Anteckningar i

MATEMATISK FYSIK

LP2 2015

Föreläsare: Henrik Johannesson

Viktoria Yurgens

4/11-15
(LV1)
F1

Henrik Johannesson
Soliden 3007

henrik.johannesson@physics.gu.se

linander@chalmers.se
edblomc@chalmers.se

Kursinnehåll:
- Greens funktioner, residykalkyl, integralekvationer...
- Variationskalkyl, vägintegraler...
- Hilbertrum, ortogonala polynom, speciella funktioner...
- Grupp- & representationsteori

Greensfunktioner

$L_x u(x) = f(x) \xrightarrow{\text{Dirac-notation}} L|u\rangle = |f\rangle$

L_x: linjär diff.operator

ex $\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$

Snabbrepetition – Diracnotation

V komplext vektorrum

$|\alpha\rangle \in V$, $\langle\alpha| = |\alpha\rangle^*$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ heltal

$|\alpha\rangle$: ket, $\langle\alpha|$: bra

"Inre produkt"

$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* \in \mathbb{C}$ ~ komplex skalärprodukt

Välj ON-bas

$\{|\alpha\rangle\}$ i V

$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}$ Kronecker-delta

För $|v\rangle \in V$ gäller då

$|v\rangle = \sum_\alpha v_\alpha |\alpha\rangle$ implicit antagande: uppräkneligt, $\alpha \in \{1, N\}$ heltal

$\langle\beta|v\rangle = \sum_\alpha v_\alpha \underbrace{\langle\beta|\alpha\rangle}_{\delta_{\beta\alpha}} = v_\beta$

Generalisering

Komplexa vektorrum med ett icke-uppräkneligt antal element.

- Vektorrum V'

$|x\rangle \in V'$, $x \in \mathbb{R}$ reellt tal basvektor

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ delmängd av de reella talen

$$\sum_{\alpha} \ldots \longrightarrow \int_{\Omega \subset \mathbb{R}} dx$$

godtycklig vektor

skalär

$$|f\rangle = \int dx \underbrace{f_x}_{f(x)} |x\rangle = \int dx\, f(x)\, |x\rangle$$

inre produkt

$$\boxed{\langle y | f\rangle = \int dx\, f(x) \underbrace{\langle y | x\rangle}_{\delta(x-y)\ \text{"="}\ \delta_{xy}} = f(y)}$$

deltafkn

Operatorer

Bildas från "yttre produkter" ket · bra ist för bra · ket

$L = |v\rangle\langle w|$

Ex: $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ i en bas $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[N = 2]$ $= \begin{pmatrix} \langle 1|v\rangle \\ \langle 2|v\rangle \end{pmatrix}$

$|v\rangle^* = \langle v| = (v_1^* \; v_2^*)$

Givet detta, bilda $\underbrace{|v\rangle\langle w|}_{L'} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} (w_1^* \; w_2^*) =$ ⊗

konvention: multiplicera in den högra i den vänstra

$= \begin{pmatrix} v_1 (w_1^* \; w_2^*) \\ v_2 (w_1^* \; w_2^*) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} v_1 w_1^* & v_1 w_2^* \\ v_2 w_1^* & v_2 w_2^* \end{pmatrix}$

Matriselement av operatorer

$$\langle \alpha | L | \alpha' \rangle = \underbrace{\langle \alpha | v \rangle}_{v_\alpha} \underbrace{\langle w | \alpha' \rangle}_{w_{\alpha'}^*} = v_\alpha w_{\alpha'}^* \qquad \alpha, \alpha' = 1, 2$$

basistillstånd

$L = |v\rangle\langle w|$
$= L_{vw}$

Resolution of identity

$$|v\rangle = \sum_\alpha \langle \alpha | v \rangle |\alpha\rangle = \underbrace{\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|}_{=1} v\rangle$$

OK om $\{|\alpha\rangle\}$ är "fullständig";
t ex en ON-bas.

Analogt: för kont. fallet (icke-uppräkneligt antal baselement)

$$|f\rangle = \int dx \underbrace{f(x)}_{\langle x|f\rangle} |x\rangle = \underbrace{\int dx\, |x\rangle\langle x|}_{=1} f\rangle$$

Mkt användbart - ersätt ett er m. dessa uttryck.

Tillbaka till Greensfunktioner.

$$L_x u(x) = f(x) \quad \curvearrowright \quad L|u\rangle = |f\rangle$$

$$\langle x|L|u\rangle = \underbrace{\langle x|f\rangle}_{f(x)}$$

"vet man inte vad man ska göra, sätter man in en '1:a'"

$$\langle x|L \cdot 1|u\rangle = f(x)$$

$$\langle x|L \int dy\, |y\rangle\langle y|u\rangle =$$

$$= \int dy \underbrace{\langle x|L|y\rangle}_{L_x \delta(x-y)} \underbrace{\langle y|u\rangle}_{u(y)} =$$

$L_x \delta(x-y)$ om L är en s.k. lokal operator

blir bara ngt om $y = x$

$$= \int dy\, L_x \overbrace{\delta(x-y)} u(y) =$$

$$= \underline{L_x u(x)}$$

Antag att L har en invers,

$G = L^{-1}$.

$G L |u\rangle = \underline{|u\rangle = G|f\rangle}$

$\Rightarrow \langle x|u\rangle = \langle x|G|f\rangle$

kan inte anta att G lokal nu.

$\underbrace{\langle x|u\rangle}_{u(x)} = \langle x|G \cdot 1|f\rangle = \int dy \underbrace{\langle x|G|y\rangle}_{G(x,y)} \underbrace{\langle y|f\rangle}_{f(y)}$

$\Rightarrow \underline{\int dy \; G(x,y) \; f(y) = u(x)} \quad (*)$

Hur hitta $G(x,y)$?

Undersök $\langle x|\underbrace{LG}_{=1}|y\rangle$ (matriselement)

$\langle x| L \cdot 1 \cdot G|y\rangle = \langle x|y\rangle$

$\int dx' \underbrace{\langle x|L|x'\rangle}_{L_x \delta(x-x')} \underbrace{\langle x'|G|y\rangle}_{G(x',y)} = \langle x|y\rangle$

$\int dx' \; L_x \; \delta(x-x') \; G(x',y) = \underbrace{\langle x|y\rangle}_{\delta(x-y)}$

$\langle x|L|y\rangle = L_x \delta(x-y)$ om lokal operator

$\Rightarrow \boxed{L_x \; G(x,y) = \delta(x-y)}$ Def. av GF

där $G(x,y)$ är <u>Greensfunktion</u> för L_x.

Dvs, $G(x,y)$ är lösningen till ekv. ovan, och lösningen till den ursprungliga diffekv. ges av $(*)$,

$u(x) = \int dy \; G(x,y) \; f(y)$.

Ex: Poissons ekvation.

$$\underset{\text{linjär diff.operator "L"}}{\nabla^2} \overset{\text{"u(x)"}}{\phi(\vec r)} = - \overset{\text{"f(x)"}}{\rho(\vec r)} = - \underset{\text{punktkälla}}{\delta(\vec r)} \qquad (1)$$

translationsinvariant

Hur hitta GF? Fouriertransformen!

$$G(\vec r, \vec r\,') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\vec k \; e^{i\vec k\cdot(\vec r - \vec r\,')} \, G(\vec k)$$

i 3 dim.

jmf $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \, e^{i\omega t} F(\omega)$

translations-invarians $\rightarrow$ $\underbrace{G(\vec r, \vec r\,')}_{=G(\vec r - \vec r\,')}$

Fouriers integral

$$\delta(\vec r - \vec r\,') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\vec k \; e^{i\vec k\cdot(\vec r - \vec r\,')} \cdot 1 \qquad (2)$$

insättning

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow -k^2 \, G(\vec k) = -1$$

$$\Rightarrow \underbrace{G(\vec k) = 1/k^2}_{\text{Fouriertransformen}}$$

$$\Rightarrow G(\vec r - \vec r\,') = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\vec k \, \frac{e^{i\vec k\cdot(\vec r - \vec r\,')}}{k^2}}_{\text{inverstransformen}} = - \frac{1}{4\pi|\vec r - \vec r\,'|}$$

Vet att $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$
$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial(\vec r - \vec r\,')^2}}_{\nabla^2} G(\vec r - \vec r\,') = \delta(\vec r - \vec r\,')$

Ur (*) följer

$$\phi(\vec r) = \int d\vec r\,' \, G(\vec r - \vec r\,')\left(-\rho(\vec r\,')\right) =$$

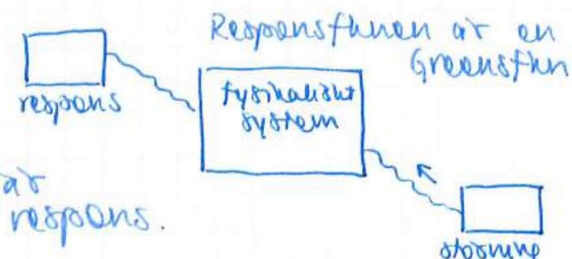
$$= \int d\vec r\,' \, \frac{1}{4\pi|\vec r - \vec r\,'|} \, \rho(\vec r\,')$$

jmf $u(x) = \int dy \, G(x,y) \, f(y)$

respons givet störningen, "output", det man mäter, syns i pkten $\vec r$

GF beskriver hur systemet reagerar på störning. Responsfunktion

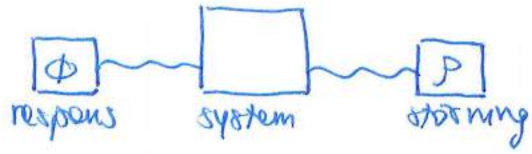
källterm, kan ses som störning, "input" tillförs i pkten $\vec r\,'$



Responsfkn är en Greensfkn

Linjär respons.

Allmän! Förutsatt att störningen är "liten" så att icke-linjära termer kan försummas.



6/11-15
LV1
F2

$$X_i(\vec r,t) = \int d\vec r'\, dt'\ \underbrace{G_{ij}(\vec r,t;\vec r',t')}_{\chi_{ij}(\vec r,t;\vec r',t')}\ F_j(\vec r',t') + \cancel{O(F_j^{\,2})}$$

Linjär responsteori.

summakonvention

	X_i	χ_{ij}	F_j
termodynamik	M_i	χ_{ij}	B_j
	U	C	T
	V	$\mathcal{H}$	P
transport	I_i	g_{ij}	V_j
	I_T (ström)	g_T (konduktans)	ΔT (tempgradient)
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

<u>Beräkning av Greensfkn via Fouriertransform</u>

<u>Ex</u>: driven harmonisk oscillator (1D)

$$\ddot x(t) + \omega_0^{\,2} x(t) = F(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot G(t,t') + \omega_0^{\,2} G(t,t') = \delta(t-t')$$

vill åtgärda att G beror på 2 variabler

Translationsinvarians i tiden: $t - t' \to t$

$$\ddot G(t) + \omega_0^{\,2} G(t) = \delta(t)$$

$$\begin{cases} G(t) = \cancel{\frac{1}{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde G(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}\, d\nu \\ \delta(t) = \cancel{\frac{1}{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{2\pi i \nu t}\, d\nu \end{cases}$$

anv. konvention med $\frac{1}{2\pi}$ här $\Rightarrow$ ingen faktor för inverstransformen.

med 2π i exponenten ska denna sida vara med här

$$(2\pi i \nu)^2 \; \tilde{G}(\nu) + \omega_0^2 \; \tilde{G}(\nu) = 1$$

Ur detta följer (efter Fouriertransform, utnyttjar $\hat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$)

$$\tilde{G}(\nu) = \frac{1}{\omega_0^2 - 4\pi^2 \nu^2}$$

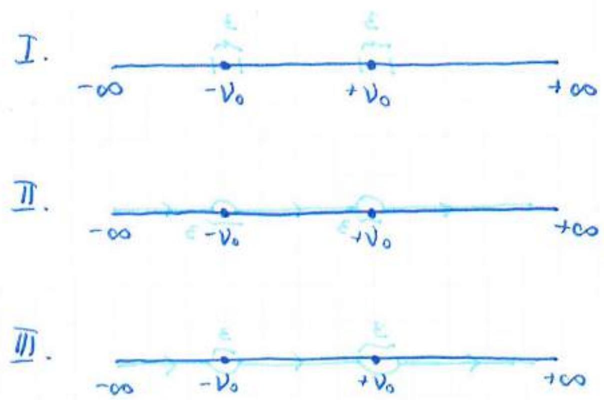
$$\Rightarrow \; G(t) = \cancel{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - 4\pi^2 \nu^2} \, e^{2\pi i \nu t} \, d\nu$$

mot 2π i exponenten

Integranden har poler vid $\nu = \pm \nu_0 = \pm \omega_0 / 2\pi$

Problem! Hur definiera integralen som definierar $G(t)$?

Tre sätt: $(\varepsilon \to 0)$



får då principalvärdet

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{II} + \mathrm{III})$$

– medelvärdet av de två andra sätten

$\mathrm{Re}\, z = x$

($\mathrm{Im}\, z = y$ på en y-axel)

får olika värden från de olika sätten. Vilken definition är den "rätta"?

Residykalkyl – repetition

Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

f analytisk på & innanför C (som innesluter z_0)

Laurentserie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} \, d\varsigma$$

f analytisk på en ring $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$

Analogi till Cauchys integralformel

- Cauchy-Riemann: villkor för analyticitet

$$f = u + iv \quad , \quad z = x + iy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

derivera m.a.p. x och y, summera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

dvs u, v uppfyller Laplaceekv.

Singulariteter

- "borttagbara" ex $f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1}$ — trivialt, $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z}$ — Laurentserieutveckla.

- essentiella ex $f(z) = e^{1/z}$

  - oändligt många Laurenttermer med $n < 0$

- pol av ordning m

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

Res(f(z₀))

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m \cdot f(z) \right) = Res(f(z_0))$$

Ex: essentiell singularitet

$$f(z) = e^{1/z} = a \quad \text{— godtyckligt}$$

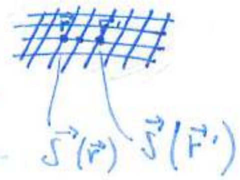
$$z = \frac{1}{\ln a + 2\pi i n} \Rightarrow e^{1/z} = e^{\ln a} \cdot \underbrace{e^{2\pi i n}}_{1} = e^{\ln a} = a$$

välj nu b istf för a

$$z' = \frac{1}{\ln b + 2\pi i n}$$

$\Rightarrow$ när $z \to 0$, dvs $n \to \infty$ så är $z \approx z'$ kan alltså komma valdigt nära vilket godtyckligt tal som helst då $z \to 0$.

Kosterlitz – Thouless fasövergång



$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(\vec{r}') \rangle \sim \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|/\xi}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{a}}$$

korrelationsfkn. Visar hur spinnet i $\vec{r}$ påverkas av en störning i $\vec{r}'$

ξ korrelationslängd

$\xi \sim e^{\text{const}/(T-T_c)^{1/2}}$

i fallet KT-fasövergång.

T_c kritisk temp. där fasövergången sker

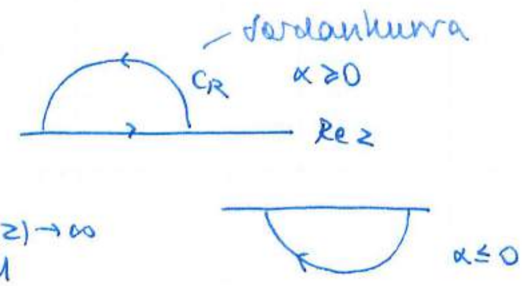
Residyteoremet

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\,/\,f(z_k))$$

C enkel, positivt orienterad kurva som innesluter de singulära punkterna $z_1, \dots, z_m$ till f.

Jordans lemma

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\,dz = 0$$



villkor: • $f \to 0$ likformigt snabbare än $1/|z|$ då $|z| \to \infty$
• α ~~[illegible]~~ reellt tal

Typfall

integraler av...

I. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ ... rationella funktioner

II. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos \alpha x\,dx$ eller $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin \alpha x\,dx$

... produkter av rat. & trig. funktioner

III. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$

... trig. funktioner på enhetscirkeln.

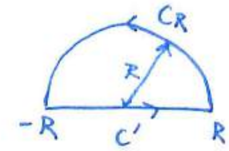
I. Rationella fkner

Ex: $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \{\text{jämn integrand}\} =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz$$



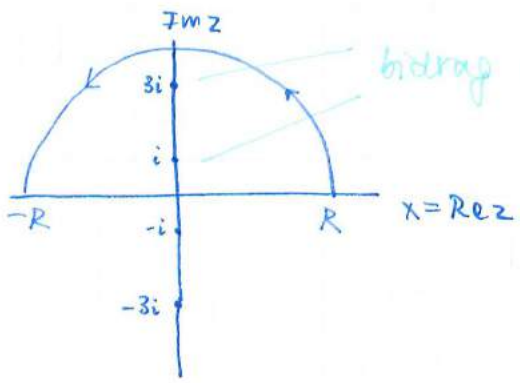
$\Gamma = C' + C_R$

Funkar verkligen Jordan? OK. kolla potenser, jmf m. $1/z$

annan, "ordentlig" kontroll

$$|f(\underbrace{Re^{i\theta}}_{z})| = \left|\frac{R^2e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+9)}\right| \underbrace{|Re^{i\theta}|}_{\text{belopp } z} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

går alltså snabbare mot 0 än vad $1/|z|$ gör... Krav för Jordan.
Test genom att kolla att $|z||f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$
∞ 0
snabbare



bidrag enl. residyteoremet.

$$I = \{\text{residyteoremet}\} = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f(i)) + \overbrace{\mathrm{Res}(f(3i))}^{3/16i}\right]$$

$$\mathrm{Res}(f(i)) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) =$$

$$= \lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\frac{z^2}{\cancel{(z-i)}(z-3i)(z+i)(z+3i)} = -\frac{1}{16i}$$

II. Produkter av rat. o trig. fkner

Ex: $\cos ax = \mathrm{Re}(e^{iax})$

(använd) $\sin ax = \mathrm{Im}(e^{iax})$

III. Trig. fkner på enhetscirkeln

använd
$$\begin{cases} z = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta} \\ \cos\theta = \left(z + \frac{1}{z}\right)/2, \quad \sin\theta = \left(z - \frac{1}{z}\right)/2i \\ d\theta = \frac{dz}{iz} \end{cases}$$

Ex: $I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a > 1$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz/iz}{(a+(z^2+1)/2z)^2} =$$

$$= -2i \oint_C \frac{z\,dz}{(z^2+2az+1)^2}$$

Poler i $\underbrace{z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}}_{\substack{\text{OBS} \\ \text{ordning } m=2}}$ och $\cancel{z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}}$ utanför C, enhetscirkeln.

$$\Rightarrow I = -2i(2\pi i) \cdot \mathrm{Res}[f(z_1)]$$

Använd
$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z_0)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m \cdot f(z)\right]}$$
med $m=2$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$$

I fysiken ofta mkt jobbigare integraler – men kan fortfarande lösas m. residykalkyl.

