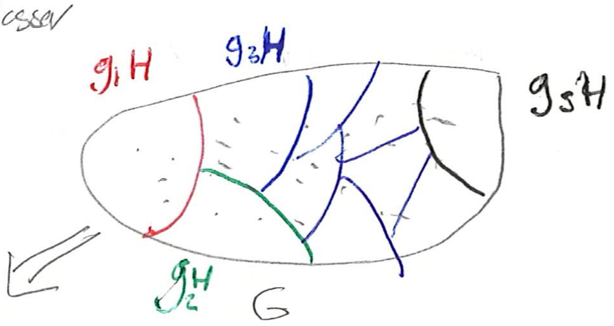
$gH = \{gh_1, gh_2, \dots, gh_r\}$ Fler ej möjliga man fåre?

Antag att sög $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ Motsägelse.

$\Rightarrow$ Sama # element som sidogrupp.

Sidoklassen är disjunkta ty ekvivalensklasser

Välj H $[H] = r$



$$S\overbrace{[H]}^{r} = G$$

Lagranges teorem

$\Rightarrow$ Grupp av primtalsordning kan ej ha äkta delgrupper.

Representationsteori

Teori för hur en representerar gruppelement med hjälp av matriser.

Ex $C_3 = \{a, b, e\}$

$a \sim \frac{2\pi}{3}$ $b \sim \frac{4\pi}{3}$ $e \sim 2\pi$

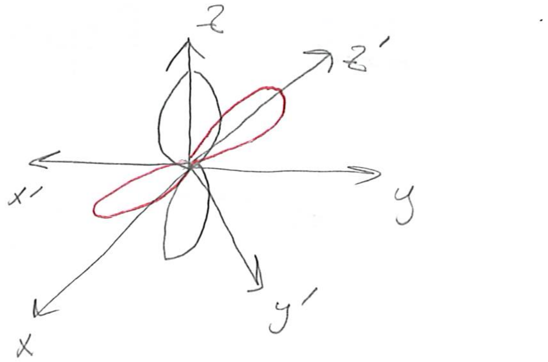
$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $a \mapsto R(\frac{2\pi}{3})$ $b \mapsto R(\frac{4\pi}{3})$ $e \mapsto R(0)$

REP TEORI VIKTIGT I FYSIKEN!

Ex

H(2p)

$\psi_{2p}(\mathbf{r}) =$



Lägger på magnetfält B för $\psi'(\mathbf{r})$

Roter H(2p) orbitalen :

$\psi(\mathbf{r}) \to \psi'(\mathbf{r})$

Roter koordinatsystemet : $\mathbf{r} = R^{-1}\mathbf{r}'$

$\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}' = R\mathbf{r} \Rightarrow$ R = Rotation.

Uppenbart: $\psi(\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}') = \psi(R^{-1}\mathbf{r}')$

Ta bort det fula primmet på $\mathbf{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\psi'(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r})} = \langle \mathbf{r} | \psi' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \mathbf{r} | \psi' \rangle = \psi'(\mathbf{r})$$

Induceras transformation

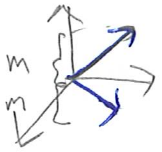
Symmetritransformationer i koordinatrummet inducerar symmetritransformationer i Hilbertrummet

Ex Betrakta energiegenfunktionerna för väte

$\psi_{n\ell m}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ kvantatal till energi / kvanttal till $\hbar^2(\ell+1)\ell$ } Skalärer.

$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r} \Rightarrow n, \ell$ opåverkade

Däremot är m en vektor och påverkas.



$$\underset{\langle \mathbf{r} | u'_{n\ell m} \rangle}{\underset{\|}{U'_{n\ell m}(\mathbf{r})}} = U_{n\ell m}(R^{-1}\mathbf{r}) = \sum_{m'} D^{\ell}_{mm'}(R)\, U_{n\ell m'}(\mathbf{r})$$

element i matrisen D^{ℓ} som representerar rotationen R

Induceras transformation

11/12 Representationsteori

n-dim Representation D av en grupp $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{[G]}\}$

Isomorfi

$D = \{ D(g_1), D(g_2), \dots, D(g_{[G]}) \}$ mängd av matriser som verkar i ett komplext vektorrum. V

$\hookrightarrow_g$ "modul"

Om $D(g_i)$ är en inverterbar <u>n×n</u> matris med egenskapen att <u>de bevarar gruppstrukturen</u> D homomorfi

$$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$$

Isomorf ~~och~~ (1-1) och homomorfi ⇒ Trogen ~~represent~~ represetation

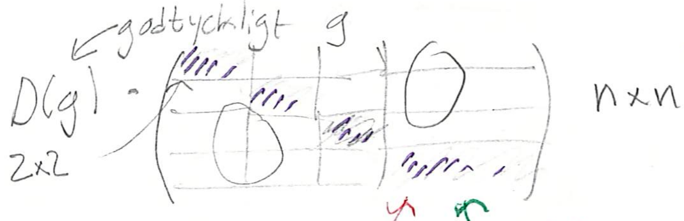
Kan välja $n=1$ ⇒ $n \times n = 1 \times 1$ dim representation

Välj $D(g_i) = 1 \quad \forall g_i$ Trivial lösning.

D och D' är <u>ekvivalent</u> om $\exists S \, \forall g \in G : \quad D'(g) = S \, D(g) S^{-1}$

<u>Fullständigt reducerbar</u> rep D

Fins en bas i $[V]$ G-modulen i vilken alla $D(g)$ $\forall g \in G$ är block diagonal.



<u>Antag</u> Blocken irreps

Block

Verkar på separat underrum. (delmodule) till G-modulen V

delmodul.

<u>Irredusibel</u> om det ej är reducerbart

Kallas D en irreducibel representation = "irrep".

Några teorem.

I. Maschkes teorem

Varje rep är ekvivalent med en unitär rep

dvs $\forall g$ $\quad D^{\dagger}(g) = D^{-1}(g)$

Bevis ...

II Schurs första lemma

D. irrep till $G \Rightarrow \quad BD(g) = D(g)B \Rightarrow \quad B = \lambda I, \ \lambda \in \mathbb{C}$

I enhetsmatris

Bevis: Schurs första.

Antag: D irrep, $\quad BD(g) = D(g)B$

$D = \{ D(g_1), D(g_2), \ldots, D(g_{|G|}) \}$ verkar på en G-modul V

$\forall g \in G \quad D(g): V \rightarrow V$

$B: V \rightarrow V$

Antag $\vec{b}$ egenvektor till B, dvs $B\vec{b} = \lambda \vec{b} \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad B \underbrace{(D(g)\vec{b})} = D(g) B \vec{b} = \lambda(D(g) b)$

$\Rightarrow \quad D(g)\vec{b}$ egenvektor till b med samma egenvärde

Bilda $\Gamma_\lambda = \{$ egenvektorer till B med egenvärde $\lambda \}$

Γ_λ är också en G-modul till G ty Γ_λ är sluten under verkan med $D(g)$ $\forall g$

D irrep $\Rightarrow$ Finns inga delmoduler till G i V

$\Rightarrow \quad \Gamma_\lambda = V \quad \Rightarrow \quad D = \lambda I \quad$ I verkar i hela V

$\lambda \in \mathbb{C}$

III Schur andra lemma

D, D' inekvivalenta irrep:

B verkande på $\quad B D(g) = D'(g) B$

$\Rightarrow \quad B = 0$

Vad är det här bra för?