- Välj en smart kurva
- Använd s.k. grensnitt.

2 metoder

Residykalkyl forts: "smarta" kurvor

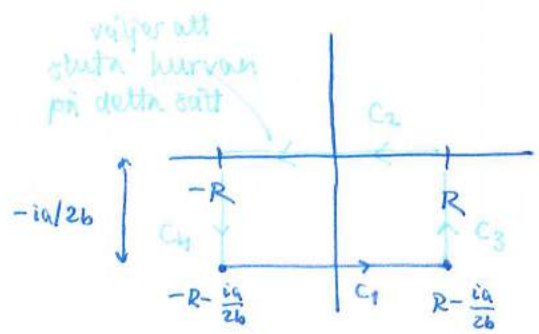
Ex: "klassiker" – gaussisk integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}\,dx \quad , b>0,\ a,b \in \mathbb{R}$$

$$= \{\text{kvadratkomplettera}\} =$$

variabelsubstitution

$$= e^{-a^2/4b} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-b(\underbrace{x-ia/2b}_{z})^2}\,dx = e^{-a^2/4b} \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{-R-\frac{ia}{2b}}^{R-\frac{ia}{2b}} e^{-bz^2}\,dz}_{I_R}$$



Residykalkyl:

konstruera en sluten kurva med urspr. integrationsintervallet som delkurva

"$\Gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$"

Inga poler inneslutna så (innanför $\Gamma = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$)

$$I_R + \int_{C_3} \dots + \int_{C_2} \dots + \int_{C_4} \dots = 0$$

Tittar på C_3-integralen

$$\int_{C_3} e^{-bz^2}\,dz = \{\text{parametrisera}\} = \int_{-a/2b}^{0} e^{-b(\overbrace{R+iy}^{z})^2}\, i\,dy =$$

$$= \underbrace{i e^{-bR^2}}_{\text{avtar exponentiellt}} \int_{-a/2b}^{0} \underbrace{e^{by^2-2ibRy}}_{\text{oscillerar}}\,dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

så går mot noll.

Samma sak gäller C_4-integralen.

Vi får då för $I_R \to I$

$$I_R = -\int_{C_2} \dots = -\int_{R}^{-R} e^{-bx^2}\,dx = \int_{-R}^{R} e^{-bx^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = e^{-a^2/4b} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}\,dx}_{\text{känd integral } = \sqrt{\frac{\pi}{b}}} =$$

$$= e^{-a^2/4b} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Ex 2: $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

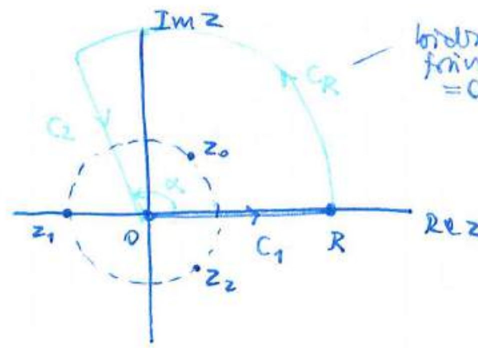
vill oftast symmetrisera integr.-intervallet för residykalkyl. Detta kräver dock att integranden är jämn.

för att anv. Jordans lemma

Nu har vi en udda integrand → kan ej symmetrisera integrationsintervallet.

Skriver om

$$I = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{x^3+1}\,dx}_{I_R}$$



bidraget från denna $= 0$ då $R \to \infty$

Komplexifiera: $\dfrac{1}{x^3+1} \longrightarrow \dfrac{1}{z^3+1}$

Poler i $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$, $n = 0, 1, 2$ på enhetscirkeln

Vad är det smarta valet av α?

Totala integralen blir

rättast att välja α för att bara ha polen innesluten.

$$I_R + \underbrace{\int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1}}_{\to 0 \text{ då } R\to\infty} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \sum \mathrm{Res} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f(z_0)\right]$$

$$\Rightarrow I_R = -\int_{C_2} \frac{dz}{z^3+1} + 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1}\Big|_{z=z_0}\right]$$

Parametrisera $C_2 : z = re^{i\alpha}$

en partikel = en pol i en Greensfunktion

$$\Rightarrow \int_{C_2} \frac{dz}{z^3+1} = \{ z = re^{i\alpha},\ dz = e^{i\alpha}\, dr \} =$$

$$= \int_R^0 \frac{e^{i\alpha}}{(re^{i\alpha})^3+1}\, dr =$$

$$= -\int_0^R \frac{e^{i\alpha}}{r^3 e^{3i\alpha}+1}\, dr = -e^{i\alpha} \overbrace{\int_0^R \frac{1}{r^3 e^{3i\alpha}+1}\, dr}$$

– hur välja α?

Välj $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Får integralen vi började med! Sätt över på samma sida...

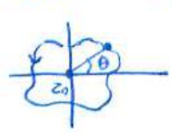
$$\Rightarrow \left(1 - e^{i2\pi/3}\right) I = 2\pi i \ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1}\bigg|_{z=z_0} \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Integrering längs grensnitt "branch cuts"

Komplex analys: flervärda fkner, begreppet

Ex ① $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$



$\theta,\ \theta + 2\pi$ men fknen har inte samma värde.

② $\ln z = \ln r + \underbrace{i\theta + i(2n\pi)}_{\arg z}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ z_0 grenpunkt här också.

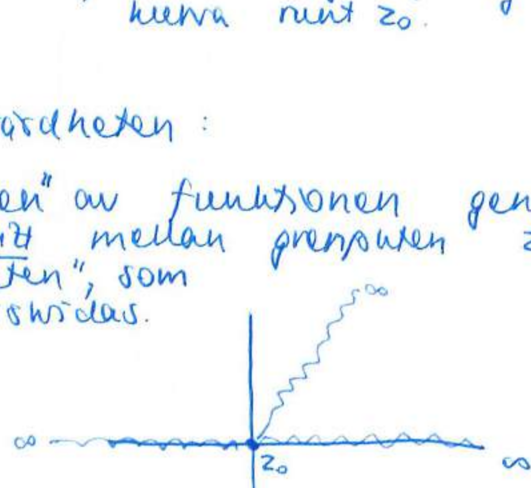
Def.: Grenpunkt z_0

$f(z) = f(r, \theta) \neq f(r, \theta + 2\pi)$ för en godtycklig sluten kurva runt z_0.

För att undvika flervärdheten:

definiera en "gren" av funktionen genom att lägga ett grensnitt mellan grenpunkten z_0 och "punkten i oändligheten", som inte får överskridas.

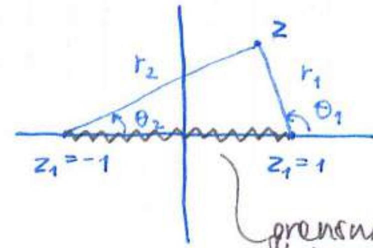
kan alltså dra grensnittet mer eller mindre godtyckligt



I fallet då man har flera grenpunkter för en funktion så kan man välja att lägga snittet mellan grenpunkterna.

Ex: $f(z) = \sqrt{z^2-1} = \sqrt{(z+1)(z-1)} =$

$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$



grensnittet läggs här.

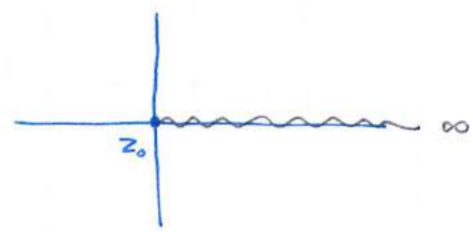
Skulle kunna dra ett från varje grenpunkt också.

Ex: $f(z) = \ln z$

$f_1(z) = \ln r + i\theta \quad , \; 0<\theta<2\pi$

$f_2(z) = \ln r + i\theta \quad , \; 2\pi<\theta<4\pi$

$\vdots$

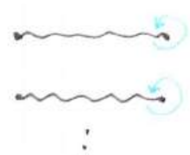


Men- diskontinuitet vid grensnittet.

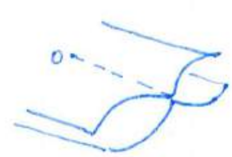
Lösning: sekvens av enkelvärda komplexa fkner definierade i "uppskurna" komplexa talplanet

$\Downarrow$

en enkelvärd komplex fkn definierad på en Riemannyta (= Riemannblad ihopknutna längs grensnitt)



undre läppen ovanför sätts ihop m. övre läppen nedanför, osv.



två "deformerade" komplexa talplan (kopior) som sätts ihop längs grensnittet

---

Vi kan utnyttja grensnitt till att göra residykalkyl.

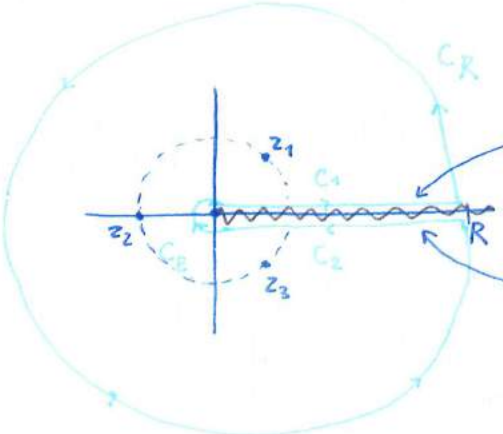
Ex $\quad I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ (igen!) — denna är dock inte flervärd.

Trick: inför hjälpintegral

$$I' = \oint_\Gamma \frac{\ln z}{z^3+1}\, dz$$

, ln z har grenpunkt i origo.

vanlig hjälpintegral, fast sätta in logaritm i täljaren.



Längs övre läppen är $\ln z = \ln r + i\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \ln r$ — är en liten vinkel upp.

Längs undre läppen är $\ln z = \ln r + 2\pi i - i\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \ln r + 2\pi i$ — inte gått hela varvet runt.

$$I' = \int_{C_1} \cancel{\frac{\ln r}{1+r^3}}\, dr + \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z^3}\, dz \to 0 + \int_{C_2 = -C_1} \frac{\cancel{\ln r} + 2\pi i}{1+r^3}\, dr + \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{1+z^3}\, dz$$

$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Res}\left[\frac{\ln z}{z^3+1} \bigg|_{z=z_i} \right]$$

ε vinkel/radie? Var noga.

Parametrisera C_ε-integralen

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{1+z^3}\, dz = \int_{2\pi}^{0} \frac{\ln \varepsilon + i\theta}{1+(\varepsilon e^{i\theta})^3}\, i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Allt som är kvar är

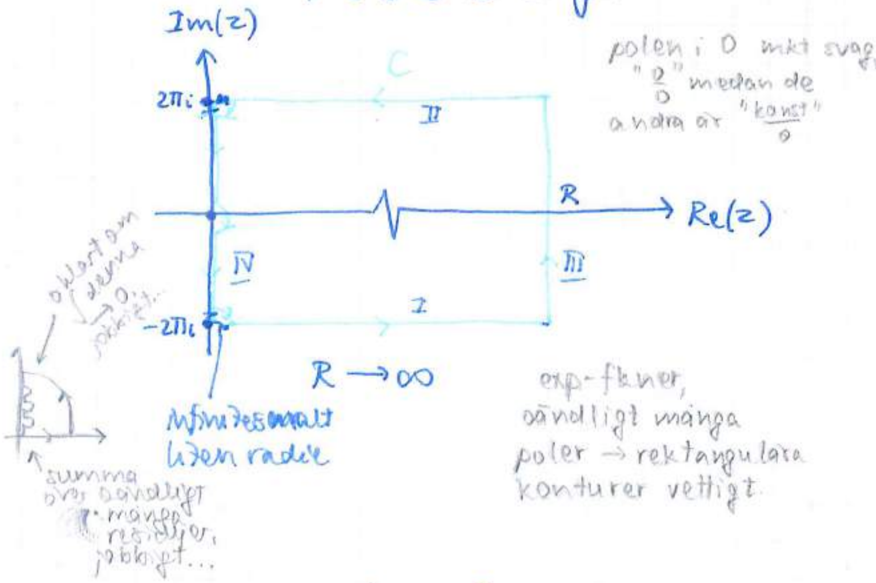
$$-2\pi i \underbrace{\int_0^R \frac{1}{1+r^3}\, dr}_{\text{den integral vi ville integrera från början!}} = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[\ ]$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum \mathrm{Res}[\ ] = \ldots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

edblomc@chalmers.se
07108A

11/11-15
(LV2)
R1

Räkneövning



$$I = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

Mandel. Jobbig.

– Titta istället på

$$I_C = \oint_C \frac{z^4}{e^z - 1}\,dz = 0$$

Inga poler inne i konturen

$$\Rightarrow \; 0 = \underbrace{\int_{I} + \int_{II}}_{\text{dessa har åtminstone rätt integr. intervall (samma som I-integr. urspr.)}} + \int_{III} + \int_{IV}$$

I, II : $z = x \pm 2\pi i$, $dz = dx$

$$z^4 = (x \pm 2\pi i)^4 = x^4 \pm 4x^3 \cdot 2\pi i - 6x^2 \cdot 4\pi^2 \mp 4x \cdot 8\pi^3 i + 16\pi^4$$

$$\int_{I+II} \frac{z^4}{e^z - 1}\,dz = \int_0^\infty \left[\frac{(x-2\pi i)^4}{e^{x-2\pi i} - 1} - \frac{(x+2\pi i)^4}{e^{x+2\pi i} - 1} \right] dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{-16\pi i x^3 + 64\pi^3 i x}{e^x - 1}\,dx =$$

$$= -16\pi i\, I + 64\pi^3 i\, I'$$

där

$$I' = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\,dx$$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

– den vi vill räkna ut ursprungligen.

I': titta på $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{e^z-1}\,dz = 0$

återigen en potens högre i z, över samma kontur.

$$\int_{I+II} \frac{z^2}{e^z-1}\,dz = \int_0^\infty \frac{(x-2\pi i)^2-(x+2\pi i)^2}{e^x-1}\,dx = -8\pi i I'$$

pss som innan.

III: $z = R+iy$, $dz = i\,dy$

$$\int_{III} \frac{z^2}{e^z-1}\,dz = i\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{(R+iy)^2}{e^{R+iy}-1}\,dy \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$R^2 \ll e^{R}$ mkt snabbare.

IV: delas upp i principalvärdesintegral samt integr. för att kompensera för att vi går runt polerna.
$z = iy$ $dz = i\,dy$

$$\int_{IV} \frac{z^2}{e^z-1}\,dz = \underbrace{i ⨍_{2\pi}^{-2\pi} \frac{(iy)^2}{e^{iy}-1}\,dy}_{\text{principal-värdesintegral}} + \int_{\text{runt poler}}$$

$$⨍_{2\pi}^{-2\pi} = \lim_{\delta\to0}\left[\int_{-\delta}^{-2\pi} + \int_{+2\pi}^{\delta}\right]$$

$$⨍ = i\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{y^2 e^{-\frac{iy}{2}}}{e^{\frac{iy}{2}}-e^{-\frac{iy}{2}}}\,dy =$$

jämn, udda

$$= i\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{y^2\left(\cos\frac{y}{2} - i\sin\frac{y}{2}\right)}{2i\sin\frac{y}{2}}\,dy =$$

$$= 0 - i\,\cancel{2}\int_0^{2\pi} \frac{y^2\sin\frac{y}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{y}{2}}\,dy = -i\frac{(2\pi)^3}{3} = -\frac{8\pi^3 i}{3}$$

jämn·jämn·udda över jämnt intervall

jämn·udda·udda över jämnt intervall

Har alltså

$$0 = -8\pi i I' - \frac{8\pi^3 i}{3} + \int_{\text{runt poler}}$$

där $\displaystyle\int_{\text{runt poler}} = \pm i \cdot \text{täckt vinkel} \cdot \text{residy i punkten}$

Laurentserie Arfken (11.75)

moturs är positivt

$\pi/2$ ex: tänk "en fjärdedels residy"

Allmänt har vi att

$$\mathrm{Res}(f(c)) = \lim_{z\to c} (z-c) f(z)$$

för enkelpoler.

Poler i $z = 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1$ fler säkert men för konturen är bara dessa relevanta.

$$(z-2\pi n i)\frac{z^2}{e^z-1} = \cancel{(z-2\pi n i)} \frac{z^2}{\cancel{e^{2\pi n i}} + \cancel{(z-2\pi n i)}\underbrace{e^{2\pi n i}}_{=1} - \cancel{1}} = z^2$$

Taylorutv. kring $2\pi n i$

$$\xrightarrow[z\to 2\pi n i]{} -4\pi^2 n^2$$

$$\Rightarrow I' = \frac{1}{8\pi i}\left(-\frac{8\pi^3 i}{3} - i\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(-4\pi^2\right)\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

± 1 ger samma sak ty i kvadrat

får ingen term för $n=0$ ty $-4\pi^2 n^2$. Hade då haft vinkel π.

Vi har nu kommit fram till att

$$(*)\quad 0 = \oint_C \frac{z^4}{e^z-1}\,dz \Rightarrow 16\pi i I = 64\pi^3 i\cdot\underbrace{\frac{\pi^2}{6}}_{I'} + \int_{III} + \int_{IV} + \int_{\text{runt poler}}$$

$$\int_{III}\frac{z^4}{e^z-1}\,dz = \int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{(R+iy)^4}{e^{R+iy}-1}\, i\,dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{2\pi}^{-2\pi}\frac{(iy)^4}{e^{iy}-1}\, i\,dy = -i\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{y^4\left(\cos\frac{y}{2} - i\sin\frac{y}{2}\right)}{2\cancel{i}\sin\frac{y}{2}} = i\int_0^{2\pi} y^4\,dy = \frac{32\pi^5 i}{5}$$

förlänger m. $e^{-iy/2}$

udda/jämna termer

$$\mathrm{Res}\left(\left.\frac{z^4}{e^z-1}\right|_{2\pi n i}\right) = \lim_{z\to 2\pi n i}\frac{(z-2\pi n i)z^4}{e^z-1} = \lim_{z\to 2\pi n i} z^4 = 16\pi^4 n^4$$

$$\int_{\text{runt pole}} = -i\left(\pi\cdot 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 16\pi^4\right) = -i\,16\pi^5$$

konturriktn.

Insättning i $(*)$ ger

$$I = \frac{1}{16\pi \cancel{i}}\left(\frac{64\pi^3\cancel{i}\cdot\pi^2}{6} + 0 + \cancel{i}\,\frac{32\pi^5}{5} - \cancel{i}\,16\pi^5\right) = \frac{\pi^4}{15}$$

rimligt att i kancelleras ty gör reell integral.

13/11-15
(LV2)
F4

Integrering längs grensnitt forts.

Ex 2: $$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$ Ml. uppg. 2b)

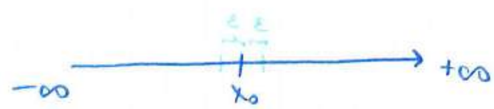
har båda grenpunkter & poler. Red ut!

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx$$

jfr beräkning av typiska Greensfunktioner.

Kan definieras via sitt Cauchys principalvärde:

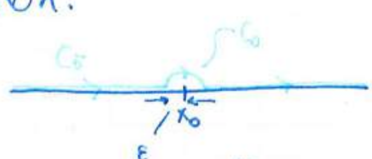
$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx\right]$$



"hoppar in", integrerar runt, låter $\varepsilon \to 0$.

Beräkning av principalvärde

Komplexifiera.



ε är radien på den lilla halvcirkeln.

$$\int_{C_{\bar{0}}} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx + \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz\right]$$

där

$$\int_{C_0} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz \overset{\text{pol. koord.}}{=} \int_{\pi}^{0} \frac{f(\varepsilon e^{i\theta} + x_0)}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta \longrightarrow -i\pi f(x)$$

så

$$\int_{C_{\bar{0}}} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx - i\pi f(x_0). \qquad (1)$$

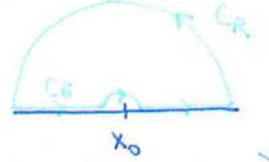
Analogt: definiera

ritar linjen lite under, men den går längs/på mörkblå linjen.

då följer på samma sätt

$$\int_{C_u} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx + i\pi f(x_0) \qquad (2).$$

Antag att Jordans lemma är uppfyllt i ~~övre~~ undre halv-planet.



$$\int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz + \underbrace{\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz}_{} = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\left[\frac{f(z_j)}{z_j - x_0}\right] \qquad (3)$$

Jordans lemma uppfyllt ⟺ bidraget från denna termen är 0.

(1) & (3) ger
(2) & (3)

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \pm i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}[\ ].$$

<u>Feynmans trick</u>

tankesätt: lägger linje ε över tallinjen, & definierar denna som en ny reell axel.

"puttar ner" polen

$$(4) \qquad \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz = \{z = x + i\varepsilon\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+i\varepsilon)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx$$

f kontinuerlig så kan låta $\varepsilon \to 0$ där. Behåller dock ε i nämnaren, där den faktiskt "fyller en fkn" till skillnad från täljaren.

(1) o (4) ger

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0+i\varepsilon}\,dx. \qquad (5)$$

Samma slags konstruktion med användning av C_u:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = -i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0-i\varepsilon}\,dx \qquad (6)$$

knuffat upp polen ovanför reallinjen ist.

(5) o (6) kan sammanfattas i "masterformeln"

$$\boxed{\frac{1}{x-x_0 \pm i\varepsilon} = P\,\frac{1}{x-x_0} \mp i\pi\,\delta(x-x_0).}$$

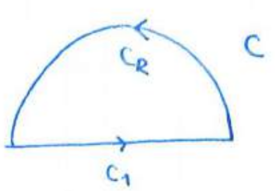
kompakt skrivsätt. Integreras denna upp fås (5) resp. (6).

Vi kan använda dessa resultat till att härleda Kramers-Kronig-relationen ("Hilberttransform").

Kramers-Kronig-relationen

Introducera en funktion $F(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$, F analytisk i övre halvplanet.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} F(z) & \text{om } \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{dvs } z \text{ i ÖHP} \\ 0 & \text{annars} \quad \text{dvs } z \text{ i UHP} \end{cases}$$



Välj nu $z = x + i\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\xi)}{\xi - z}\,dz = F(x) \qquad (1)'$$

Men vi har också från masterformeln (alias (5) o (6))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi-(x+i\varepsilon)}\,d\xi = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,dx + i\pi F(x) \qquad (2)'$$

Antag Jordan uppfyllt.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x - i\varepsilon}\, d\xi = \oint_{C} \frac{F(\xi)}{\xi - x - i\varepsilon}\, d\xi \qquad (3)'$$

(1)', (2)', (3)' ger

$$2\pi i\, F(x) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\, d\xi + i\pi F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\cancel{2}\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\, d\xi .$$

samband real/imaginärdel $F(x) \Leftrightarrow F(\xi)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}[F(x)] &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[F(\xi)]}{\xi - x}\, d\xi \\ \mathrm{Im}[F(x)] &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[F(\xi)]}{\xi - x}\, d\xi \end{aligned}}$$

Kramers-Kronig-relationerna

Dessa kan användas bl a till att generellt bevisa fluktuations-dissipationsteoremet.

Fluktuations-dissipationsteoremet

Ex: Brownsk rörelse (Einstein 1905)

fluktuerande partiklar

vätska fylld m. pollen

Samma krafter som ger upphov till fluktuationerna ger dissipation när systemet drivs ur jämvikt.

$$D = \mu k_B T$$

Ex 2: Johnson-Nyquist (1928)

$$I(\omega) = -\frac{2}{1 - e^{-\beta\omega}}\, \omega \sigma$$

strömbrus (fluktuation)

konduktivitet (dissipation)

Allmänt bevis via Kramers-Kronig: Callen-Welton 1951.

Tillbaka till

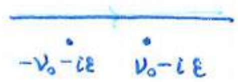
Greensfunktioner

– speciellt exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn.

Kom ihåg: $$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - 4\pi^2\nu^2} e^{2\pi i \nu t} \, d\nu$$

poler vid $\nu = \pm \nu_0 = \pm \omega_0 / 2\pi$

Tre möjliga definitioner

I:  =  – knuffar ner polerna

II:  =  – knuffar upp polerna

III: $P\int \ldots = \frac{1}{2}(I + II)$

Låt oss testa I.

retarderad GF

$[t>0]$ $$G(t) \xrightarrow{\pm\nu_0 \to \pm\nu_0 + i\varepsilon} G^{(r)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{2\pi i \nu t}}{[\nu + (\nu_0 - i\varepsilon)][\nu - (\nu_0 + i\varepsilon)]} \, d\nu \right) =$$

(får inget bidrag från ret. GF för $t<0$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{4\pi^2} 2\pi i \left[\mathrm{Res}[\ ]_{\nu_0 + i\varepsilon} + \mathrm{Res}[\ ]_{-\nu_0 + i\varepsilon} \right] \right)$$

Cauchy + Jordan

$$= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \, \theta(t)$$

$t>0$

Samma räkning för II.

avancerad GF

$[t<0]$ $$G(t) \xrightarrow{\pm\nu_0 \to \pm\nu_0 - i\varepsilon} G^{(a)}(t) = -\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \, \theta(-t)$$

(~~för att uppfylla Jordan~~

se ovan o t.h. →

$G^{(r)}(t)$: residykalkyl mha Jordan ger $=0$ då $t<0$ & ändligt bidrag då $t>0$.

$G^{(a)}(t)$: vice versa.

Vilken ska vi välja – I eller II?

Driven harmonisk oscillator:

$$x(t) = \int_0^\infty G(t-s)\,F(s)\,ds$$

respons

drivtermen

randvillkor $F(t) = 0, \quad t < 0$

(begynnelse-)

Välja G som avancerad, retarderad eller principal?

Test av $G^{(a)}$:

$$x(t) = \int_0^\infty G^{(a)}(t-s)\,F(s)\,ds =$$

"skär av" integrationen till t

$$= -\frac{1}{\omega_0}\int_0^\infty \sin\omega_0(t-s)\;\theta(s-t)\;F(s)\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\omega_0}\int_t^\infty \sin\omega_0(t-s)\,F(s)\,ds$$

"det som händer vid tiden t beror på det som händer efter tiden t"

icke-kausal!

Fungerar ej $\longrightarrow$ använd istället $G^{(r)}(t)$.

Finns fall då man ist. bör använda avancerade GF – t ex antipartiklar, som rörs gå bakåt i tiden.

18/11-15

LV3

F5

Kausalitet implicerar att vi ska välja retarderade Greensfunktioner.

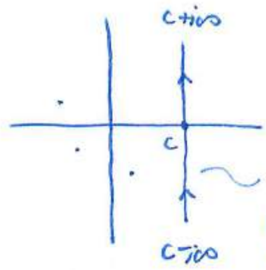
"$i\varepsilon$ - prescription"

$t > 0$

knuffar upp polerna i ÖHP.

Kan ta fram Greensfkner med andra metoder, t ex via Laplacetransform.

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty G(t)\, e^{-pt}\, dt$$



$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \tilde{G}(p)\, e^{pt}\, dp$$

Γ läggs så att man är förbi alla poler.

$\Rightarrow$ {dämpade harmoniska oscillatorns differentialekv.}

$$G(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\, \theta(t)$$

<u>Greensfkner för partiella diff. operatorer</u>

differential-operatorer

<u>Ex</u>: d'Alemberts operator

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

– vilken är GF som svarar mot denna operator?

$$-\Box\, G(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\delta(\mathbf{r})}_{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}\, \delta(t) \qquad (1)$$

"harmlöst" minus, för EM.

(antag $G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ där $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $t = t - t'$ pga translationsinvarians)

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, t)\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\, dt\, d\mathbf{r} \qquad (2)$$

fysik-konvention

Använd

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\, d\omega\, d\mathbf{k}$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} 1 \cdot e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\, d\mathbf{k}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbb{k}^2\right)\tilde{G}(\mathbb{k},\omega) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\mathbb{k},\omega) = \frac{c^2}{c^2k^2 - \omega^2}$$

$$\Rightarrow G(\mathbb{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{c^2k^2-\omega^2} e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)} \, d\mathbb{k}\, d\omega \qquad (3)$$

vi har poler i $\omega = \pm\omega_0 = \pm ck$.

Går över till sfäriska koord.

$$d\mathbb{k} = k^2 \sin\theta \, dk\, d\theta\, d\varphi = -k^2 dk\, d\varphi\, d(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow G(\mathbb{r},t) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{c^2}{c^2k^2-\omega^2} e^{i(kr\cos\theta - \omega t)} \, d\omega\, k^2\, dk\, d\varphi\, d(\cos\theta)$$

$$\underset{\substack{\text{utför}\\ \theta,\varphi\text{-integr.}}}{=} \frac{c^2\cdot 2\pi}{(2\pi)^4}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\left(\int_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c^2k^2-\omega^2}\frac{2}{kr}\sin kr \; k^2\, dk\right) e^{-i\omega t}\, d\omega =$$

{Gör först ω-integralen. Lättare, ty integrationsintervall $(-\infty,\infty)$}

$$= \frac{c^2}{4\pi^3 r}\int_0^{\infty} \sin kr \; k \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}}_{f} e^{-i\omega t}\, d\omega\right)}_{I} dk$$

i detta fall behövs $t<0$ dämpat; Jordankurva $\Rightarrow$ övre halvplanet

För att använda Jordans lemma

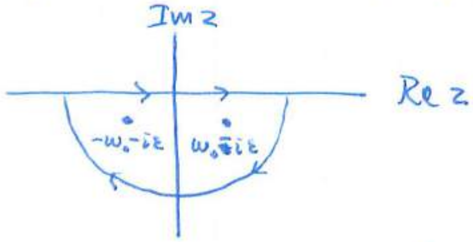
- $t<0$: slut i övre halvplanet
- $t>0$: slut i undre halvplanet

Puffa ner polerna i undre halvplanet för att få den retarderade Greensfunktionen.

för ret. GF ska man puffa upp dock. Hmm. Beror på minustecknet i $e^{-i\omega t}$! Så får göra tvärtom nu. $\Rightarrow$ anv. inte "puffa upp $\mp$ poler" som standardrecept.

$\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 - i\varepsilon$

$$G(\mathbf{r},t) \longrightarrow G^{(r)}(\mathbf{r},t)$$



$$\Rightarrow I = \lim_{\varepsilon\to 0} - 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f;\ \omega = \pm\omega_0 - i\varepsilon\right] = -\frac{i\pi}{ck}\left(e^{ickt} - e^{-ickt}\right)$$

medurs integration

$$\Rightarrow G^{(r)}(\mathbf{r},t) = \frac{c^{\cancel{2}}}{4\pi^{\cancel{3}} r}\int_0^\infty \underbrace{\sin kr}_{\frac{1}{2i}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)} \cdot \cancel{k}\cdot\left(-\frac{i\pi}{\cancel{c}\cancel{k}}\left(e^{ickt} - e^{-ickt}\right)\right) dk =$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_0^\infty \left(e^{ik(r-ct)} + e^{-ik(r-ct)} \underbrace{- e^{ik(r+ct)}}_{(**)} \underbrace{- e^{-ik(r+ct)}}_{(*)}\right) dk =$$

Använd (*): $-\int_0^\infty e^{-ik(r+ct)}\,dk = \left\{\begin{matrix} k' = -k \\ dk' = -dk\end{matrix}\right\} = \int_0^{-\infty} e^{+ik'(r+ct)}\,dk' =$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{+ik(r+ct)}\,dk$$

så denna slås samman m. (**) för $\int_{-\infty}^{\infty}$. pss för de andra två.

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)}\right) dk =$$

$= \{$Fouriers integral$\} =$

$$= \frac{c}{4\pi r}\left[\delta(r-ct) - \cancel{\delta(r+ct)}_{>0\ >0>0}\right] =$$

$$= \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r-ct)\,\underbrace{\theta(t)}_{\text{för att vi har } t>0}.$$

Randvillkor för Greensfunktioner

Ex: Poissons ekv.

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0$$

t ex

$\phi(\mathbf{r}) = 0$ på ytan.

– hur "bygga in" randvillkoret i Greensfunktionen?

Vi definierar

$$\bar{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_{\text{"singulär"}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + G_{\text{"reguljär"}}(\mathbf{r},\mathbf{r}').$$

från lösningen $\nabla^2 G_{sing}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

ska uppfylla $\nabla^2 G_{reg} = 0$

Välj $G_r(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ så att randvillkoret är uppfyllt.

Integralekvationer

Knyt an till linjär responsteori

$$X(\mathbf{r},t) \approx \int d\mathbf{r}'\,dt'\, \underbrace{G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')}_{\chi(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')} F(\mathbf{r}',t') + \cancel{O(F^2)}$$

respons

("störning")

schematiskt:

kärna

okänd funktion

$$f(x) = \int K(x,x')\,\varphi(x')\,dx'$$

antag att vi vet f
– kan vi lura ut φ?

En *integralekvation* är en ekvation där den okända funktionen uppträder innanför integraltecknet.

Fyra huvudklasser:

I. $f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$ Fredholm av första typen

II. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$ Fredholm av andra typen

konst.

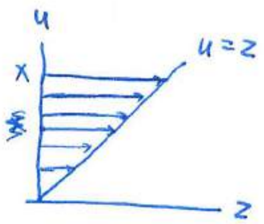
III. $f(x) = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$ Volterra av första typen

IV. $\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$ Volterra av andra typen.

Integralekvationen från diff.ekv.

Ex: $y''(x) = f(x,y)$

integrera.



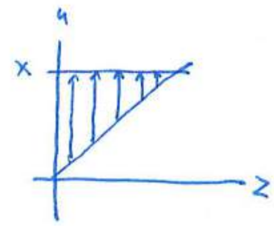
bara en variabel, inget komplext

$$y'(x) = \int_0^x dz\; f(z, y(z)) + C_1$$

integrera igen

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\; f(z, y(z)) + C_1 x + C_2.$$

Kasta om integrationsgränserna



$$y(x) = \int_0^x dz\; f(z, y(x)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$

utför u-integr.

$$= \int_0^x (x-z)\, f(z, y(z))\, dz + C_1 x + C_2$$

pga av randvillkor.

$$-C_1 x - C_2 + y(x) = \int_0^x (x-z)\, f(z, y(z))\, dz$$ — Volterra.

men i detta fall inte så bra att skriva om så här, inte nödvändigt.