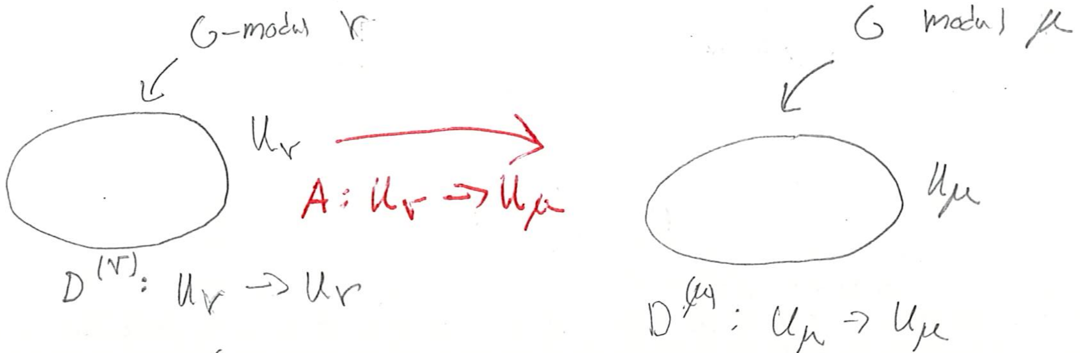
För att bevisa fundamentala Ortogonalitetsteoremet

~~Bevis~~ Teorem $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots$ irreps till G

$$\sum_{g\in G} \left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\right)^{*} \cdot D^{(j)}_{\gamma\delta}(g) = \frac{[G]}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}$$

n_i ← Dimensionen av $D^{(i)}$

Bevis



$\mu \neq \nu \Rightarrow D^{(\mu)}, D^{(\nu)}$ inekvivalenta irreps

$$B \equiv \sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1})$$

Välj ett gruppelement $h \in G$ Nyttja isomorfer

$$D^{(\mu)}(h) B = \sum_{g\in G} \underbrace{D^{(\mu)}(h) D^{(\mu)}(g)}_{D^{(\mu)}(\underbrace{hg}_{g'})} A D^{(\nu)}(\underbrace{g^{-1}}_{(g')^{-1}h}) =$$

$$= \sum_{g'\in G} D^{(\mu)}(g') A \underbrace{D^{(\nu)}((g')^{-1}h)}_{D^{(\nu)}((g')^{-1}) D^{\nu}(h)} = \sum_{g'\in G} \left(D^{(\mu)}(g') A \underbrace{D^{(\nu)}((g')^{-1})}_{D^{(\nu)^{-1}}(g')}\right) D^{(\nu)} h$$

Ty Homomorf

$$\left(= \sum_{g'\in G} D^{(\mu)}(g')\, A\, D^{(\nu)^{-1}}(g')\, D(h) \right)$$ Behövs ej

$$= \sum_{g'\in G} B\, D^{(\nu)}(h)$$

Schur 1

$$\Rightarrow \quad D^{(\mu)}(h)\, B = B\, D^{(\nu)}(h) \quad \Rightarrow B = \begin{cases} \lambda I & \text{om } \mu = \nu \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Schur 2

$$B = \sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g)\, A\, D^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda^{(\mu)}_{A} I \,\delta_{\mu\nu}$$

Valet av A bestämmer λ

Välj A så att alla element = 0 utom för $l=r$ $m=s$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad A_{lm} = \delta_{lr}\,\delta_{ms}$$

s ← kolonn

Kolla in matriselementen av B

$$B_{ij} = \sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{il}(g)\, \underbrace{A_{lm}}\, D^{(\nu)}_{mj}(g^{-1}) = \sum_{g\in G} \underline{D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1})} = \quad (*)$$

$$A_{lm} = \delta_{lr}\,\delta_{ms}$$

$$= \lambda^{(\mu)}_{rs}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta_{ij}$$

Vill nu få fram ett uttryck för $\lambda^{(\mu)}_{rs}$ väljer då $\mu=\nu$

Tag spåret av (*) och använd summa-konvention

$$Tr(B) = B_{ii} = \sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\mu)}_{si}(g^{-1}) = \sum_{g\in G} \underbrace{D^{(\mu)}_{si}(g^{-1})\, D^{(\mu)}_{ir}(g)}_{\left(D^{(\mu)}(g^{-1})\, D^{\mu}(g)\right)_{sr}} =$$

$$\underbrace{\left(D^{(\mu)}(g^{-1})\, D^{\mu}(g)\right)_{sr}}_{\left(D^{(\mu)^{-1}}(g)\, D^{(\mu)}(g)\right)_{sr}}$$

$$\underbrace{\left(D^{(\mu)^{-1}}(g)\, D^{(\mu)}(g)\right)_{sr}}_{I_{sr}}$$

$$\boxed{Tr(B) = B_{ij}\,\delta_{ij}}$$

$$\Rightarrow$$

$$B_{ii} = \sum_{g\in G} (I)_{sr} = [G]\,\delta_{sr}$$ ← ty enhetsmat (**)

Vet också:

$$\underset{\sim}{B_{ii}} = \underbrace{\lambda^{(\mu)}_{rs}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta_{ij}}_{B_{ij}\,\delta_{ij}} \cdot \delta_{ij} = \lambda^{(\mu)}_{rs}\,\delta_{\mu\nu}\,\underset{\sim}{\delta_{ii}} \overset{**}{=} [G]\,\delta_{sr} \quad \square$$

$$\delta_{ii} = Tr(I) =$$

= summan av ettor i enhetsmatrisen som verkar i U_μ

$= n_\mu = \dim(V)$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^{(\mu)}_{rs} = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta_{sr}} \quad \square\square$$

$$B_{ij} = \sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{\overset{\checkmark}{(\mu)}}_{sj}(g^{-1}) = \lambda^{(\mu)}_{rs}\cdot\delta_{ij}\,\delta^{\mu\nu} = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta_{sr}\,\delta_{ij}\,\delta^{\mu\nu}$$

$\mu \to \nu$

$$\Rightarrow \sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ir}(g)\, \boxed{D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1})} \overset{FOT}{=} \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta_{sr}\,\delta_{ij}\,\delta_{\mu\nu}$$ ☼

För att få samma form som i teoremets formulering

$\mu \to i \quad \nu \to j \quad i \to \alpha \quad r \to \beta \quad j \to \gamma \quad s \to \delta$

$$\Rightarrow \sum_{g\in G} D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{j}_{\gamma\delta}(g^{-1})$$

Ursprungligen ett komplext konjugat

$$\sum_{g\in G} \left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\right)^* D^{j}_{\gamma\delta}(g^{-1})$$

Undersök ☼

Maschke: $D^{-1} = D^\dagger = (D^T)^*$

$$D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) = \left(D^{(\nu)}(g)\right)^{-1}_{sj} = \left(D^{(\nu)}(g)^\dagger\right)_{sj} =$$

$$= \left(D^{(\nu)*}\right)_{js}$$

Slutför själv.