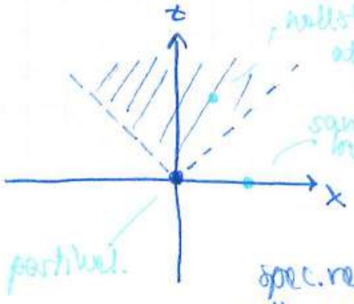
18/11-15
LV 3
R2

Räkneövning

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

var: en har 4 komponenter, 4-vektorer

3-vektor, integrerad över rummet



nollskild sann. att den transp. hit

sann. bör bli noll med en bra modell/teori.

spec.rel: grundl. att inget rör sig snabbare än ljuset.
⇒ ljuskon där den "kan" vara.

För att denna amplitud ska uppfylla speciell relativitetsteori så måste den vara noll för

$$x - y = \vec{r}$$

vanlig rumslig vektor. (3-vektor)
Förflytt. i rummet & inte i tiden (på ingen tid alls)

$$p\cdot(x-y) = -p\cdot\vec{r} = -pr\cos\theta$$

[def. av skalärprodukt; θ mellanliggande vinkel mellan p & r]

Byter till sfäriska koordinater

$$p = p(p,\theta,\varphi)$$

$$d^3p = p^2 \sin\theta \; dp \, d\theta \, d\varphi$$

(väljer z-axel utmed $\vec{r}$).

Finns inget som hindrar oss från att välja z-axeln som θ räknas från, till antingen längs p eller r ⇒ kan se detta θ som samma som θ i cos θ ovan.

$$\int \ldots = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dp \; p^2 \frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}} e^{ipr\cos\theta}$$

Obs: $d(\cos\theta) = -\sin\theta \, d\theta$, så om vi byter till variabel $s = \cos\theta$ så får vi

$$\int \ldots = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{-1} ds \int_0^{\infty} dp \; p^2 \frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}} e^{iprs} =$$

$$= N \int_1^{-1} ds \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2+m^2}} e^{iprs} =$$

$$= N \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2+m^2}} \left[\frac{e^{iprs}}{ipr}\right]_1^{-1} =$$

numerisk faktor som suger upp alla konstanter

$p' = -p$
$dp' = -dp$

$$\frac{1}{ir}\left[\int_0 \frac{p e^{-ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}} - \int_0 \frac{p e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\right] = \frac{1}{ir}\left[\int_0 - \frac{-p e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}} - \int_0 \frac{p e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\right] =$$

varbyte i 1:a integralen

$$= N \int_0^\infty dp \, \frac{p^2}{\sqrt{p^2+m^2}} \left(\frac{e^{-ipr} - e^{ipr}}{ipr} \right) =$$

$$= \frac{1}{ir}\left[-\int_{-\infty}^{0} - \frac{-p e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}} - \int_0^\infty \frac{p e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\right]$$

$$= \frac{-1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}} e^{ipr}$$

$$= -N \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \underbrace{\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}}}_{\substack{\downarrow}} e^{ipr}$$

1 då $p = Re^{i\theta}$, $R \to \infty$
så vanlig halvcirkel-jordankurva funkar inte...

Vill kunna sluta kurvan men förfaktorn går inte mot noll!

$$p e^{ipr} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial r} e^{ipr}$$

Integralen blir mha detta

$$N_2 \frac{-1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}} \frac{\partial}{\partial r} e^{ipr} =$$

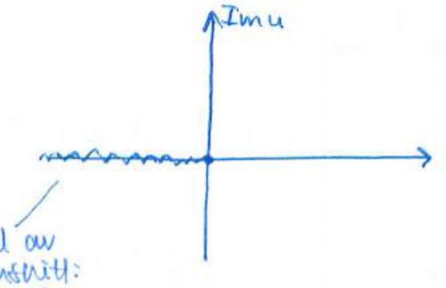
byter ordn. / flyttar ut $\frac{\partial}{\partial r}$.

$$= N_2 \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}}_{\substack{\downarrow}} e^{ipr}$$

roten def. i termer av logaritmen så flervärd...

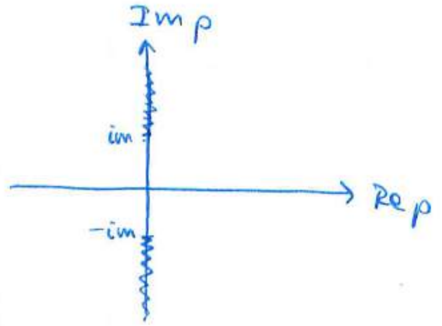
0 då $p = Re^{i\theta}$, $R \to \infty$
wie, nu funkar halvcirkelkurvan.

Kalla (p^2+m^2) för u.



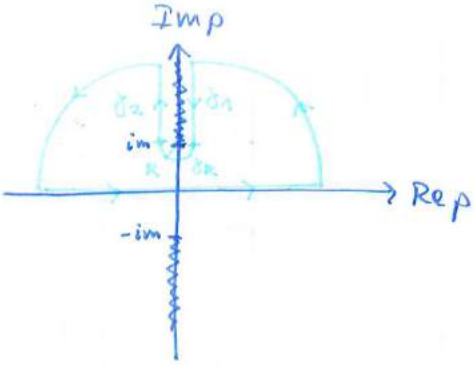
val av grenssnitt: negativa realaxeln

från u-planet till p-planet



$u = p^2 + m^2$
[tänk $re^{i\theta}$]
kvadrera: dubblar argumentet → så halva arg i p-planet
kvadrerar beloppet
addera: translatera i realdel → börjar på $\pm im$

man kan se direkt att vi har grenpkter i $\pm im$.
Kan göra grensnitten på olika sätt alltså.



Vet per Jordans lemma (förfaktorn går mot 0) att kvartscirkelbågarna ger noll i bidrag då man integrerar.

$$\gamma_B: \quad p = im + Re^{i\theta}, \quad dp = iRe^{i\theta}, \quad \theta \in [0, -\pi]$$

$$\int_{\gamma_B} \ldots = \int_0^{-\pi} d\theta \, \frac{iRe^{i\theta}}{\sqrt{(im + Re^{i\theta})^2 + m^2}} \, e^{irRe^{i\theta}}$$

Tittar på

$$\left|(im + Re^{i\theta})^2 + m^2\right| =$$

$$= \left|\cancel{-m^2} + 2imRe^{i\theta} + R^2 e^{2i\theta} \cancel{+m^2}\right| =$$

$$= R^2 \left| 2im \frac{1}{R} e^{i\theta} + e^{2i\theta}\right| \geq$$

$$\geq R^2 \left(\left| 2im \frac{1}{R} e^{i\theta}\right| - \underbrace{\left|e^{2i\theta}\right|}_{1} \right) =$$

$$= R^2 \left(\frac{2m}{R} - 1 \right)$$

så

$$\left| \int_0^{-\pi} d\theta \, \frac{iRe^{i\theta}}{\sqrt{(im + Re^{i\theta})^2 + m^2}} \, e^{irRe^{i\theta}} \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{0} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{R} - 1}} \left| e^{irRe^{i\theta}} \right|$$

där

$$\left| e^{irRe^{i\theta}} \right| = \left| e^{irR(\cos\theta + i\sin\theta)} \right| =$$

$$= e^{-rR\sin\theta}$$

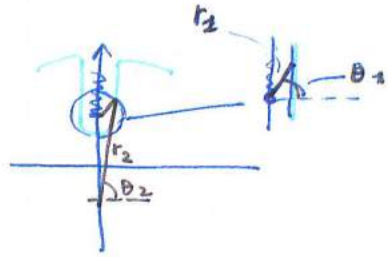
så

$$\int_{-\pi}^{0} d\theta \, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{R} - 1}}}_{\substack{\text{roten} \\ \text{växer} \to \infty \\ \text{då } R \to 0}} \, \underbrace{e^{-rR\sin\theta}}_{\substack{\text{begränsad} \\ \text{för små } R}} \xrightarrow[R \to 0]{} 0.$$

Integralen över γ_R ger alltså inget bidrag.

Vår integral är

$$N_2 \frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} dp \, \frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}} \, e^{ipr}.$$



θ_1 kmr ändra sig m. 2π
θ_2 kmr inte ändra sig
då vi går från γ_1 till γ_2.

Betrakta $\sqrt{p^2+m^2}$ utmed γ_1 och γ_2.

$$\sqrt{p^2+m^2} = e^{\frac{1}{2}\log(p^2+m^2)}$$

$$p^2+m^2 = (p+im)(p-im)$$

$$p+im = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$p-im = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{p^2+m^2} = e^{\frac{1}{2}\log(r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2})} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\log(r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)})} =$$

obs detta steget gäller inte i allmänhet för komplexa tal!! Men ok nu ty plockas ut ett reellt tal $r_1 r_2$.

$$= e^{\frac{1}{2}\left(\log(r_1 r_2) + \log(e^{i(\theta_1+\theta_2)})\right)}$$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)}$$

När vi går från högra till vänstra sidan om grensnittet:

$$\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$$

$$\theta_2 \to \theta_2$$

$$\sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \longrightarrow \sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2+2\pi)} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)}(-1)$$

Slutsats: integranden byter tecken från ena sidan till den andra. Så eftersom vi integrerar i motsatt riktning på "andra sidan" kommer bidragen från de två sidorna att <u>summera ihop</u> till

$$p = i\rho - \delta \qquad dp = i\,d\rho \qquad \rho \in [m, \infty)$$

avstånd utmed grensnittet — avst. ut från grens-snittet

$$\int_{\gamma_2} \ldots = \int_m^{\infty} \frac{i\,d\rho}{\sqrt{(i\rho-\delta)^2+m^2}}\, e^{i(i\rho-\delta)r} \xrightarrow{\delta \to 0} \underbrace{-i\int_m^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-m^2}}\, e^{-\rho r}}_{\text{vanlig reell integral, integranden strikt positiv}}$$

så hela integralen är ~~xxxx~~ nollskild.
– vi löser inte prob. vi började med, med denna modell.

20/11-15
(LV8)
F6

Integralekvationer forts.

Lösningsmetod 1: för separabla kärnor

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

Ex: $K(x,t)$ polynom, $K(x,t) = \cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$

Fredholm av andra slaget: $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \underbrace{K(x,t)}_{\text{antag separabel}} \varphi(t)\,dt$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \underbrace{\int_a^b N_j(t)\varphi(t)\,dt}_{c_j}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x)$$

Multiplicera med $N_i(x)$, integrera över $[a,b]$

$$\underbrace{\int_a^b N_i(x)\varphi(x)\,dx}_{c_i} = \underbrace{\int_a^b N_i(x) f(x)\,dx}_{b_i} + \lambda \sum_j c_j \underbrace{\int_a^b N_i(x) M_j(x)\,dx}_{a_{ij}}$$

$$\Rightarrow c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$$

komponenter av matrisen A, dvs $(A)_{ij} = a_{ij}$

$\Leftrightarrow \quad c = b + \lambda A c \qquad c, b$ vektorer

$\Rightarrow \quad (1 - \lambda A)c = b \qquad = 1 - \lambda A$ som nu... men A matris.

Betrakta fallet $b = 0$

$\Rightarrow (1 - \lambda A)c = 0 \quad \Rightarrow (\lambda^{-1} - A)c = 0$

Icke-trivial lösning om $\det(\lambda^{-1} - A) = 0$

$\Rightarrow \lambda^{-1}$ är ett egenvärde till A.

(trivial lösning då $c = 0$).

"Fredholms alternativ": Antingen har $\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$ åtminstone en icke-trivial lösning

eller

så har motsvarande inhomogena ekvation $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$ en unik lösning.

- med antagandet

$$K(x,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} M_j(x)N_j(t)$$ konvergenskrav

---

<u>Ex</u>: Tenta 20150112 - uppg. 2.

Beskriv lösningsmetod för

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin(x+t)\,\varphi(t)\,dt. \quad (*)$$

För vilka värden på λ finns lösning?

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}(\sin x\cos t+\cos x\sin t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\lambda\Big(\sin x\underbrace{\int_0^{\pi}\cos t\,\varphi(t)\,dt}_{a}+\cos x\underbrace{\int_0^{\pi}\sin t\,\varphi(t)\,dt}_{b}\Big)$$

$$\varphi(x)=\lambda a\sin x+\lambda b\cos x$$

- Sätt in i (*).

$$\lambda a\sin x+\lambda b\cos x=\lambda\int_0^{\pi}(\sin x\cos t+\cos x\sin t)(\lambda a\sin t+\lambda b\cos t)\,dt$$

{antar $\lambda\neq 0$}

$$a\sin x+b\cos x=\lambda\int_0^{\pi}\Big(a\sin x\,\tfrac{1}{2}\sin 2t+b\sin x\cos^2 t+$$
$$+a\cos x\sin^2 t+b\cos x\,\tfrac{1}{2}\sin 2t\Big)\,dt$$

$$a\sin x+b\cos x=\lambda\Big(b\frac{\pi}{2}\sin x+a\frac{\pi}{2}\cos x\Big)$$

Identifiera koefficienter.

mellansteg med den generella metoden eller som beskrevs

$a = \lambda(\lambda a \frac{\pi}{2})\frac{\pi}{2}$

$a = \lambda^2 (\frac{\pi}{2})^2 a$

$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{2}{\pi}$

Vi får att

$$\begin{cases} a = \lambda b \frac{\pi}{2} \\ b = \lambda a \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = b \text{ om } \lambda = \frac{2}{\pi} \\ a = -b \text{ om } \lambda = -\frac{2}{\pi} \end{matrix}\right\}$$

dvs det finns icke-trivial lösning för endast dessa värden på λ.

(om $\lambda = \frac{2}{\pi}$ har vi $\varphi(x) = C(\sin x + \cos x)$ och om $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ har vi $\varphi(x) = C(\sin x - \cos x)$).

Lösningsmetod 2: fungerar också då $K(x,t)$ ej separabel. "Neumann-serie".

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (*)$$

Gör en ansats: $\varphi(x) \approx f(x)$ – ok om $\lambda \ll 1$ eller $[a,b]$ litet
denna ger en enkel Neumannserie.

Sätt in i $(*)$. Iterera!

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x), \quad u_0(x) = f(x)$$

där $$u_n(x) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},t_n)\,f(t_n)\,dt \ldots dt_n$$

en produkt av alla de genererade integralerna (som kommer upp från iterationen).

$$\Rightarrow \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$
om serien konvergerar.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\,dt \qquad \text{sätt in } \varphi \text{ för } \varphi(t)$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t') f(t')\,dt' \right] dt$$

osv. Iterera!

$$\underline{\text{Ex}}: \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t-x)\,\varphi(t)\,dt$$

separabel kärna så metod 1 ok, också

Använder metod 2:

$$\varphi_0(x) = x$$

$$\varphi_1(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\underbrace{\varphi_0(t)}_{x=t}\,dt = x + \frac{1}{3}$$

$$\varphi_2(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\,\varphi_1(t)\,dt = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\left[t+\frac{1}{3}\right]dt =$$

$$= x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$$

$$\varphi_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2}$$

Serien kan därmed ansättas som

$$\varphi_{n+1}(x) = x + \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\frac{1}{3}\right)^s - x\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\frac{1}{3}\right)^s =$$

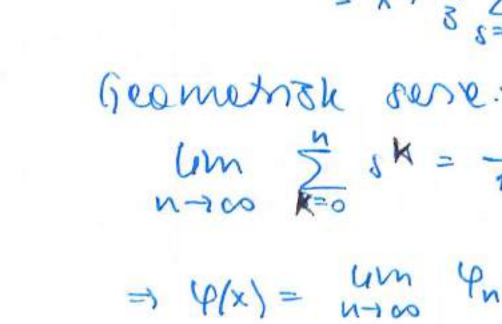
$$= x + \frac{1}{3}\sum_{s=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^s - \frac{1}{3}x\sum_{s=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^s$$

Geometrisk serie:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} s^k = \frac{1}{1-s}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

$\underline{\text{Ex 2}}$: Spridning av partikel i kvantmekanik
(stationär spridningsteori)



inkommande plan våg mot partikel, sedan sprids.

Tidsoberoende Schrödinger-ekvation för elektronen som sprids:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}) = E\,\psi(\mathbf{r})$$

$\rightarrow \Psi(\mathbb{r}, t) = e^{-iHt} \Psi(\mathbb{r}, t)$

tidsberoende från "tidsutveckling"

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \Rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

sätts in i SE & flyttas över till VL

$$\Rightarrow \nabla^2 \Psi(\mathbb{r}) + k^2 \Psi(\mathbb{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbb{r}) \Psi(\mathbb{r})$$

inhomogen 2:a ordningens diffekvation.

Påminnelse

$$\mathcal{L} g = f \Rightarrow g = \int G f \quad \text{där } \mathcal{L} G = \delta$$

$\underset{(\mathbb{r}, \mathbb{r}')}{(\nabla^2 + k^2) G(\mathbb{r})} = \underset{(\mathbb{r}-\mathbb{r}')}{\delta(\mathbb{r})}$ med randvillkoret att den spridda/utgående vågfunen beskrivs av Greensfunen.

$$\Rightarrow G(\mathbb{r}, \mathbb{r}') = \frac{e^{i\mathbb{k} \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}')}}{4\pi |\mathbb{r} - \mathbb{r}'|}$$

Lösningen är nu GF multipl. m. den inhomogena termen enligt påminnelsen. Den kan alltså skrivas som

$$\Psi(\mathbb{r}) = \int d\mathbb{r}' \, G(\mathbb{r}, \mathbb{r}') \left[-\frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbb{r}') \Psi(\mathbb{r}') \right] =$$

$$= -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d\mathbb{r}' \underbrace{\frac{e^{i\mathbb{k} \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}')}}{\mathbb{r} - \mathbb{r}'}}_{\text{kärna}} V(\mathbb{r}') \Psi(\mathbb{r}') + \underbrace{e^{i\mathbb{k}_0 \cdot \mathbb{r}}}_{\text{inhomogen term}}$$

inhomogen term läggs till för att vi får den ursprungliga plana vågen då $V=0$

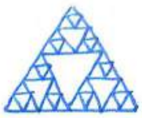
Bornapproximationen:
ansätter ~~vågfunen~~ okända funen som lägsta termen i Neumannserien

Dvs i vårt fall, ansätter $\Psi(\mathbb{r}') = e^{i\mathbb{k}_0 \cdot \mathbb{r}'}$ & löser enligt metod 2.

25/11-15
LV4
F7

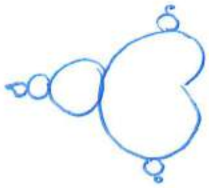
Verkligt komplicerade fkner

- definierade på en fraktal, eller beskriver en fraktal.
Hur integrera dem?



fraktal = invariant under skalningstransformation

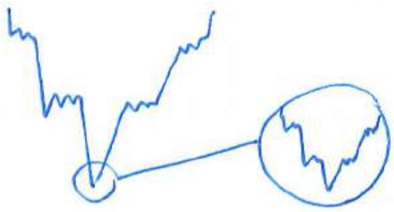
Sierpinskis triangel



Mandelbrotmängd

$$M = \{ c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c < \infty, \; n = 0, 1, 2, \dots, \; z_0 = 0 \}$$

Grafen till Weierstraß-fkn:en också fraktalobjekt

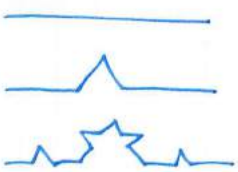


$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

där $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$

Hermite: "ett patologiskt monster"

- kont. fkn. som inte är deriverbar någonstans
spetsar överallt



Kochkurva

osv...

Formell definition av fraktalobjekt:

det har Hausdorff-dimension.

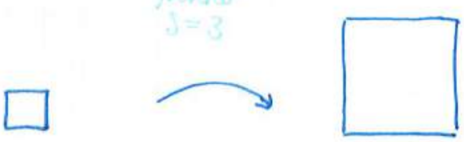
ex: $\delta = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26$. för Kochkurvan.

1D

multipl. m. skal-faktor $s = 3$

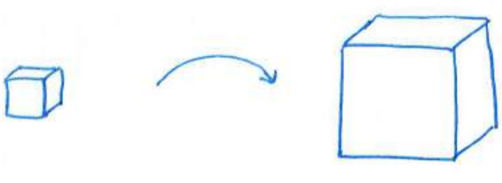
kopior $N = 3$

2D



kopior: $N = 9 = 3^2$

3D



$N = 3^3 = 27$

$$\Rightarrow N = S^D$$ antal kopior

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{\ln N}{\ln S}}$$ Hausdorff-dimension

skalfaktor

Tillämpning av fraktaler:

förekommer i teorin för icke-linjära system, Brownsk rörelse, mm.

<u>Integrera fkn som beskriver fraktal</u>

Riemannintegral - specialfall av Lebesgue

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

oändligt många lika smala vertikala rektanglar som arean över/under kurvan delats in i

kvar: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ styckvis kont.

Lebesgueintegral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

Lebesguemått

där $$A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\underbrace{\frac{k}{2^n}}_{x_k}, \underbrace{\frac{k+1}{2^n}}_{x_{k+1}}\right]\right)$$

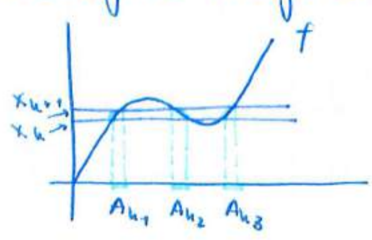
n: antal horisontella intervall

oändligt många ~~lika~~ smala rektanglar, fast horisontella

kvar: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mätbar fkn

i kvarv alltså inte kontinuitet så "klarar av" krångligare funktioner

Lebesgue-integration



- väljer ett <u>horisontella</u> intervall
- avbildar inverst på hor. axeln

$$f^{-1}([x_k, x_{k+1}]) = A_k = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3}$$

Lebesguemått av mängden A_k

$\mu(A_k) = 0$ - om antalet punkter i intervallet uppräkneligt

"totala längden" av intervallet, om A_k är Lebesgue-mätbar

Exempel på en mängd som inte går att "mäta" med hjälp av Lebesgue-måttet:

Vitalimängden $V \subset [0,1]$

- den mängd där det finns precis ett element v s.a.

$\forall x \in \mathbb{R} : v - x \in \mathbb{Q}$

valfritt reellt tal

så att skillnaden blir ett rationellt tal

Lebesgues (dominerande) konvergensteorem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

om $f_n \longrightarrow f$ punktvis nästan överallt
& $\exists$ Lebesgueintegrabel fkn g s.a. $|f_n| \leq g$ nästan överallt

nästan överallt = överallt förutom på mängd med Lebesguemåttet 0.

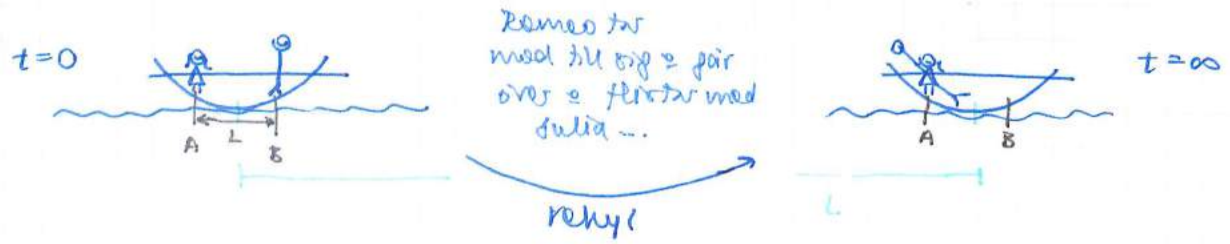
Fubini(-Tonelli)-teoremet

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx \right) dy$$

om $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ är en icke-negativ fkn

punktvis konvergens : $\forall x \forall \varepsilon \exists N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad n > N$
uniform konvergens : $\forall \varepsilon \exists N \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon . \quad n > N$

Romeo & Julia i roddbåten



M = båtens + Julias massa
m = romeos massa

– givet detta, bestäm l.

Två fall : 1) perfekt fluid $\eta = 0$ viskositet ("friktion")
2) viskös fluid $\eta \neq 0$

1. $\vec{R}_{cm}(t=0) = \vec{R}_{cm}(t=\infty)$ $\vec{R}_{cm}$ pos. för totala masscentrum.

ty inga yttre krafter

$\Rightarrow l = \frac{m}{m+M} L$ singulärt gränsvärde ty (*) blir inte detta om $\eta \to 0$.

2. Rörelseekvation

$$M\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta \dot{x}$$

x: läget för båtens samt Julias gemensamma masscentrum

y: läget för Romeo

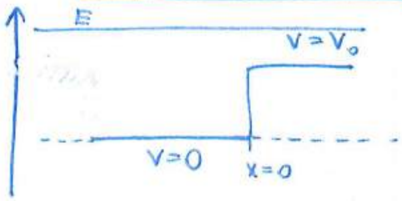
Integrera från $t=0$ till $t=\infty$

$\dot{x} = 0$ då $t \to \infty$
$\dot{y} = \dot{x} = 0$ då $t = 0$
$\dot{y} = 0$ då $t \to \infty$

$$\Rightarrow M\dot{x} + m\dot{y} \Big|_0^\infty = 0 = -\eta \underbrace{\left(x(\infty) - x(0)\right)}_{l}$$

$\Rightarrow l = 0$ (*)

Potentialbarriär i kvantmekaniken



även om energin är högre än barriären, finns det kvantmekaniskt en sannolikhet för att partikeln reflekteras.

Schrödingerekv.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi = E\psi$$

Lösning

amplitud för reflektion

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x<0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ae^{ik'x}, & x>0, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

amplitud för transmission

Vad är A & B?

använd kontinuitet av ψ & $\frac{d\psi}{dx}$ vid $x=0$

$$\begin{cases} 1-B = A & \text{följer } \psi(0_-) = \psi(0_+) \\ k(1-B) = k'A & \text{följer } \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0-} = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0+} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2k}{k+k'}$$

$$B = \frac{k-k'}{k+k'}$$

$$\Rightarrow \quad R = |B|^2 = \left|\frac{k-k'}{k+k'}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2$$

oberoende av $\hbar$!
⇒ ska vi tro det som att detta funkar klassiskt också?

$\hbar \to 0$ är en "klassisk gräns" (Bohr)

$$\lim_{\hbar\to 0} R(\hbar) = R(0) = 0$$

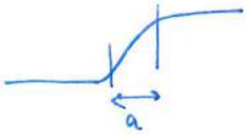
klassiskt vill vi att sann. för reflektion ska vara 0.

Klassisk gräns:

$$\lambda = \frac{h}{p} \ll a$$

de Broglie-våg. karakteristisk längd i syst.

men vi har ingen kar. längd; vårt problem! Ofysikaliskt formulerat — potentialen bör se ut som



$$V(x) = \frac{V_0}{1+e^{-x/a}} \quad , a>0$$

hade tidigare $a=0$, ideala fallet.

Gör om räkningen med den nya potentialen

$$\ldots \Rightarrow R(\hbar, a) = \left(\frac{\sinh a\pi(k-k')}{\sinh a\pi(k+k')} \right)^2$$

nu har vi ett beroende av $\hbar$!

där $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

Tar gränsen

- a fixt, $\hbar \to 0$: $\displaystyle\lim_{\substack{\hbar\to 0 \\ a \text{ fixt}}} R(\hbar, a) = \boxed{0}$
- $\hbar$ fixt, $a \to 0$: $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0 \\ \hbar \text{ fixt}}} R(\hbar, a) = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \boxed{R(\hbar, 0)}$ oberoende av $\hbar$.
  som vi gjorde först alltså.

Slutsats

$$\lim_{\hbar\to 0} \lim_{a \to 0} \neq \lim_{a\to 0} \lim_{\hbar \to 0}$$!

"att berätta för barnbarnen. Man ska vara försiktig med hur man tar gränsvärden".

Räkneövning

25/11-15
LV4
R3

Sadelpunktsmetoden

En metod för att approximera integraler på formen

$$I(x) = \int_\gamma g(z)\, e^{f(z)x}\, dz$$

för stora positiva x; f är en analytisk fkn, g är ett polynom i z, γ en kurva där ändarna inte ger bidrag till integralen.

Idé: $$\left| g(z)\, e^{f(z)x} \right| = |g(z)|\, e^{\mathrm{Re}[f]x}$$

Tänk ex. f(z) som topp i sin realdel
- lägger γ så att den går ner väldigt snabbt utanför toppen
- märkbara bidraget fr. Re[f] dominerar integralen, o denna effekt blir bättre ju högre x vi har.

För stora x så domineras integralen av bidrag från områden där Re[f] är stor.

Observationer:

$$f(z) = u(z) + i\, v(z) \quad , \quad z = x + iy$$

f är analytisk vilket ger att real- o imaginärdel uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

u är alltså harmonisk o uppfyller Laplaces ekvation.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dvs då vi är i stationär pkt i u så är vi samt. i en sadelpkt (då $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$ är $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$ o tvärtom)

Så alla stationära pkter är sadelpkter.

Plan

- hitta stationär pkt till u
- Taylorutveckla f till andra ordningen
- deformera integrationskurvan så att den passerar genom sadelpunkten i de riktningar där u avtar som snabbast.
- evaluera integralen mha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

utvecklas till andra graden jn.

Antag att $z_0 = x_0 + iy_0$ är stationär pkt till $u(z) = \mathrm{Re}(f)$.
Vi Taylorutvecklar f:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots$$

inga 1:a-derivatatermer
($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ty stat. pkt
men av det följer att
1:a-deriv. av v också
är 0, enl. Cauchy-Riemann).

där $f''(z_0) = \rho e^{i\theta}$ ngt komplext tal.

$z - z_0 = s e^{i\phi}$

$$\Rightarrow f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 e^{i(\theta + 2\phi)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \approx u(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \cos(\theta + 2\phi) & \text{realdel} \\ v \approx v(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \sin(\theta + 2\phi) & \text{imaginärdel} \end{cases}$$

Tittar på u:s beteende:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \rho s \cos(\theta + 2\phi)$$

Funktionen avtar som snabbast där

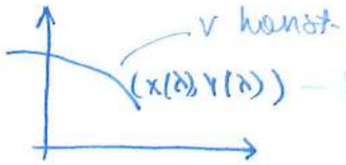
$$\cos(\theta + 2\phi) = -1$$

$$\Leftrightarrow \theta + 2\phi = \pi + n \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + n\pi$$

Så riktningar som den avtar som snabbast (dvs vi tar oss ner från sadelpunkten).

Vad händer med imaginärdelen?

$$v(x(\lambda), y(\lambda)) = C \qquad \text{antar konstant (godtyckligt)}$$



derivera map. λ

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla v \cdot \underbrace{(\partial_\lambda x, \partial_\lambda y)}_{\text{derivatan kurvan map. parametern = tangent}} = 0$$

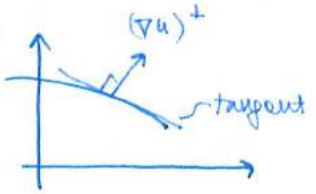
Cauchy-Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\nabla v = (\partial_x v, \partial_y v) =$$
$$= (-\partial_y u, \partial_x u) = \qquad \text{minust. \& ombytta koord.}$$
$$= (\nabla u)^\perp$$

Vi har alltså

$$(\nabla u)^\perp \cdot (\partial_\lambda x, \partial_\lambda y) = 0$$

vinkelrätt

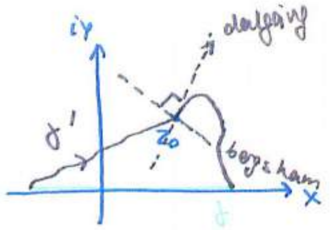


$\Rightarrow$ ∇u måste ligga i tangentens riktning.

dvs ∇u & $(\partial_\lambda x, \partial_\lambda y)$ parallella.

Så vid konstant imaginärdel går vi precis i gradienten (på u):s riktning vilket är det vi vill eftersom det är där u avtar som snabbast!

$\Leftrightarrow$ riktningar av konstant imaginärdel är precis de riktningar där u minskar som snabbast.



antar först integrera kurvan γ som ligger helt på realaxeln.

går längs dalgången – om x mkt stort så är felet mkt litet jämfört med om man gått längs γ' istället.

dalgång/bergskam: hur sadelpunkten ser ut, tänk pappersark ut-/inåt-böjda.

Eftersom f är analytisk gäller

$$\int_{\gamma-\gamma'} g(z)\, e^{xf(z)}\, dz = 0$$

sätter ihop kurvorna till en enda kontur.

$-\gamma'$ ty går i motsatt håll

enligt Cauchys sats.

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \dots - \int_{\gamma'} \dots = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} g(z)\, e^{xf(z)}\, dz = \int_{\gamma'} g(z)\, e^{xf(z)}\, dz$$

Låt oss nu skriva ner en utveckling av f o sedan integrera längs γ_d (dalgångslinjen).

$$f(z) = u(z_0) + iv(z_0) - \tfrac{1}{2}\rho s^2$$

cos-faktorn $= -1$ pga vald riktning
$\Rightarrow$ sin-faktorn $= 0$

$$\int_{\gamma_d} g(z)\, e^{f(z)x} = \left\{ \begin{array}{l} z - z_0 = s e^{i\phi_c} \\ dz = e^{i\phi_c}\, ds \end{array} \right\}$$

riktn. vi valt (där u avtar som snabbast)

för stora x

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} g(z_0)\, e^{u(z_0)x + iv(z_0)x - \frac{1}{2}\rho s^2 x}\, e^{i\phi_c}\, ds =$$

grov approx. där $g(z)$ är lika med första termen i sin Taylorutveckling.

$$= g(z_0)\, e^{xf(z_0)}\, e^{i\phi_c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho s^2 x}\, ds = \dots =$$

variabelbyte för att få $\int e^{-s^2} ds$

$$= g(z_0)\, e^{xf(z_0)}\, e^{i\phi_c} \sqrt{\frac{2\pi}{x\rho}} \qquad (*)$$

Exempel

$$I(r) = \int_0^\infty dt\; e^{-r\sqrt{t^2+1}} = \{\text{jämn fkn}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{-r\sqrt{t^2+1}}$$

komplexifierar, inför fknen $f(z) = -\sqrt{z^2+1}$

stationära pkter till $f(z)$:

$$\left.\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-z}{\sqrt{z^2+1}} \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}\right\} z_0 = 0 \quad \text{stationär pkt.}$$

$$f''(z) = \frac{-1}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{z^2}{(z^2+1)^{3/2}}$$

$$\left.\begin{aligned} f''(z_0) &= -1 \\ f''(0) &= \rho e^{i\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho = 1,\ \theta = \pi,\quad z - 0 = s e^{i\phi}$$

Hitta riktn. av snabbast avtagande realdel

$$\cos(\pi + 2\phi_c) = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_c = 0, \pi$$

rätt för ser hur integralen vi har fr. början integreras i samma riktn. (väljer så att man inte ska behöva gå över en bergskam pga deformationen av kurvan).

Insättning i (*) ger

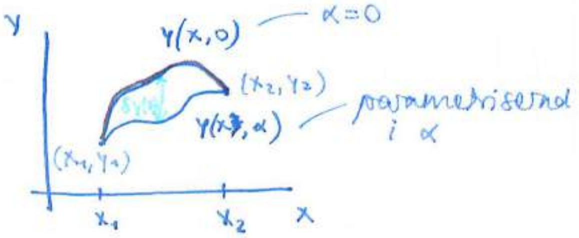
$$I \approx \frac{1}{2}\, e^{r\underbrace{f(0)}_{-1}} \underbrace{e^{i\phi_c}}_{\substack{=1 \\ \text{f. } \phi_c = 0}} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho r}} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-r}\sqrt{\frac{2\pi}{\rho r}}$$

Bra approx: plottas numeriskt tsm m. detta: visuellt lika, båda går mot 0. plottas relativa felet: går också $\to 0$.