Räkneövning Grupper

Grupp binär operato $\circ$

Associat. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Identitetselement

Existens av invers.

(Kommutivitet $a \circ b = b \circ a$ abelsk)
kommutativ

Kom ihåg trivialt: $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Hitta delgrupp till Z_6

$\{0\}$

$\{0, 2, 4\}$

$\{0, 3\}$

Symmetrisk grupp. Sym (M) permutationer av M

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$(2\,3\,5)$ $(4\,6)$

B) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C) $(1)\,(2)\,(3)$ $(1)\,(2\,3)$ $(1\,3)\,(2)$ $(1\,2)\,(3)$

$(1\,2\,3)$ $(1\,3\,2)$

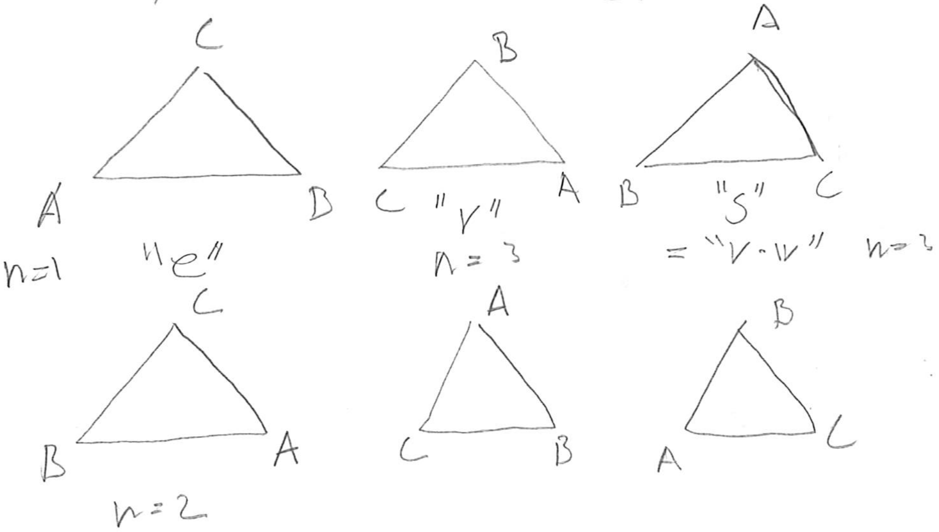
d) $\{(1)\,(2)\,(3)\}$ $\{(1)(2)(3)\ \ (1)\,(2\,3)\}$ $\{(1)(2)(3)\ \ (1\,2)\,(3)\}$

$\{(1)\,(2)(3)\ \ (1\,2)\,(3)\}$ $\left\{\begin{matrix} (1\,2\,3) & (1\,3\,2) \\ (1)\,(2)\,(3) & \end{matrix}\right\}$ S_3

Diedergruppen   Symmetrigruppen för regelbund n-hörning.

a) Element i D_3.   6st element

Viktigt t.ex. Kristallstruktur.



D_3 isomorf med S_3

Transposit (ij) $(1\,3\,5)(2\,4) \to (1\,5)(1\,3)(2\,4)$

$1 \leq i < j < n$ $n \geq 2$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$(1,2)\ (1,4)\ (1,6)\ (3,4)\ (3,5),\ (3,6)\ (5,6)$ #7

$\operatorname{sign}(R_1) = -1$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$(1,2)\ (1,4)\ (2,4)\ (3,4)\ (3,5)$ #5

Sign $R_2 = -1$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \qquad R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \qquad R_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$(1\ 3\ 5\ 4)\ (2)\ (6)$

$(5\ 4\ 1\ 3)\ (2)\ (6)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

π_1^{8} $(1\ 4\ 2)\ (3\ 6)\ (1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

13/12 Föreläsning.

Fundamentala ortogonalitets teoremet

Givet G, irreps D^1, $D^{(2)}$ (irreducibla representationer)

$$\sum_{g\in G} \left(D_{\alpha\beta}^{(i)}(g) \right) D_{\gamma\delta}^{(j)}(g) = \frac{[G]}{n_i} \delta_{ij} \cdot \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}$$

Låt oss bilda vektorer av typen (Antag reellvärda irreps)

$$\left(D_{\alpha\beta}^{(i)}(g_1), D_{\alpha\beta}^{(i)}(g_2), \dots, D_{\alpha\beta}^{(i)}(g_{[G]}) \right)$$

$$\left(D_{\gamma\delta}^{(j)}(g_1), D_{\gamma\delta}^{(j)}(g_2), \dots D_{\gamma\delta}^{(2)}(g_{[G]}) \right)$$

Ortogonala om ej i=j
$\alpha=\gamma$, $\delta=\beta$, enligt
FOT

Hur många sådana ortogonala vektorer kan finnas?

Hur många val av α, β? Jo n_i^2 blir då också antalet ortogonala vektorer för irrepen i.

Totala antalet ges då av $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_m^2 \le [G]$ kan visas $\ge$ $\Downarrow$ $=$

Alltså $\boxed{\sum_{i=1}^{m} n_i^2 = [G]}$ ⇒ # irreps till en ändlig grupp är ändligt

Ex Vad är detta bra för?

Irreps till S_3 $[S_3]=6$

				A_1	A_2	E			
		konjugatklass	g	D_1	D_2	D_3	χ_1	χ_2	χ_3
I	≡	C_1	(1)(2)(3)	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	1	2
A	≡	$\boxed{C_2}$	(1 2 3)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	1	-1
			(1 3 2)	1	1	$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$	1	1	-1
C	≡	$\boxed{C_3}$	(12) (3)	1	−1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	-1	0
			(13) (2)	1	−1	$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$	1	-1	0
			(23) (1)	1	−1	$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$	1	-1	0

Problem!

Basberoende tabell!

Hur beskriva detta i ett basoberoende språk.

$\Downarrow$

"Karaktärer"

Samma karaktär i samma konjugatklass.

⇒

C_1	1	1	2
C_2	1	1	-1
C_3	1	1	0

Givet en rep D av G

$$\chi(g) = Tr(D(g)) = \sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha}(g)$$

↳ Karaktären av g i Reppen D, basoberoende!

Dessutom alla element i en konjugatklass har samma karaktär

$$g_1 = h g_2 h^{-1} \rightarrow D(g_1) = D(h)\,D(g_2).\,\overset{= D^{-1}(h)}{D(h^{-1})}$$

$$\Rightarrow \chi(g_1) = Tr(D(g_1)) = Tr(D(h)D(g_2)D(^{-1}(h)) =$$

$$Tr(D^{-1}(h)\,D(h)\,D(g_2)) = Tr(D(g_2)) = \chi(g_2)$$

Alltså oberoende av bas.