27/11-15
(LV4)
F8

Variationskalkyl



alla fkner har samma randvillkor.

"Funktion av funktioner" = funktional

$$F\big(y(x,\alpha),\ y'(x,\alpha),\ x\big)$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F\big(y(x,\alpha),\ y'(x,\alpha),\ x\big)\, dx$$

Variationskalkyl - att hitta den fkn $y(x,\alpha)$ som optimerar (ger max/min) $I(\alpha)$.

Dvs hitta

$$\left.\frac{d I(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0=0} = 0$$

för enkelhets skull kallar vi α_0 för 0

ser alltså $y(x,0)$ i bilden ovan som den fkn som löser/optimerar problemet.

Inför

$$\delta y = y(x,\alpha) - y(x,0) = \alpha \eta(x) \qquad (1)$$

där $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

liten, godtycklig deformation

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$$

$$(\ast)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\eta(x)$$

kastar om deriverings-ordningen

Sätt in (*) i (2).

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right) dx \qquad (3)$$

Partialintegrera andra termen i integranden.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx}\, dx = \underbrace{\cancel{\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2}}}_{=0 \text{ ty } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}\, dx$$

Sätt in i (3).

$$\left.\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) \underline{= 0}$$

$\eta(x)$ godtycklig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Eulers ekvation.

Ofta: $F(y(x), y'(x), x)$ oberoende av x (endast implicit genom funkerna $y(x)$ och $y'(x)$).

(skriver nu $y(x)$ ist för $y(x, \alpha)$; α var endast en parameter som hjälpte/användes vid framtagandet av Eulers ekvation.)

Detta tillåter oss att förenkla Eulers ekvation:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \Big(\underbrace{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}}_{\text{dvs detta är en konst.}} \Big) = 0} \qquad (4)$$

Bevis: ~~xxxxxxx~~ (4) utförs:

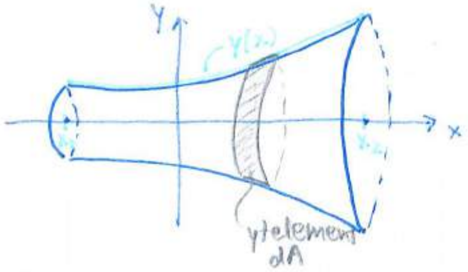
$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial y} \overset{y'}{\frac{dy}{dx}} + \cancel{\frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d^2 y}{dx^2}}}_{\text{från 1:a termen}} \underbrace{- \cancel{\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y'}} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}}_{\text{2:a termen}} = 0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \boxed{\text{Q.E.D.}}$$

Euler.

<u>Ex</u>: Såpbubblan ("det berömda såpbubbleproblemet").



– Bestäm formen på ytan (såpbubbelhinnan).

F = E − TS
Universum utför kampen "minimera energin men öka entropin" – fria energin.

Tittar nu bara på hur vi minimerar energin.

$$E_A = \sigma \cdot A$$

(σ: yt-spänning, A: area)

→ problemet reduceras till att minimera arean av såpbubbelytan.

Ytan genereras genom att rotera $y(x)$ kring x-axeln (rotationssymmetri)

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

$$= dx\left(1 + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{y'(x)}^2\right)^{1/2}$$

Vill nu minimera arean A:

$$A = \underbrace{\int dA}_{\text{summera alla ytelement.}} = \int_{x_1}^{x_2} \overbrace{\underbrace{2\pi y}_{\text{omkretsen på dA}} \cdot \underbrace{(1+(y')^2)^{1/2}}_{\text{bredden på dA (randen)}}}^{F(y,\,y',\,x)} dx$$

Inget explicit x-beroende i F

$\Rightarrow$ Eulers ekvation (förenklad versionen):

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

konstant

$$\Rightarrow \quad y\left(1+(y')^2\right)^{1/2} - yy'\left(\frac{1}{1+(y')^2}\right)^{1/2} = c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{1+y'^2} = c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y'} = \frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

separabel diffekv.

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}\,dy$$

integrationskonst.

$$\Rightarrow \quad x = c\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{y}{c}\right) + c'$$

$$\Rightarrow \quad y = c\cdot\cosh\left(\frac{x-c'}{c}\right).$$

Konstanterna c, c' bestäms från randvillkoren

$$y(x_1) = y_1$$
$$y(x_2) = y_2$$

radierna på de två cirklarna

Varning: försiktighet tillrådes

- undersök alltid den erhållna lösningen.
om den passar problemet, är matematiskt riktig osv.

Kolla Arfken/Weber/Harris s. 1090 - 1092 angående nackdelar som bör kollas vid undersökn. av lösningen. Bra diskussion!

Generalisering till flera "beroende variabler"

"beroende var." = funktioner y, y' osv.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x);\, y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x);\, x\big)\, dx$$

Man får en Eulerekv. för varje fkn y_i:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0} \qquad , i = 1, 2, \ldots, n$$

se AWH sid. 1096 (allmänt bra kapitel!)

Viktig tillämpning: Hamiltons princip (minsta verkans princip) i analytisk mekanik (Lagrange-formulering).

Lagrangefkn $L = \underset{\text{kin.}}{K} - \underset{\text{pot. energi}}{V}$

Inför "verkan" $S = \int dt\, L$.

Explicit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(\underbrace{\overset{x(t)}{x_1(t)}, \overset{y(t)}{x_2(t)}, \overset{z(t)}{x_3(t)}}_{\text{komponenter av ortsvektorn, tidsberoende}};\, \underbrace{\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)}_{\text{hastighetskomponenter}};\, t\big)\, dt$$

dvs $y_i \to x_i$, $y_i' \to \dot{x}_i$, $x \to t$, $I \to S$, $F \to L$.

Vi får alltså

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0} \qquad i = 1, 2, 3$$

Euler-Lagrange-ekv.

30/11-15
LV5
F9

Variationskalkyl forts.

Flera beroende variabler

Tillämpning: Hamiltons/minsta verkans princip

$$L = K - V$$

$$S = \int dt\, L \quad \text{verkan}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \ , \quad i = 1, 2, \dots, n}$$

Euler–Lagrange-ekv.

$n = D \times N$ # partiklar

dimensionalitet

Test: $N = 1, \ D = 3$
en partikel i tre dim.

$$K = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_i^2 \ , \quad V = V(x_1, x_2, x_3) \qquad \text{kinetisk} \quad \text{potentiell energi}$$

$v_i = \dot{x}_i$

$$L = K - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow F_i = m\ddot{x}_i \ , \quad i = 1, 2, 3$$

vi har alltså härlett Newtons andra lag.

Flera oberoende variabler

AWH s.1100

$$I = \int F(u, u_x, u_y, u_z ; x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\Downarrow \ \delta I = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_z} = 0}$$

Euler–Lagrange

Ex:

laddningsfritt område

Problem: minimera elektrostatiska energin i området V.

$$E_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \qquad \text{elektrostatisk energitäthet}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(-\nabla\varphi\right)^2$$

Totala energin i V:

index står för resp. derivata

$$E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V (\nabla\varphi)^2 \, dxdydz = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \underbrace{\left(\varphi_x^{\,2} + \varphi_y^{\,2} + \varphi_z^{\,2}\right)}_{F(\varphi,\,\varphi_x,\,\varphi_y,\,\varphi_z;\,x,y,z)} dxdydz$$

där det i detta fall inte finns något explicit beroende på varken φ, x, y eller z (utan enbart på de partiella derivatorna).

"välja φ så att energin blir minimerad"

Euler

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial x}\left(2\varphi_x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\varphi_y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2\varphi_z\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\nabla^2\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\varphi = 0$$

Gauss lag (Maxwell). Vid skalärt framställt elektriskt fält.
Denna kan annars tas fram via laddnings-konservering.

Kommentar om derivator i Euler:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} \equiv \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_x}\left(u, u_x, u_y, u_z; x, y, z\right) =$$

konvention, men det är totala derivatan som menas

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u_x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u_x}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{u_x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u_x^2}\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{u_{xx}} + \frac{\partial^2 F}{\partial u_y \partial u_x}\underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial x}}_{u_{yx}} + \frac{\partial^2 F}{\partial u_z u_x}\underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial x}}_{u_{zx}}$$

Isoperimetriska problem

Problem: maximera arean A.

L = konst
omkretsen/perimetern } tvång.

Uppvärmning: att hitta max/min för vanliga funktioner, med tvång.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$\Downarrow$ x, y, z oberoende

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

villkor för extremvärde (vanliga definitionen).

Antag att vi har ett tvång

① $\varphi(x, y, z) = C = \text{konst.}$ dvs var. är inte längre oberoende av varandra...

Kan då skriva (ex) $z = z(x, y)$.

Utväg: inför Lagrangemultiplikator λ, o bilda

$$df + \lambda d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = 0$$

blir av med den beroende var. o har återigen bara oberoende var. kvar. $\Leftarrow$ välj sedan λ så att denna term $= 0$.

Alltså, recept:

- Välj en av variablerna x, y, z som beroende av de andra två, ex $z = z(x, y)$
- Hitta λ så att $\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ ②
- Har två ober. var. kvar

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad ③ \; ④$$

4 obekanta: x, y, z, λ
4 ekvationer: ① – ④ $\Rightarrow$ OK!

Samma struktur för funktionaler i variationskalkylen:

$$I = \int F(y, y', x)\, dx$$

① $J = \int G(y, y', x)\, dx = C = \text{konst}$ [tvång]

I analogi med vanliga funktioner inför en Lagrangemultiplikator λ och bilda uttrycket

$$I + \lambda J = \int dx \, \underbrace{(F + \lambda G)}_{g}$$

$$\delta I + \lambda \delta J = 0$$

$\Downarrow$ Euler

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'} = 0. \qquad (2)$$

Två obekanta: y, λ
Två ekvationer: (1) - (2) $\Rightarrow$ OK!

Se AWH s. 1108 mht. exempel.

Ex: Kvantmekanik.

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle = \int \overbrace{\psi^*(x,y,z) \, H \, \psi(x,y,z)}^{F(\psi,\, \psi_x,\, \psi_y,\, \psi_z;\; \psi^*,\, \psi_x^*,\, \psi_y^*,\, \psi_z^*;\; x, y, z)} \, dx\,dy\,dz$$

Problem: hitta extremvärdet, dvs

$$\delta E = 0.$$

Tvång: vågfunken normerad

$$J = \int \overbrace{\psi^*(x,y,z) \, \psi(x,y,z)}^{G} \, dx\,dy\,dz = 1$$

Använder i detta fall $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)$; stoppa in detta i funktionalen E och partialintegrera den kinetiska termen.

$$\Rightarrow F = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi$$

---

partialintegrationen

$$\int_a^b \psi^* \nabla^2 \psi \, dx = \cancel{\psi^* \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x=a}^{b}} - \int_a^b \frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx}\, dx$$

a = b

periodiska randvillkor $\psi(a) = \psi(b)$

Bilda $g = F + \lambda G$. Kör Euler!

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_x^* \psi_x + \psi_y^* \psi_y + \psi_z^* \psi_z\right) + V\psi^*\psi + \lambda \psi^*\psi$$

Kör Euler på $y_1 = \psi$ och $y_2 = \psi^*$.

Eulers ekvationer

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial g}{(\partial y_i / \partial x_j)} = 0$$

$\Rightarrow$ $y_2 = \psi^*$: $\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \psi^*_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \psi^*_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \psi^*_z} = 0$ (1)

$y_1 = \psi$: samma sak m. $\psi^* \to \psi$. (2)

Utför derivatorna i (1)

$$\Rightarrow V\psi + \lambda\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\left(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}\right)}_{\nabla^2\psi} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = -\lambda\psi$$

Måste bestämma λ. Läs av från uttrycket för E efter att ha substituerat $-\lambda$ för $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$:

$$E = \int \psi^*(-\lambda)\psi \, dx\,dy\,dz =$$

$$= -\lambda \underbrace{\int \psi^*\psi \, dx\,dy\,dz}_{=1, \text{ krav}}$$

$$\Rightarrow -\lambda = E$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi}$$

Schrödingerekvationen

– så det var precis sådär Schrödinger tog fram den!

2/12-15
(LV5)
F10

Kvantmekanikens matematiska grund

Bakgrund:

Vektorrum V

V vektorrum över $\mathbb{C}$, $\forall |a\rangle, |b\rangle \in V$:

- $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$
- $(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$
- $\exists |0\rangle : |a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$
  nollvektorn
- $1|a\rangle = |a\rangle$
- $\exists |-a\rangle : |a\rangle + |-a\rangle = |0\rangle$
- $\alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha(\beta|a\rangle) = \alpha\beta|a\rangle$
- $(\alpha+\beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$
- $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

Centrala begrepp & resultat

- Linjärt oberoende
- bas
- inre produkt (generalisering av "vanlig" skalärprodukt)
- Schwarz olikhet: $\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$
- ortogonalitet, Gram-Schmidt:

  välj $|a\rangle$, normera: $|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}|a\rangle$

  välj nytt element $|b\rangle$: $|e_2'\rangle = |b\rangle - \langle b|e_1\rangle|e_1\rangle$

  $|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle e_2'|e_2'\rangle}}|e_2\rangle$

  $\vdots$

  osv.

- norm $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$
  - $\rho(\alpha|v\rangle) = |\alpha|\rho|v\rangle$
  - $\rho(|u\rangle + |v\rangle) \leq \rho|u\rangle + \rho|v\rangle$ triangelolikheten.
  - $\rho|0\rangle = 0$

vanligt skrivsätt $\rho|v\rangle = ||v|| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$ inre produkt

$\rho|v\rangle \geq 0$ med likhet omm $|v\rangle = |0\rangle$

– "avstånd" mellan $|a\rangle$ & $|b\rangle$

$$d(a,b) = \|a-b\|$$

– linjär transformation $T: V \to W$

$$T(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha T|a\rangle + \beta T|b\rangle$$

$T: V \to V$: T endomorfism.

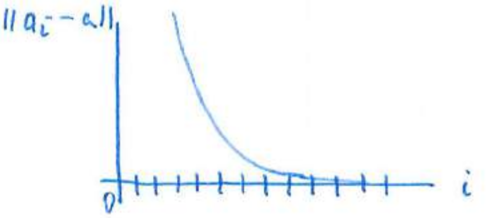
Konvergent sekvens

$$|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots = \{|a\rangle_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$$

sekvensen konvergent om

$$\exists a: \lim_{i\to\infty} \|a_i - a\| = 0$$

$\in V$



Cauchy-sekvens

Cauchy-sekvens om

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \|a_i - a_j\| = 0$$

tittar längre bak i sekvensen alltså.

Dvs konvergens $\Rightarrow$ Cauchy

(konvergens $\Leftarrow$ Cauchy)

(omvändningen gäller säkert endast för ändligt-dimensionella vektorrum

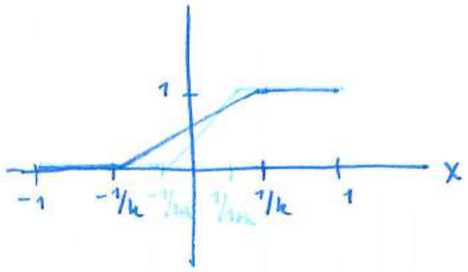
för att det ska gälla för oändligt dim. vektorrum behöver extra villkor läggas på.

<u>Ex:</u> Betrakta sekvensen av funktioner

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} : f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } \frac{1}{k} \le x \le 1 \\ (kx+1)/2 & \text{om } -\frac{1}{k} \le x \le \frac{1}{k} \\ 0 & \text{om } -1 \le x \le -\frac{1}{k} \end{cases}$$

så $f_k(x) \in C^0[-1,1]$

mängden av kontinuerliga funktioner på intervallet



$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \Theta(x) \notin C^0[-1,1]$$

stegfkn

dvs Cauchy $\not\Rightarrow$ konvergent sekvens

vi har konvergens mot ett element, men elementet ligger inte i rummet.

Fullständigt vektorrum:

Cauchy $\Rightarrow$ konvergent sekvens

Fullständigt normerat vektorrum : Banachrum

Fullständigt inre produkt-rum: Hilbertrum

dvs normen ges av en inre produkt

Låt oss nu betrakta en fullständig ortonormerad sekvens

$$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$$

Hilbertrum

$(\forall_{i,j} \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$

Välj $|f_n\rangle \in \mathcal{H}$:

$$|f_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle e_i|f\rangle}_{f_i} |e_i\rangle$$

Välj $|f\rangle$ och undersök

$$|\langle f|f_n\rangle|^2.$$

$$|\langle f|f_n\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle f_n|f_n\rangle = \{\text{sätt in uttr. för } f_n\} =$$

Schwartz olikhet

$$= \langle f|f\rangle \sum_{i'=1}^{n} \langle e_{i'}|\, f_{i'}^* \sum_{i=1}^{n} f_i\, |e_i\rangle =$$

komplexkonjugera i bra:n

$$= \sum_{i',i} f_{i'}^* f_i \underbrace{\langle e_{i'}|e_i\rangle}_{\delta_{i'i}} \langle f|f\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \langle f|f\rangle \qquad (1).$$

Vi har också

$$|\langle f|f_n\rangle|^2 = \left|\langle f|\sum_{i=1}^{n} f_i |e_i\rangle\right|^2 =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f_i \underbrace{\langle f|e_i\rangle}_{f_i^*}\right|^2 =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f_i f_i^*\right|^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^2 \qquad (2).$$

(1) & (2) ger oss

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{\cancel{2}} \leq \cancel{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} \langle f|f\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \leq \langle f|f\rangle}$$ Parsevals olikhet

$$\Downarrow \; n\to\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \leq \langle f|f\rangle}$$ Bessels olikhet

Fråga: är $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$?

Bilda $|\psi\rangle \equiv |f\rangle - \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle e_i|f\rangle |e_i\rangle}^{|f_n\rangle}$ (*)

Påstående: det räcker att visa att $|\psi\rangle = |0\rangle$
(ortogonal mot varje element i $\mathcal{H}$).

- välj godtyckligt $|e_j\rangle$. Slå på $|\psi\rangle$.

$$\langle e_j|\psi\rangle = \langle e_j|f\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i|f\rangle \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{\delta_{ij}} =$$

$$= \langle e_j|f\rangle - \langle e_j|f\rangle = 0$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = |0\rangle$$

(*) ger oss då också att

$$|f\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle\langle e_i|f\rangle = |0\rangle$$

$$\Rightarrow |f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle\langle e_i|f\rangle + |0\rangle =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle\langle e_i|}_{\mathbb{1},\ 1}\, f\rangle$$

resolution of identity.

Varje Hilbertrum är isomorft med $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ =
= rummet av kvadratintegrabla funktioner på intervallet $[a,b]$ med viktfunktion w.

Kvadratintegrabla:

$$\int_a^b |f_n(x)|^2 \, dx < \infty$$

Lebesgue-integral

Inre produkt

$$\langle g|f\rangle \equiv \int_a^b g^*(x)\, f(x)\, w(x)\, dx$$

vikt-funktion

positivt definit

Olika viktfunktioner ger upphov till olika ortogonala polynom (Bessel, Chebyshev, ...)

$\mathcal{L}^2_w[a,b]$ är fullständigt. (Riesz-Fischer-teoremet).

Poängen med $\mathcal{L}^2$? Ger en enkel konkret realisering av $\mathcal{H}$.

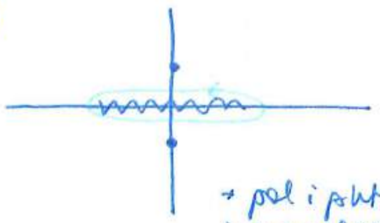
2/12-15
(LV 5)
R4

Räkneövning

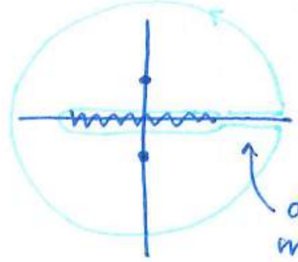
Genomgång Inlämningsuppg. Kursrecka 1

Allmänt: visa att saker → 0

2.b)



elr



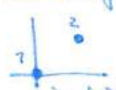
\+ pol i punkten i oändligheten

den här måste finnas med, en integr.kontur behövs för Cauchy

4. a) $\tilde{f}(\omega) = \cdot\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\, dt$

"fysikaliska skäl" $\Rightarrow$ $G(t,t') = G(t-t')$

symmetriargument, ex



försöket den orsakar i pkt 2 = försöket 2 orsakar i pkt 1

annars
$$G(\omega,\omega') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{i\omega t'} G(t,t')\, dt\,dt'$$

allmän formel för att f-transformera i två variabler samtidigt

b) $x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t-t')\, F(t')$ något sker vid t'

innehåller $\theta(t-t')$ — vilken påverkan har detta vid efterföljande tidpunkter

alternativt välja $F(t) = 0$ för $t<0$

c) $\left(m\tau \frac{d^3}{dt^3} + m\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2m}{Q}\frac{d}{dt} + m\omega^2 \right) x(t) = f(t)$

$G(\omega) = \frac{1}{\cdots} \quad \rightarrow \quad G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega)\, d\omega.$

Slutsats: om poler i nedre halvplanet $\Rightarrow$ icke-kausalt

integralen i NHP

$$I = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}(G(\omega), \omega_j) \neq 0$$

detta behövde visas också.

om ena residyn pos & andra neg skulle ju res. teoretiskt kunna bli 0.

Variationskalkyl

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$ Euler-Lagrange

$F[y(x), y'(x), x]$ har lokalt min/max där EL uppfyllt.

Verkan S energi el. tid (pumpat in mest energi / tagit lång tid)

- fysikaliska system strävar efter att minimera den.

- $$S = \int dt\, \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{Lagrangianen}}$$

"när S är minimerad, är $\mathcal{L}$ minimerad" – nice, ☺ utnyttjas.

där $$\mathcal{L} = \underbrace{T}_{\text{kinetisk energi}} - \underbrace{U}_{\text{potentiell energi}}$$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{tidsderivata ist. för x-derivata}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

q_i har ersatt funken y. Kan vara olika beroende på system/problem. Ex $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$

q_i – generaliserade koordinater

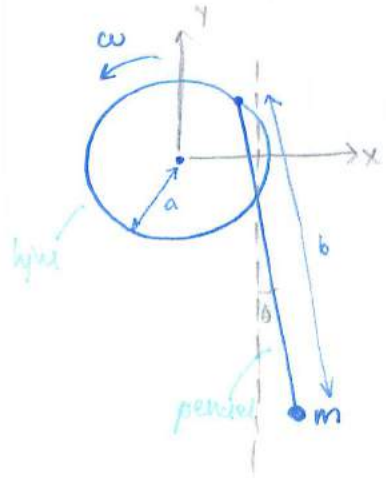
Energi invariant under koordinatbyte, samt skalär – fördelar för att skriva om Newton's ekvationer (i termer av kraft), i termer av energi mha EL.
(som är)

ex: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}}_{m\dot{x}} = 0$ dvs rörelsemängden bevarad.

(anv. $\mathcal{L} = T$).

Euler-Lagrange bra för per automatik invariant under koordinatbyte, samt funkar mest bra med eventuella krav (ex partikel som inte är fri utan bunden/begränsad av något).
Används även för att gå i gräns från klassisk fysik till kvantfysik.

Analytisk mekanik – mekanik i termer av Lagrangianen.



Hur kommer pendeln att röra sig?

mkt svårt beskriva med "vanlig" mekanik – gör det ist mha analytisk.

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = mgy$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t + b\sin\theta(t) \\ y &= \underbrace{a\sin\omega t}_{\text{upphängningspkt}} - \underbrace{b\cos\theta(t)}_{\text{pendelrörelse}} \end{aligned}\right\}$$

har bidrag från pendlingen samt hjulets rotation

position är i allmänhet additiv

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t + b\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y} = a\omega\cos\omega t + b\dot{\theta}\sin\theta$$

Systemet beror på 1 generaliserad koordinat

$$q_1 = \theta \quad , \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}$$

Tillvägagångssätt alltså:
1) beskriv syst. i cartesiska koord.,
2) uttryck detta på enklare sätt (i detta fall θ, ω, t)
3) se vilken av de nya koord. som det sker ngt icke-trivialt med (ω, t ganska självklara i vårt fall medan θ inte är det, så denna väljs som den generaliserade koord.)

Lagrangianen blir

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\Big(a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2ab\omega\dot{\theta}\overbrace{(\cos\omega t\sin\theta - \cos\theta\sin\omega t)}^{\sin(\theta - \omega t)}\Big)$$
$$- mg(a\sin\omega t - b\cos\theta).$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mab\omega\dot{\theta}\cos(\theta - \omega t) - mgb\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = mb^2\dot\theta + ab\omega \sin(\theta - \omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = mb^2\,\ddot\theta + mab\omega(\dot\theta - \omega)\cos(\theta - \omega t)$$

skillnad på total- & partialderivata på [illegible]. vill derivera allt som beror på t.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = 0$$

{m, b förkortas bort}

denna isoleras

$$\Rightarrow a\omega\dot\theta\cos(\theta - \omega t) - g\sin\theta - b\ddot\theta - a\omega(\dot\theta - \omega)\cos(\theta - \omega t) = 0$$

Rörelseekvation:

$$\boxed{\ddot\theta = \frac{a}{b}\omega^2\cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b}\sin\theta}$$

Testar nu att få fram samma sak med Newtonsk mekanik.

förutsättning.

Konservativt system $\quad T(\dot x_i),\ U(x_i),\ F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad [F = -\nabla\Phi]$

$$q_i = x_i \qquad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

$$\mathcal{L} = T(\dot x_i) - U(x_i) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial x_i}}_{F_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x_i} = 0$$

där $T = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{3} \dot x_j^2$

$$\Rightarrow F_i = \frac{d}{dt}\big(\underbrace{m\dot x_i}_{p}\big) \qquad \Rightarrow \boxed{\vec F = \dot{\vec p} = m\ddot{\vec x}}$$

---

få med friktionskrafter & annat:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} = Q_i$$

Räkneövning

Hitta de funktioner $y(x)$ som är stationära punkter till funktionalen

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{y}\sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$

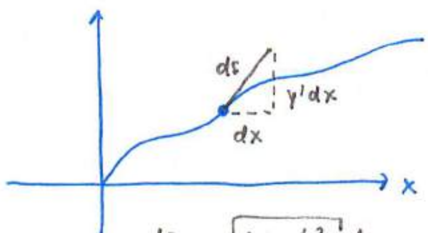
Bakgrund

I euklidisk geometri mäter vi avstånd med Pythagoras sats.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Hur beräknar man längden av kurvor?

$$ds^2 = \left(1 + dy^2/dx^2\right)dx^2$$
$$= \left(1+(y')^2\right)dx^2$$
$$\Rightarrow ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$



$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

Vad händer om vi istället mäter avstånd med

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$ — beror på var vi befinner oss i y-led.

så om vi nu vill mäta längden på en kurva får vi

$$ds = \frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$ observera att $y=0$ inte ingår i definitionsmängden.

Tillbaka till problemet

$$F[y,y'] = \frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}$$ har inget explicit x-beroende.

- Funktionaler utan explicit x-beroende

Euler-Lagrange ekvation(er):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\text{inget expl. x-ber.}} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' \qquad (*)$$

Testa att multiplicera EL med y' och sedan dra ifrån: lägga till $\frac{\partial F}{\partial y'} y''$:

OBS prim: derivata map. x.

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' - \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0$$

Använd (*): får då

$$\frac{dF}{dx} - \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) y' - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C$$

har "sänkt graden" på EL! började med en andraderivata.

$$F[y, y'] = \frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}$$

Enligt ovan ges stationära punkter av lösningar till

$$\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2} - \frac{1}{y}\frac{1\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot y' = C$$

Förläng med $\sqrt{1+y'^2}$.

$$\frac{1}{y}\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\Rightarrow \quad y^2(1+y'^2) = C_2$$

Hur lösa denna diff.ekv?

Titta på

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

– kanske händer något bra om vi tar

$$y' = \tan\theta.$$

$$y^2 \frac{1}{\cos^2\theta} = C_2$$

$$\Rightarrow y = C_3 \cos\theta$$

Hur beror x på delta θ?

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} =$$

$$= \frac{1}{y'}\left(-C_3 \sin\theta\right) =$$

$$= -C_3 \frac{\sin\theta}{\tan\theta} =$$

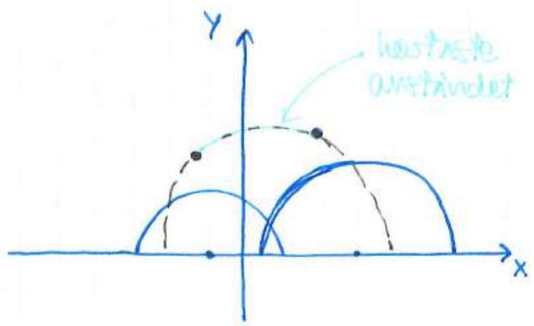
$$= -C_3 \cos\theta$$

$$\Rightarrow x(\theta) = \underbrace{-C_3}_{C_4} \sin\theta + D$$

S.a.

$$y(\theta) = C_3 \cos\theta$$
$$x(\theta) (= C_4 \sin\theta + D) = -C_3 \sin\theta + D$$

} Lösningen parametriserad i θ. cirkel!



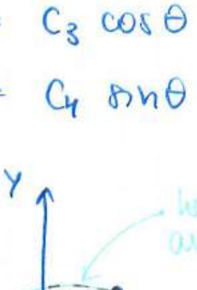
Cirklar med centrum på x-axeln.

{ då vi minimerar avståndet då vi mäter med den andra metoden.

⇒ cirkelsegment är alltså kortaste avståndet mellan två punkter

alla sidor "lika långa"
alla segment har "samma area"
Hyperboliska planet

⇒ parallellaxelteoremet gäller inte för denna geometri!



finns oändligt många linjer genom punkten som inte skär linjen m.

9/12-15
LV6
F10

Angående förra veckans föreläsning:

Diskussionen av ON-sekvenser $\{|e_i\rangle\}_i$

- Fullständighet: $|0\rangle$ enda vektorn sådan att $\langle e_i|0\rangle = 0 \ \forall i$

$$\Downarrow\Uparrow$$

$$|f\rangle = \sum_i |e_i\rangle \underbrace{\langle e_i|f\rangle}_{f_i} = \sum_i f_i |e_i\rangle \quad \forall |f\rangle$$

denna visades på föreläsningen.

---

4 postulat för kvantmekaniken
(icke-relativistiskt)

I. Ett tillstånd hos ett fysikaliskt system beskrivs av en normerad vektor $|\psi\rangle$ i ett Hilbertrum.

II. Till varje fysikalisk observabel finns en Hermitesk operator på ett Hilbertrum. (*) strägg

III. Givet ett tillstånd $|\psi\rangle$ så ges de möjliga resultaten vid en mätning av en observabel svarande mot operatorn Ω av egenvärdena $\{\omega\}$ till Ω.
Sannolikheten att mäta ω ges av $|\langle\omega|\psi\rangle|^2$ där $|\omega\rangle$ är motsvarande egenvektor till Ω. Vid mätningen "kollapsar" $|\psi\rangle$ till $|\omega\rangle$. (*) exempel/förklaring

(*): strägg – Kanonisk kvantisering

} förklarar ungefär varifrån operatorer kommer, genom motsvarigheten i klassisk fysik.

Hamiltonmekanik, klassiskt:

Hamiltons ekvationer

$$1D \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Poisson-parenteser

f, g funkr av p & q

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

$$\{q, p\} = 1$$

Dirac: ersätt poisson-parenteserna med en kommutator och funkrna med operatorer

$$\{q, p\} \longrightarrow [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

Fundamentala egenskaper hos $\{,\}$ och $[,]$

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$
3. $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ Jacobis identitet

---

(*): exempel/förklaring

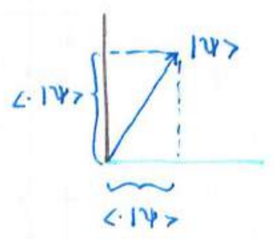
$$\Omega |\omega\rangle = \omega |\omega\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \sum_\omega \underbrace{\langle\omega|\Psi\rangle}_{\omega_\Psi} |\omega\rangle = \sum_\omega \omega_\Psi |\omega\rangle$$

Sannolikheten att mäta ω givet $|\Psi\rangle$ ges av

$$|\langle\omega|\Psi\rangle|^2 = |\omega_\Psi|^2.$$

Ex: mäta färg - blått elr svart (rött eller gult)



kollapsar när till
blåa elr svarta egenvektorn.

IV. Tidsutvecklingen av tillståndet $|\Psi(t)\rangle$ bestäms av systemets Hamiltonoperator: (**)

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$ Schrödingerekvationen.

(**) ⇒

Schrödingerekvationen

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-iHt/\hbar}}_{\substack{\text{tidsutvecklings-}\\\text{operatorn}\\ U(t)}} |\Psi(0)\rangle$$

← unitär (bevarar längder norm sannolikh. → kan rotera tillst. i Hilbertrummet)

"The more successful the quantum theory is, the sillier it looks."

A. Einstein

Vi har ett problem med postulaten:

"vid mätningen "kollapsar" $|\psi\rangle$ till $|\omega\rangle$"
- detta kan inte beskrivas med en unitär operator!

postulat III, IV inkonsistenta. – måste försöka koppla ihop dem – kan göras på olika sätt.

Kvantmekanikens mätproblem.

→ Everett, 1957 "Many-worlds interpretation" mångvärldstolkningen (*)

→ Köpenhamnstolkningen Bohr, Heisenberg 1925–1927

→ QBism Fuchs 2010 (**)

→ Consistent histories theory Omnés 1994

→ Decoherence theory Zurek 1981, Joos & Zeh 1985

(*) varje gång vi gör en mätning, splittras världen upp i en del för varje mätresultat. En observatör i ett universum som mäter gult, & i ett annat universum en annan observatör som mäter rött.

(**) annat sätt att tänka på sannolikheter.
& quantum based ... annan tolkning/definition

Mångvärldstolkningen - utbrett använt bland filosofer
Köpenhamnstolkningen - mer använt i läroböcker mm.

Teori för Hilbertrum forts.

Kan visa (Riesz-Fisher)

$\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{L}^2_w[a,b]$ isomorft

Stone-Weierstraß-teoremet:

$\{x^k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ är en bas i $\mathcal{L}^2_w[a,b]$

dvs $\forall f \in \mathcal{L}^2$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ monom

obs funktionsrum

OBS $\{x^k\}$ ej ortogonala ~~........~~ / ej ON-sekvens

snabbfixas via Gram-Schmidt: välj $w(x) = 1$, $[-1, +1]$: $\boxed{\mathcal{L}^2_1[-1,1]}$

- välj $P_0(x) = 1$
  första elementet i vår ON-bas
- välj $P_1(x) = ax + b$, med villkoret $\langle P_1 | P_0 \rangle = 0$, $\langle P_1 | P_1 \rangle = 1$

$$\langle P_0 | P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, P_0^*(x) P_1(x) = \int_{-1}^{1} dx\, (ax + b) = 2b = 0$$

$$\langle P_1 | P_1 \rangle = 1 \Rightarrow a = 1 \qquad \Rightarrow P_1(x) = x$$

- välj $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ pss med $\langle P_2 | P_0 \rangle = \langle P_2 | P_1 \rangle = 0$, $\langle P_2 | P_2 \rangle = 1$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Vi får de tre första Legendrepolynomen.