Låt S = # konjugatklasser i G

P_K = # element i konjugatklass C_K

Multiplicera FOT med $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$ (på båda sidor) summera över repeterade index

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{S} P_K\, \chi^{(i)*}(C_k)\,\chi^{(j)}(C_k) = [G]\,\delta_{ij} \quad *$$

Bilda vektorer $(\sqrt{P_1}\,\chi^{(i)}(C_1), \sqrt{P_2}\,\chi^{(i)}(C_2) \dots \sqrt{P_S}\,\chi^{(i)}(C_S))$

$i = 1, 2, \quad m \quad$ # irreps

Vektorerna ortogonala om $i \neq j$ * ⟹ Max antal sådana ortogonala vektorer $\boxed{\leq S}$ ** $>$ kan visas.

$$\Downarrow$$

sådana vektorer = S ⟹ $m = s$

**

irreps = # konjugatklasser

⌜

Konjugatklass $\quad g_1 \;\exists h: \; g_1 = h\,\underline{a}\,h^{-1}$

jmf $\quad M_1 = S M_2 S^{-1} \quad$ Similaritetsklass

⌟

Symmetigrupp G, bilda en rep D av G ← reducerbar

irreducerbara representationer motsvarar frihetsgrader

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & & & 0 \\ & D^{(2)}(g) & & \\ & & D^{(l)}(g) & \\ 0 & & & D^{(l)}(g) \end{pmatrix}$$

fixt l

Välj bas där $D(g)$ är block diagonal

← multipicitet # förekomster av irrep l i D

Cm kan vara 0

$$= c_1 D^{(1)}(g) \oplus c_2 D^{(2)}(g) \oplus \cdots \oplus c_l D^{(l)}(g) \oplus \cdots \oplus c_m D^{(m)}(g)$$

↑ Direkt summa

Tag spåret

$$\chi(C_k) = \chi(g) = c_1 \chi^{(1)}(g) + c_2 \chi^{(2)}(g) + \cdots + c_m \chi^{(m)}_m(g) = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi^{(i)}(g)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \chi^{(i)}(C_k) \quad (\square)$$

↑ $g \in C_k$

Multiplicera $(\square)$ med $p_k \chi^{(j)*}(C_k)$ och summera över alla konjugatklasser

$$\sum_{k=1}^{s} p_k \chi^{(j)*}(C_k) \chi(C_k) = \sum_{k=1}^{s} p_k \chi^{(j)*}(C_k) \sum_{i=1}^{m} c_i \chi^{(i)}(C_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} c_i \underbrace{p_k \chi^{(j)*}(C_k) \chi^{(i)}(C_k)}_{} = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_{ij} [G] = [G] c_j$$

Ortogonalitet för karaktärer

given reducerbar rep

$$\Rightarrow \quad c_j = \frac{1}{[G]} \sum_{k=1}^{s} p_k \chi^{(j)*}(C_k) \chi(C_k)$$

"Masterformeln"

som $D^{(j)}$ förekommer i D

$\Rightarrow$ "Vet hur många ggr en frihetsgrad förekommer"

Tillbaks till GRUPPTEORI kontinuerliga grupper.

Ex $C_n = \{ \underbrace{g_1 = \frac{2\pi}{n} \cdot \text{rotation}}_{g_1}, \underbrace{g_2 = 2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot \text{rotation}}_{g_2}, \dots, \underbrace{e}_{g[C_n]} \} =$

$$= \{ g_1, g_2, \dots, g_{[C_n]} \} \xrightarrow[n\to\infty]{} \{ g_\varphi \} = SO(2)$$

↖ kontinuerlig vinkel
$\varphi \in [0, 2\pi]$

Kontinuerlig rotation i 2D

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\varphi\text{-rotation}]{} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$D(g_\varphi) = R(\varphi)$ "Definierande rep" av g_φ

↑ Den trogna rep som har lägst dimension. "Enklaste"

OBS! Denna definierande rep är reellvärd.

$SO(2, R)$

2D ← dimension G-modul

← reellvärd

"speciell" $|R(\varphi)| = 1$

← ortonormerad $R(\varphi)$

SO(2,R) är ett exempel på LIE-grupp (Sophus Lie 1842-99)

LIE-grupp Kontinuerlig vars definierande rep är deriverbar

Låt oss tillåta komplex-värda rep av rotationsgruppen i 2D

$$z = x + iy = Re^{i\theta} \xrightarrow[\phi \text{ rotation}]{} re^{i\theta}e^{i\phi} = re^{i(\theta+\phi)}$$

↖ komplex värd definierande rep (1-dim)

$D(g_\varphi) = e^{i\phi}$ Gruppen kallas U(1)

Unitär ↗ ↖ 1x1 matris
1-dim

Kan generaliseva!

Kan välja vilken som helst $D^{(m)}(g_\varrho) = e^{im\varrho}$, $m \in \mathbb{Z}$

Använd Masterformeln.

Kan visa att $R(\varrho)$ kan reduceras till två komplexvärda 1-dim reps (om vi släpper kravet $R(\varrho)$ reellvärd)

$R(\varrho) \longrightarrow S R(\varrho) S^{-1} = R'(\varrho)$ ok som komplexvärd

Masterformeln $D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus \cdots \oplus$

$$c_j = \frac{1}{[G]} \sum_{k=1}^{s} p_k \chi^{(j)*}(C_k) \chi(C_k) = \frac{1}{[G]} \sum_{g \in G} \chi^{(j)}(g) \chi(g)$$

Kontinuerlig grupp $\longrightarrow$ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varrho \, \chi^{(j)*}(e^{ij\varrho}) \chi(R(g_\varrho))$

längs parameter intervall på $[0, 2\pi[$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varrho \, e^{-ij\varrho} \underbrace{2\cos\varrho}_{e^{i\varrho} + e^{-i\varrho}} = \delta_{j1} + \delta_{j,-1} \Rightarrow$$

$$R'(\varrho) = \begin{pmatrix} \boxed{e^{-i\varrho}} & 0 \\ 0 & \boxed{e^{i\varrho}} \end{pmatrix}$$

Block

$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

Varning! $U(1) \sim SO(2, R)$

17/12

Gamla tentor 5 uppgifter á 5 poäng.

- 1) Greenfunktion / Residykalkyl
- 2) Integralekvation
- 3) Variationskalkyl
- 4) Grupper / Representationer
- 5) Topologi / Greenfunktion / överraskning

Greenfunktioner (2017.1)

löser inhomogena diffekvationer

a) Residykalkyl är ett effektivt verktyg vid beräkningar av Greenfunktioner. Vad är en Greenfunktion?

De löser inhomogena differentialekvationer. som är linjära.
med definierade begynnelse och randvillkor

$L u(\bar{x}) = f(\bar{x}) \rightarrow L\, G(\bar{x},\bar{s}) (= \delta(\bar{x},\bar{s})$ $u(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\bar{x},\bar{s}) f(\bar{s})\, d\vec{s}$

Greenfunktion är impuls respons $L\, G(\bar{x},\bar{s}) = \delta(\bar{x},\bar{s})$
när en dirac puls skickas in vid punkten $\bar{s}$ i ett system

Varför är Greenfunktioner viktiga i fysiken?

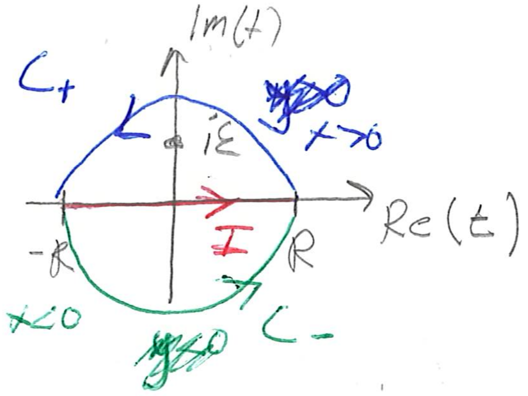
De kan användas för att lösa många problem!

Hur kommer residykalkyl in i beräkning av residyfunktioner?

Fouriertransformera ofta för att bestämma Greenfunktionen varvid poler kan uppstå i integralen vid transformation tillbaka.

b) Använd Residykalkyl till att visa att stegfunktionen $\Theta(x)$ har integralrepresentationen

$$\Theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}dt \qquad \begin{matrix}\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0\end{matrix}$$



Jordans lemma

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C^+} g(z)e^{imz}dz=0$$

$m>0$ om $\lim_{r\to\infty} g(re^{i\theta})=0$

$\forall\theta\in[0,\pi]$

här $g(t)=\dfrac{1}{t-i\varepsilon}$ $\quad \lim_{r\to\infty}\dfrac{1}{re^{i\theta}-i\varepsilon}\to 0 \quad \forall\theta$

Repetera Jordans.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{ixz}}{z+i\varepsilon}$$

Vill beräkna $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ med γ: $\gamma^+ = C_+ + I$

$\gamma^- = C_- - I$

- För $x>0$ gäller på γ^+

$\Rightarrow$ Jordan $\displaystyle\int_{C^+} F(z)dz=0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}dt=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma^+}F(z)dz=\frac{2\pi i}{2\pi i}\operatorname{Res}_f(i\varepsilon)$$

$$\lim_{z\to i\varepsilon}(z-i\varepsilon)\frac{e^{izt}}{z-i\varepsilon}=e^{-\varepsilon t}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}1$$

- För $x<0$ gäller på γ^-

$\Rightarrow$ Jordan $\displaystyle\int_{C^-} F(z)dz=0$

saknas pole.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma^-}F(z)dz=\overset{\downarrow}{0}$$

$$\Rightarrow \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

- Kleins fyra gruppen (2010, 5)

a) $G=\{e,a,b,c\}$ med e enhetselement

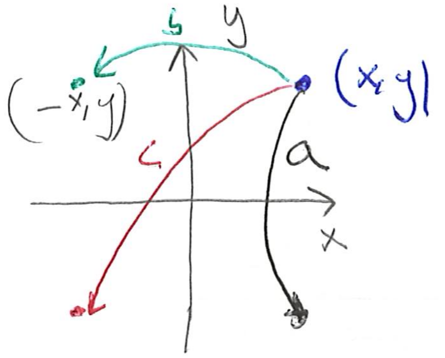
$e: (x,y) \rightarrow (x,y)$

$a: (x,y) \rightarrow (x,-y)$ Spegling i x-axel.

$b: (x,y) \rightarrow (-x,y)$ Spegling i y-axel.

$c: (x,y) \rightarrow (-x,-y)$ paritetstransformation.

Konstruera multiplikationstabellen & bestäm dess grupper.



$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Sudokuregeln

$(a\circ b)(x,y) =$

$a(b(x,y)) = a(-x,y) =$

$(-x,-y) = c(x,y)$

G är abelsk $(g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1)$

delgrupper $\{e\}$, $\{e,a,b,c\}$. $\{e,a\}$ $\{e,b\}$ $\{e,c\}$

Grupper kan ses i multiplikationstabellen.

b) Illustrera Cayles sats genom att visa att Kleins fyragrupp är isomorph med den delgrupp till S_4 som består av permutationerna

(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)

A B C D.

Multiplikationstabell

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

$$\begin{tikzcd}
B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \arrow[d, leftrightarrow, bend right] \\
C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \circ B$$

$E \Leftrightarrow e$

$A \Leftrightarrow a$

$B \Leftrightarrow b$

$C \Leftrightarrow c$

Integralekvation (2011.2)

- Beskriv en metod att lösa integralekvationen

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2) u(t)\, dt$$

För vilka värden på λ existerar en unik lösning?

⇝ Fredholm II-typen.

Kärna $xt + t^2$ separabel

Allmänt

$$\circ\ u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \int_a^b N_j(t)\, u(t)\, dt$$

Vårt fall

$$\circ\ u(x) = \underset{\overset{\uparrow}{f(x)}}{x} + \lambda \overset{M_1}{\underset{\downarrow}{x}} \int_0^1 \underset{\nwarrow N_1(t)}{t}\, u(t)\, dt + \lambda \overset{M_2}{\underset{\downarrow}{1}} \int_0^1 \underset{\nwarrow N_2(t)}{t^2}\, u(t)\, dt$$

$a = 0 \qquad b = 0 \qquad n = 2$

- Definiera $c_j = \int_a^b N_j(t)\, u(t)\, dt$

$$\Rightarrow \quad u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x)$$

- $c_1 = \int_0^1 t\, u(t)\, dt \qquad c_2 = \int_0^1 t^2\, u(t)\, dt$

$$\Rightarrow \quad u(x) = x + \lambda c x + \lambda c_2 \qquad *$$

- Multiplicer mer $N_j(x)$ och integrera $\int_a^b \ldots dx$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_a^b N_i(x)\, u(x)\, dx}_{c_i} = \underbrace{\int_a^b N_i(x)\, f(x)}_{b_i} + \underbrace{\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b N_i(x) M_j(x)\, dx}_{a_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$$

- Matris form $\quad A = (a_{ij})$

$$\bar{b} = \bar{c} - \lambda A c = (I - \lambda A)\bar{c}$$

Förutsätt $|I - \lambda A| \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \bar{c} = (I - \lambda A)^{-1} \bar{b}$$

- $b_1 = \int_0^1 x \cdot x\, dx = \frac{1}{3}$

$b_2 = \int_0^1 x^2\, x\, dx = \frac{1}{4}$

$a_{11} = \int_0^1 x \cdot x\, dx = 1/3 \qquad a_{21} = \int_0^1 x^2 \cdot x\, dx = 1/4$

$a_{12} = \int_0^1 x\, dx = 1/2 \qquad a_{22} = \int_0^1 1 \cdot x^2\, dx = 1/3$

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad I - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & \lambda/2 \\ 1 \cdot \frac{\lambda}{4} & 1 - \frac{\lambda}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(I - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{\det(I - \lambda A)} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{c} = (I - \lambda A)^{-1} \bar{b}$$

$$|I - \lambda A| = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{4} = 1 - \frac{2\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{9} - \frac{\lambda^2}{8} =$$

$$= -\frac{1}{72}\left(\lambda^2 + 48\lambda - 72\right)$$

Unik rešen če $\lambda^2 + 48\lambda - 72 \neq 0$

18/12

Kontinuerliga grupper

Rotationsgruppen i 2D

SO(2, R) U(1) Lie grupper

Reellvär def rep Komplexvär def rep ⊂ oändligt antal def reps

$g_\varphi \to R(g_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $g_\varphi \to D(g_\varphi) = e^{im\varphi}$ $m \in \mathbb{Z}$

SO(2, R) TU för små φ $\varphi \approx 0$

$R(g_\varphi) = R(\varphi) \approx I - i\varphi X + O(\varphi^2)$ ↙ Infinitesmal generator

$\subset iX = \frac{dR(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} \Rightarrow$

$X = \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Exponentiera

$$R(\varphi) \overset{?}{=} e^{-i\varphi X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^n}{n!} X^n =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} X^2 = I \\ \text{TU} \ \begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{matrix} \end{matrix} \right\} = I\cos\varphi - iX\sin\varphi$$

Stämmer!

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Rotationsgruppen i 3D

Kolla rotationsgruppa i 3D

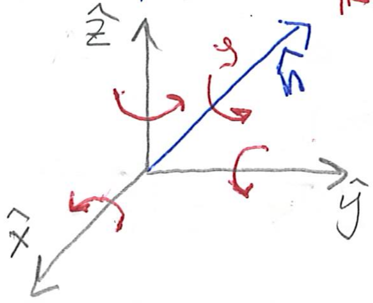
3D

Reell-vär SO(3, R) ↗ 3D

Komplex värd SU(2) ⊂ 2D

SO(3, R)

$R_{\hat{n}}(\varphi)$



Rotationsmatriser

$$\underset{\hat{x}}{R_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$-iX_1 = \frac{\partial R_1(\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{y \nearrow}{R_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$-iX_2 = \frac{\partial R_2(\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{z \nearrow}{R_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-iX_3 = \frac{\partial R_3(\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fiffig identitet vid problemlösning

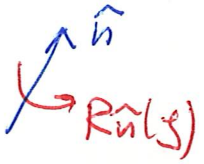
$(X_k)_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}$ $k = 1, 2, 3$

↑ Antisymmetrisk tensor.

X_1, X_2, X_3 uppfyller Lie Algebran *

$$[X_i, X_j] = \underset{\uparrow \sqrt{-1}}{i}\,\varepsilon_{ijk} X_k$$

$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$



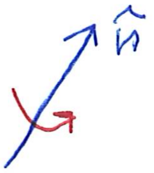
$$R_n(\varphi) = e^{-i\hat{n}\vec{X}\varphi}$$

* Denna Lie Algebra satisfieras också av andra matriser (= Generatorer i Lie Algebra språk)

T.ex. Pauli Matriserna $\frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Paulimatriserna = Generatorer till gruppelement i en komplex värd definierande representation



$$U_{\hat n}(\vartheta) = e^{-i\vartheta\hat n\vec\sigma/2} \qquad \vec\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Gruppen kallas SU(2) (Symmetrigrupp)

Spinndelen beskrivs gena delt.

$$\overset{\text{speciell}}{S}\underset{\text{unitär}}{U}(2)$$

Isomorf: För varje element i A finns ett och endast ett motsvarande element i B

<u>OBS!</u> SO(3,R) och SU(2) <u>EJ Isomorfa</u> Viktigt i kvantfysik

$$R_{\hat n}(\vartheta) = \cos\vartheta\, I - i\hat n \cdot \vec X \sin\vartheta \Rightarrow R_{\hat n}(\vartheta = 2\pi) = \mathbb{1}$$

Oj

$$U_{\hat n}(\vartheta) = \cos(\vartheta/2)\, I - i\hat n\vec\sigma \sin(\vartheta/2) \Rightarrow U_{\hat n}(\vartheta = 2\pi) = -\mathbb{1}$$

$U_{\hat n} \in SU(2)$

Ej isomorfa, men kvotgruppen $SU(2)/Z_2 \overset{\text{Isomorf}}{\simeq} SO(3,R)$

$$SU(2) \supset Z_2 = \left\{ \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Notera rotation av vinkeln 2π ger -1 framför spinnet!

$$|i\rangle \xrightarrow{\vartheta = 2\pi} -|i\rangle$$

Fysikens viktigaste minustecken i hela fysiken

SU(2), kvarkar, isospinn

$$\begin{cases} |p\rangle = |\psi\rangle \otimes |\uparrow\rangle_{iso} = |\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ |n\rangle = |\psi\rangle \otimes |\downarrow\rangle_{iso} = |\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

← Isospinn tillstånd

Komponent I_1, I_2, I_3 av en isospinn vektor $(\vec{I} = (I_1, I_2, I_3))$

I_3 ← Diagonal generator

$$\boxed{I_i = \frac{1}{2}\sigma_i}$$

Bildar en SU(2) Lie Algebra

Verkar med I_3 på $|p\rangle$ $\quad I_3|p\rangle = |\psi\rangle \otimes I_3 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}|\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

I_3 på $|n\rangle$ $\quad I_3|n\rangle = |\psi\rangle \otimes I_3 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Kvarkar u, d, s, c, t, b Up, down, "sär", bottöm, charm, topp,

Laddning 2/3e, −1/3e, 2/3e, −1/3e, 2/3e, −1/3e

Isospin $|\psi\rangle_{iso} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |\psi\rangle_{iso}$

$I_3|u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle \qquad I_3|d\rangle = -\frac{1}{2}|d\rangle$

QCD – Quantum Chromo Dynamics "Beskriver "stark" växelverkan"

$[H_{QCD}, I_j] = 0$ Kommuterar $j = 1, 2, 3$

$\Rightarrow U_{\hat{n}}(g) H_{QCD} U_{\hat{n}}^{-1}(g) = H_{QCD}$

QCD har en SU(2) isospinn symmetri

Hamilton → Lagrangian vid relativistisk hänsyn behöver tas.

$|p\rangle$ består av $2|u\rangle$ och $1|d\rangle$

$|n\rangle$ består av $1|u\rangle$ och $2|d\rangle$

$$|u\rangle_1 \otimes |u\rangle_2 \otimes |d\rangle_3 = |\psi\rangle_p \otimes |\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_3 \otimes$$
$$\otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_3$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

?

Vår räkning Masterformeln.

SU(2) har 2Dim irreps $(\frac{1}{2}\sigma_i)$ · def. rep.

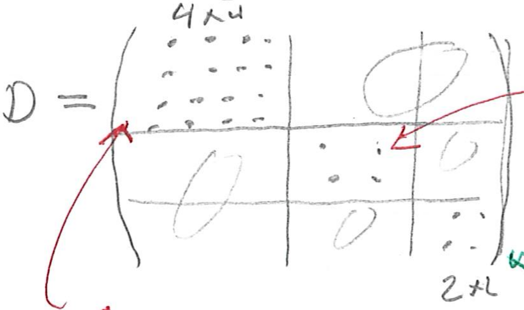
$|u\rangle_1 \otimes |u\rangle_2 \otimes |d\rangle_3$

element i SU(2) moduler, V_1, V_2, V_3 i vilka SU(2) irreps D_1, D_2, D_3 verkar

Masterformeln

$$D = D^{(1)} \otimes D^{(2)} \otimes D^{(3)}$$

$$D^{(1)} = \left\{ D^{(1)}(g_g) \cdot e^{i g \cdot \hat{n} \bar{\sigma} \cdot 1/2} \right\}$$



Verkar i ett 2d-~~[illegible]~~ SU(2)-modul som spänns upp av isospin tillstånd för $|p\rangle$, $|n\rangle$

kortlivad partikel

Spänns upp av tillstånd som beskriver en ok Δ-resonans.

Clebsch-Gordan Utveckling

Inlämningsuppgift

Generatoren X_1, X_2, X_3 till $SO(3,R)$ bildar en Lie Algebra $[X_\alpha, X_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}X_\gamma$.

Bilda en $\overset{\leftarrow \text{ändligt dimensionell}}{\text{rep}}$ till $SO(3,R)$

uppspänd av egenvektorer $|\beta, m\rangle$ till X_3 och

$\vec{X}^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ ↑ m heltal.

↑ Casmir operatorn

$$\begin{cases} X_3|\beta,m\rangle = m|\beta,m\rangle \\ \vec{X}^2|\beta,m\rangle = \beta^2|\beta,m\rangle \end{cases}$$

① Visa $[\vec{X}^2, X_3] = 0$

Introducera stegoperatorer $X_\pm = X_1 \pm iX_2$

② Visa $[X_\pm, \vec{X}^2] = 0 \qquad [X_3, X_\pm] = \pm X_\pm$

$\Rightarrow$ $X_\pm|\beta,m\rangle$ är ett egentillstånd till X_3 med egenvärde $m \pm 1$

③ Visa detta!

$$\Rightarrow \langle\beta,m|\vec{X}^2|\beta,m\rangle = \langle\beta,m|\overbrace{X_1^2 + X_2^2}^{\text{Visa detta positivt}} + X_3^2|\beta,m\rangle \geq m^2$$

④ Visa detta

Antag att det maximala värdet på m är λ $m_{max} = \lambda$

Med hjälp av identiteten $\vec{X}^2 = X_-X_+ + X_3(X_3+1)$ *

Följer $\underbrace{\vec{X}^2|\beta,\lambda\rangle}_{\text{Högsta vikttillstånd}} = \lambda(\lambda+1)|\beta+1\rangle$ **

⑥ Visa detta dvs $*$ $**$

Vi kan också skriva

$\bar{X}^2 = X_+ X_- + X_3(X_3 - 1)$

$\Longrightarrow \quad m_{min} \equiv -\lambda$ Minst m-vardet

⑥ Visa detta

$\Longrightarrow$ m kan anta $2\lambda + 1$ möjliga värden

Samma summarum

$-\lambda \leq m \leq \lambda \qquad m \in \mathbb{Z}$

⑦ Påminner det om något i kvantmekaniken,

Möjliga z-komponent av ett banimpulsmoment

Längd av banimpulsmoment $\hbar = 1$

$\sqrt{l(l+1)}$

projektionen på $\hat{z}$ ges av m

Topologisk kvantmateria

1981
48

Avancerat om stringent

Supraledande fas

fasövergång

Oordnad fas <=> ordnad fas

Flera symmetrier Färre symmetrier

$F = E - TS$

små T E bestämmer

stora T S bestämmer

=

Upptäckt Nobelpris 2016.

"Ej symmetribrott, topologiska invarianter" 1982

"Kan ordnas av topologiska defekter"

= Topologi kontinuerlig deformationer

- klämma / dra . ok
- klippa / klistra ej ok

Invariant

Ex hål "genus"

Heltal som karakterisera globala egenskaper

Kelvin "virvelknutar i etern, är atomer"

Topologi uppstått från fysiken

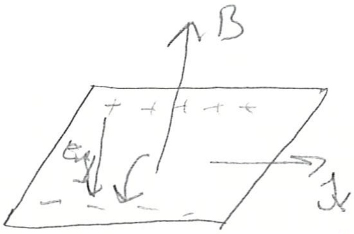
Hall effekten

Under 4K

Två dimensioner

kvant fas $Z < \lambda$,

↑ de Broglie våglängd



$\rho_{xy} = \frac{h\ 1}{e^2 n} + 10^{-9}$

Oberoende av form, smutsighet etc.

Kvantehall effekten forklares av topologistrukturer.

Gauss Bonnet -teoremet

Breakthrough prize physics.

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dS = 2(1-g)$$

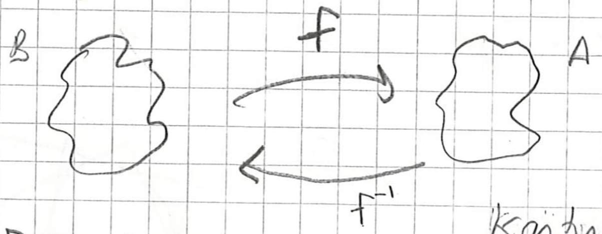
↑ gaussisk krumning

↑ # hål

→ Chen-teoremet $\frac{1}{2\pi}\int_M F\,dS = C$

~~Räkneövning~~ 20/12 Föreläsning

Topologins
~~Gruppteorins~~ ABC



f kontinuerlig

Kontinuerlig ⇒ ∃ f^{-1}: en öppen mängd i A blir det i B

Topologi: Några grundbegrepp

← mängd

(X, T) Topologiskt rum om ett antal villkor uppfyllda

↑ "Topologi" = { Någon uppsättning delmängder $\Theta_i \in X$ }

① ∅ och $X \in T$

② Varje $\bigcup_i \Theta_i \in T$ union Θ_i

③ Varje, ändligt snitt $\bigcap_i \Theta_i \in T$

Viktigt specialfall av topologiskt rum:

Topologisk mångfald.

= Topologiskt rum $(\mathcal{M}, T_{\mathcal{M}})$ där

$T_{\mathcal{M}} = \{ \Theta_\alpha \in \mathcal{M} \quad \alpha = 1, 2, \ldots \}$.

och Θ_α är homomorfa till en öppen mängd $U_\alpha \in \mathbb{R}^n$

Deriverbar

→ $\exists F_\alpha : \Theta_\alpha \to U_\alpha$ Där f är kontinuerlig med kontinuerlig invers

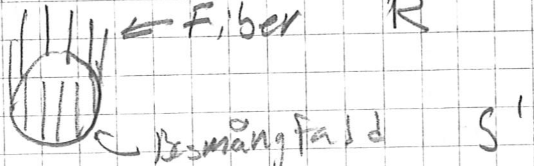
Deriverbar:

F_α = diffeomorfism om rätt uppfyllt

$(F_\alpha, \Theta_\alpha) \equiv$ "karta" av Θ_α

$\{(F_\alpha, \Theta_\alpha)\}$ = "Atlas" över $\mathcal{M}$

Tangentknippe

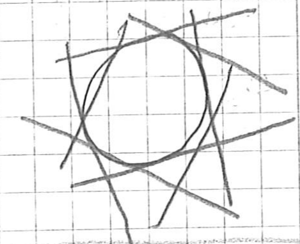


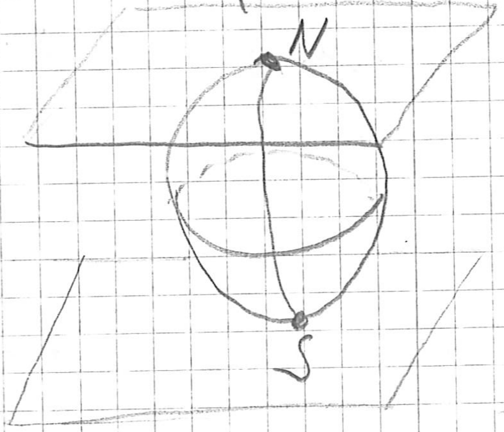
Fiberknippe

Ekvivalensklasser:

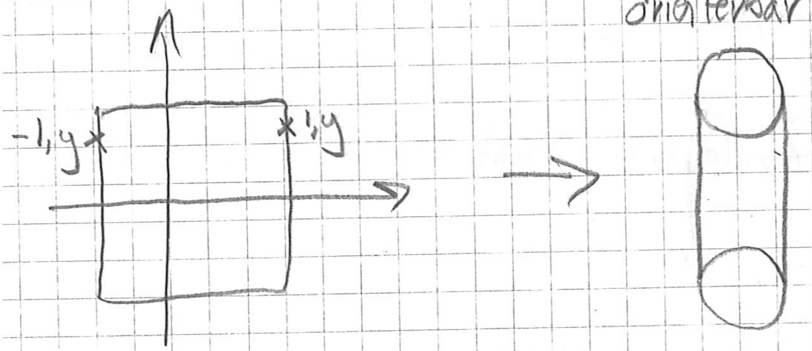
R $x \sim y : y = x + 2\pi n$

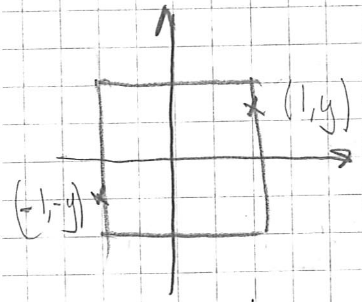
$n \in N$





Cylinder orienterbar





Möbiusband, ej orienterbar.

Kan också konstrueras från fiberknippe

Klein Bottle

Topologins centrala problem.

Klassificering av topologiska rum som är ekvivalenta under kontinuerliga deformationer.

Homomorfism: $\exists f: X_1 \rightarrow X_2 \Rightarrow X_1 \sim X_2$

Hur klassifisera? Öppet problem.

Allt vi kan säga: Om X_1 och X_2 har olika topologiska invarianter så gäller $X_1 \not\sim X_2$

"paradigm" **Ex** Topologiska invarianter

1. Euler karakteristik 1752 Gauss 1828 Bonnet 1848
2. Cherntal (Chern 1944) } Fysik!
3. $\mathbb{Z}_2$-index (Kane, Mele 2005) } Fysik!

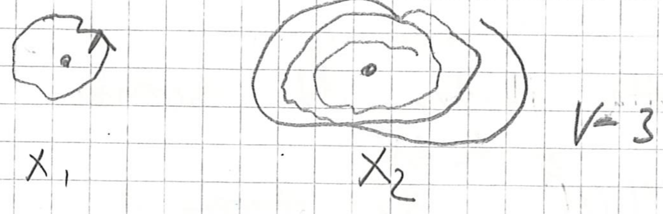
Kan definiera en svagare ekvivalensrelation genom att släppa på kravet att f har invers.

$X_1 \sim X_2$ $\exists f: X_1 \underset{\cancel{\leftarrow}}{\rightarrow} X_2$ f kontinuerlig

Dessa ekvivalensklasser kallas homotopiklasser

Kan definiera fler topologiska invarianter.

Fysik 4 Vindningstal V



Euler karakteristik: Prototyp för topologisk invariant

Antas en mångfald $M \subset \mathbb{R}^3 \overset{\text{Homomorf}}{\sim}$ Polyeder $K \in \mathbb{R}^3$

Generaliseras till att också vara polygoner kanter, linjer, punkter.

Definition

Euler karakteristik $X(M) = \#$ hörn på K $- \#$ kanter på K $+ \#$ sidoytor på K

V - Vertice, E - edge, F - Face

$$= V - e + f$$

Ex $X(\cdot) = \{V=1, k=0\ f=0\} = 1$

$$X(/) = \{v=2, e=1, F=0\} = 1$$

$$X(\blacktriangle) = \{V=3, e=3, f=1\} = 1$$

$$X(S^1) = X(\bigcirc) = X(\triangle) = \{V=3, e=3, f=0\} = 0$$

$S^1 \sim \triangle$

$$X(\oplus) = X(S^2) = X(\blacktriangle) = \{V=4, e=6, F=4\} = 2$$

$S^2 \sim \blacktriangle$ pyramid

Kan också beräkna

$X(\oplus)$ via homomorfismen med en kub

$$X(\oplus) = X(S^2) = X(\square) = \{V=8, e=12, F=6\} = 2$$

Detta illustrerar det berömda Poincaré-Alexander teoremet

$X(M)$ $M \in \mathbb{R}^3$ är oberoende av valet av polyeder K

så länge $M \sim K$

Euler polyederformeln 1752 Crack pots

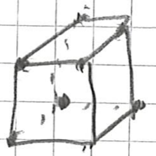
Låt K vara polyeder med v-hörn, e-kanter, f-sidor:

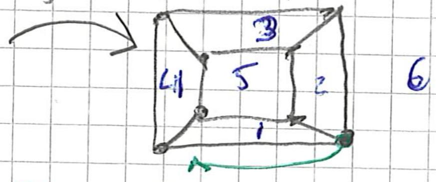
Om $K \simeq S^2 \Rightarrow \boxed{\chi(K) = v - e + f = 2}$

↑ konvex polyeder

Projektion på 2d

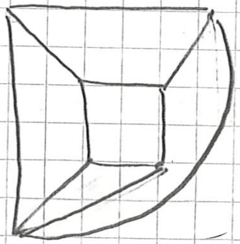
Ex





Inga kanter får skära varandra → Planär graf representerar kuben i 2D.

Kontrahera $\Rightarrow$

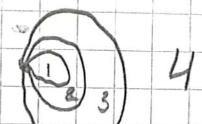


$$\begin{cases} v \to v-1 \\ e \to e-1 \\ f = f \end{cases}$$

$v - e - f \rightarrow v - 1 - (e-1) + f = v - e + f$

Euler karakterist. invariant under kontraktion

Iterera tills bara ett hörn återstår.



$\chi = v - e - f = 1 - 3 + 4 = 2$