Allmänt för Legendrepolynom:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

Associerade Legendrepolynomen fås av

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \qquad m \geq 0,\ x \in [-1,1]$$

– jämför i kvantmekaniken: <u>klotytefunktionerna</u>

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi (l+m)!}}\cdot P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

Egenfunktioner till $\vec{L}^2$ och $\hat{L}_z$ i sfäriska koordinater

projektionen av $\vec{L}$ på z-axeln

$$\vec{L}^2\,|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)\,|l,m\rangle$$

$$L_z\,|l,m\rangle = \hbar m\,|l,m\rangle$$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \langle\theta,\varphi\,|\,l m\rangle$$

Massor av andra s.k. ortogonala polynom fås också genom Gram-Schmidt genom att betrakta olika viktfunktioner och intervall.
Chebyshev, Jacobi, Hermite, ...

---

olika typer av oändl.

- Uppräkneligt oändlig mängd $M \overset{\text{isomorf}}{\longleftrightarrow} N$ naturliga talen
- Icke-uppräkneligt antal (kontinuum) se Cantor

$M \overset{\text{iso}}{\not\longleftrightarrow} N$

ex de reella talen är icke-uppräkneligt oändligt mängd

Kan vi konstruera en bas i $\mathcal{L}^2$ som har ett icke-uppräkneligt antal element?

Dirac: "vore nice i kvantmekaniken"

9/12-15
(LV6)
R6

Räkneövning

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

hur det såg ut i början
tidsutvecklingsoperator

Schrödingerekv.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\Psi\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ax \\ x = e^{at}x_0 \end{array} \right\}$$

"Formell integration" – bortser från att $\hat{H}$ operator, ~~[illegible]~~ osv.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{A}t}$$

funktion av en operator.

Vad betyder en fkn av en operator?

Antag | Fkn F, analytisk
| Operator $\hat{A}$, hermitesk $(=\hat{A}^+)$, icke degenererade egenvärden

= alla egenv. är unika.
= ex. $\hat{A}$ repr. av 3x3 – matris innebär att $\hat{A}$ har 3 egenvärden (= 3 egenvektorer).

$$F(\hat{A}) = ?$$

- Egenvärden

egenvektor

$$\langle u_n|\left(\hat{A}|u_m\rangle = a_m|u_m\rangle\right) \Rightarrow \langle u_n|\hat{A}|u_m\rangle = a_m\langle u_n|u_m\rangle$$

egenvärde

$$\left(\langle u_n|\hat{A} = \langle u_n|a_n\right)|u_m\rangle \Rightarrow \langle u_n|\hat{A}|u_m\rangle = a_n\langle u_n|u_m\rangle$$

$\hat{A}$ hermitesk

$\Downarrow$ tar ena ekv. minus den andra.

$$0 = (a_m - a_n)\langle u_n|u_m\rangle$$

$0 = (a_m - a_n)\langle u_n|u_m\rangle$

inga degenererade egenv. $\Rightarrow$ $(a_m - a_n) = 0$ omm $m = n$

$\Rightarrow$ $\langle u_n|u_m\rangle = 0$ för $m \neq n$

Det vill säga alla egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala.

- $\{|u_n\rangle\}$ är ortogonal — varje vektor är vinkelrät mot alla andra.

Väljer längden på vektorerna till 1 så

$\langle u_n|u_m\rangle = \delta_{nm}$

- $\dim(\hat{A})$ = antalet $|u_n\rangle$

$\Rightarrow$ $\{|u_n\rangle\}$ är en bas för det Hilbertrum $\hat{A}$ ber i, dvs är en komplett mängd.

$$\Rightarrow \quad |\Psi\rangle = \sum_m \Psi_m |u_m\rangle =$$

$$= \sum_m \langle u_m|\Psi\rangle |u_m\rangle$$

$$\mathbb{1} = \sum_m |u_m\rangle\langle u_m| \qquad \text{Resolution of identity}$$

identitets-matris

$$\sum_m \Psi_m |u_m\rangle = \sum_m \langle u_m|\Psi\rangle |u_m\rangle$$

$$= \frac{\mathbf{u}_m \cdot \Psi}{|\mathbf{u}_m|^2}\,\mathbf{u}_m = \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_m}\Psi$$

kan ses det som att vi projicerar Ψ på var och en av basvektorerna alltså.

- $\hat{P}_m = |u_m\rangle\langle u_m|$

$$\Rightarrow \hat{A}|\Psi\rangle = \hat{A}\sum_m \underbrace{\langle u_m|\Psi\rangle}_{\text{skalär! när man tagit en inre produkt}}\underbrace{|u_m\rangle}_{\text{vektor}} =$$

$$= \sum_m \langle u_m|\Psi\rangle \hat{A}|u_m\rangle =$$

$$= \sum_m \langle u_m|\Psi\rangle a_m |u_m\rangle =$$

$$= \left[\sum_m a_m |u_m\rangle\langle u_m|\right]|\Psi\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \sum_m a_m |u_m\rangle\langle u_m|$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{F^{(k)}(0)}{k!}}_{f_k} x^k$$

så

$$F(\hat{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \hat{A}^k \quad ?$$

Hm. Tittar på potenser av $\hat{A}$. $\hat{A}^1$ vet vi från ovan,

$$\hat{A}^2 = \sum_n a_n \underbrace{|u_n\rangle\langle u_n|}\sum_m a_m |u_m\rangle\langle u_m| =$$

$$= \sum_n\sum_m a_n a_m |u_n\rangle\underbrace{\langle u_n|u_m\rangle}_{\delta_{nm}}\langle u_m| =$$

$$= \sum_m a_m^2 |u_m\rangle\langle u_m| =$$

$$= \sum_m a_m^2 \hat{P}_m$$

$$\Rightarrow \hat{A}^k = \sum_m a_m^k \hat{P}_m$$

$$\Rightarrow F(\hat{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \hat{A}^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_m a_m{}^k \hat{P}_m =$$

ok att byta plats på summationen ty analytisk fkn → k-summan konvergerar likformigt ⇒ resten gör det också (gör att visa för m-summan).

$$= \sum_m \underbrace{\sum_k f_k a_m^k}\hat{P}_m$$

$$\Rightarrow \boxed{F(\hat{A}) = \sum_m F(a_m)\hat{P}_m}$$

om degenererade egenvärden

$$F(\hat{A}) = \sum \sum_m F(a_m)\hat{P}_m$$

↑ summa över degenerationsgrad

$\hat{A}^+ = \hat{A}$ i Hilbertrummet $\mathcal{H}$:

(kommentar till det vi nyss gjorde)

Spektralsatsen

Det finns en ON-bas till $\mathcal{H}$ bestående av $\hat{A}$:s egenvektorer. $\hat{A}$ har reella egenvärden.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Paulimatriserna.

spinn längs x- & y-axeln

kallas även σ_z, ger spinn längs z-axeln

1. Visa att de 4 matriserna tillsammans bildar en bas för alla 2×2-matriser.

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} = k_1 I + k_2\sigma_1 + k_3\sigma_2 + k_4\sigma_3 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = k_1 + k_4 \\ m_2 = k_2 - ik_3 \\ m_3 = k_2 + ik_3 \\ m_4 = k_1 - k_4 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{k}$$

Bas om (*) bara har en icke-trivial lösn.

$\Leftrightarrow \det(\;) \neq 0$

Vi har $\det(\,) = 4i \neq 0$

$\therefore \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ är en bas för {alla komplexa 2×2-matriser}.

2. Beräkna $e^{\alpha\sigma_i}$, $i = 1,2,3$

$e^{\alpha(\sigma_1+\sigma_2)}$

$e^{\alpha\sigma_1} e^{\alpha\sigma_2}$ blir de lika?

$$F(\hat{A}) = \sum_m F(a_m) \underbrace{|u_m\rangle\langle u_m|}_{\hat{P}_m}$$ som innan.

$\alpha\sigma_1 : \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$

egenvärden: $a_1 = \alpha$, $a_2 = -\alpha$

egenvektorer (normaliserade): $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$

reellt

$$\hat{P}_1 = w_1 \cdot w_1^{\dagger} = w_1 \cdot w_1^{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ \ 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_2 = w_2 \cdot w_2^{\dagger} = w_2 \cdot w_2^{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha\sigma_1} = e^{\alpha} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-\alpha} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

upphöjt till 1:a egenvärdet

upphöjt till andra egenvärdet

$\alpha\sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix}$

egenvärden: $a_1 = \alpha$, $a_2 = -\alpha$

egenvektorer: $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)$

glöm inte att vi delar med det komplexa absolutbeloppet då vi normaliserar!

$$\hat{P}_1 = \mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_1^{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha\sigma_2} = e^{\alpha}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + e^{-\alpha}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

$e^{\alpha\sigma_3}$ lämnas som övning.

$$\underbrace{e^{\alpha\sigma_1}}_{\text{matris}}\,\underbrace{e^{\alpha\sigma_2}}_{\text{matris}} = \begin{pmatrix} \cosh^2\alpha + -i\sinh^2\alpha & (1+i)\cosh\alpha\sinh\alpha \\ (1-i)\cosh\alpha\sinh\alpha & \cosh^2\alpha - i\sinh^2\alpha \end{pmatrix}$$

② ⇒ spelar roll vilken ordning vi har dem i

$$\underbrace{e^{\alpha(\sigma_1+\sigma_2)}}_{\Rightarrow \text{ spelar ingen roll}} : \begin{pmatrix} 0 & \alpha(1-i) \\ \alpha(1+i) & 0 \end{pmatrix}$$

egenvärden: $a_1 = \sqrt{2}\,\alpha$, $a_2 = -\sqrt{2}\,\alpha$

① $\sqrt{2}\alpha$ ist för α
⇒ antagligen $\cosh\sqrt{2}\alpha$ ...

egenvektorer: $\mathbb{V}_1 = \left(\frac{i-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\mathbb{V}_2 = \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Se ①,② skäl till varför de antagligen inte blir lika.

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{i-1}{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-i-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{i-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i-1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha(\sigma_1+\sigma_2)} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \frac{i-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i-1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{2}\alpha & \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}\alpha \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}\alpha & \cosh\sqrt{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Får alltså inte samma sak. $e^{\alpha\sigma_1}e^{\alpha\sigma_2} \neq e^{\alpha(\sigma_1+\sigma_2)}$.

11/12-15
(LV6)
F11

Ett annat sätt att göra kvantfysik
– Feynmans vägintegral.
(1948)

Bakgrund

Två sätt att göra klassisk partikelmekanik

Hamilton – ett lokalt sätt. RV $x(t=0)$, $\dot{x}(t=0)$

lokal beskrivning av hur partikeln beter sig, stegar fram utifrån RV m. mat små steg.

$$H = K + U$$

$$1D \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Ex: $H = \dfrac{p^2}{2m} + U(x)$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F$$

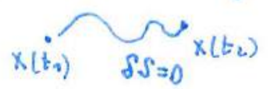
Lagrange – analytisk mekanik

$$L = K - U$$

verkan $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t), \dot{x}(t))$

minsta verkans princip:
$$\delta S = 0$$

– en global beskrivning. RV $x(t_1)$, $x(t_2)$ – vilken bana väljer partikeln? Har begynnelse- & slutpkt så mer global beskr.



Kanonisk operatorformalism för kvantmekanik ("traditionellt" sätt)

= kvantisering av Hamiltonmekanik.

$$\{p, x\} = 1 \xrightarrow{\text{Dirac}} [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar \qquad 1926-27$$

Kvantfysik från Lagrange-mekanik?
Dirac spekulerade 1933.

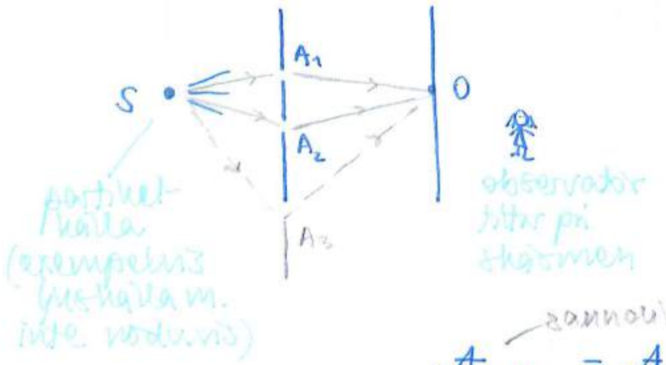
Feynman motiverades & kunde 1948 svara ja!
⇒ vägintegralformuleringen

- användbar för relativistisk kvantmekanik = kvantfältteori
- topologiska effekter i kvantfysik
- ger samband mellan kvantfältteori & statistisk fysik

massor med fördelar!

"...matematiken försöker tala om något för oss..." – finns nog någ. underliggande struktur"

Utgångspunkt – dubbelspaltexperimentet



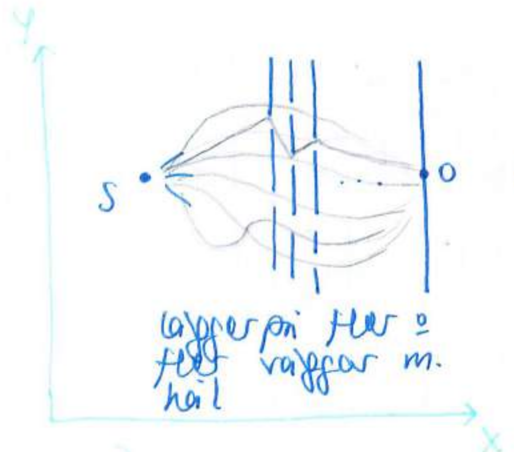
- klassiskt – går antingen genom A_1 eller A_2, ser inget interferensmönster
- kvantmekaniskt – superposition av partikelpositioner eller våg-partikeldualismen

sannolikhetsamplitud

$$\mathcal{A}_{S\to O} = \mathcal{A}_{S\to A_1\to O} + \mathcal{A}_{S\to A_2\to O} + \mathcal{A}_{S\to A_3\to O} + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{\#\text{spalter}} \mathcal{A}_{S\to A_i\to O}$$

$$P(O) = |\mathcal{A}_{S\to O}|^2$$



oändligt antal vägar m. oändligt antal hål = tomrum!

Generaliserar på detta sätt.
måste summera över alla möjliga vägar S → O ändå – vägarna är en slags konstruktion för att förstå det.

$$S = (x_I, y_I) \equiv q_I$$

$$O = (x_F, y_F) \equiv q_F$$

$$\mathcal{A}_{S\to O} = \langle q_F | e^{-iHt} | q_I \rangle \quad (\hbar = 1)$$

slut-tillst. – begynnelse-tillst.

tidsutvecklings-operatorn – tar oss från q_I till q_F

från vad vi redan vet från kanoniska formuleringen

Feynman: uttryck $\langle q_F | e^{-iHt} | q_I \rangle$ som en så kallad vägintegral. $\underbrace{\langle q_F | e^{-iHt} | q_I \rangle}_{(*) = A_{\delta \to 0}}$

Börjar först med att diskretisera tidsintervallet.

$\delta t = t/N$

Trottersönderläggning

$$(*) = \langle q_F | \underbrace{e^{-iH\delta t} \cdot \mathbb{1} \cdot e^{-iH\delta t} \cdot \mathbb{1} \dots \mathbb{1}\, e^{-iH\delta t}}_{N \text{ faktorer}} | q_I \rangle = A_{\delta \to 0}$$

"när man inte vet vad man ska göra – sätt in en 1:a"

$$\mathbb{1} = \int dq \, |q\rangle\langle q|$$

$$\Rightarrow A = \langle q_F | e^{-iH\delta t} \int dq_1 |q_1\rangle\langle q_1| e^{-iH\delta t} \int dq_2 |q_2\rangle\langle q_2| \dots |q_I\rangle =$$

$$= \underbrace{\int \dots \int dq_1 \dots dq_{N-1}}_{= \prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j} \langle q_F | e^{-iH\delta t} | q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}| e^{-iH\delta t} | q_{N-2}\rangle \cdot \langle q_{N-2}| \dots |q_1\rangle\langle q_1| e^{-iH\delta t} | q_I\rangle$$

numrera om index
$1 \to N-1$
$N-1 \to 1$

Låt oss undersöka ett godtyckligt valt matriselement

$$\langle q_{j+1} | e^{-iH\delta t} \cdot \mathbb{1} | q_j \rangle$$

o Låter $H = \hat{p}^2/2m$ (fri partikel, ingen potentiell energi)

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2\pi} \int dp \, |p\rangle\langle p|$$

för att det ska vara konsistent med def. av $\mathbb{1}$ i q (normering).

Sätter in identiteten.

$$\Rightarrow \langle q_{j+1} | e^{-iH\delta t} \cdot \mathbb{1} | q_j \rangle =$$

$$= \langle q_{j+1} | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} \cdot \frac{1}{2\pi}\int dp\, |p\rangle\langle p| q_j \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp\, \langle q_{j+1} | \underbrace{e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} |p\rangle}_{e^{-i\frac{p^2}{2m}\delta t}|p\rangle} \langle p| q_j \rangle =$$

dvs ersätter m. egenvärdet

$\left\{ \hat{O}|\lambda\rangle = O|\lambda\rangle \Rightarrow f(\hat{O})|\lambda\rangle = f(O)|\lambda\rangle \right.$
se senaste räkneövningen (funktioner av operatorer) $\left.\right\}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp\, \langle q_{j+1} | e^{-\frac{ip^2}{2m}\delta t} |p\rangle\langle p| q_j \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{-i\frac{p^2}{2m}\delta t} \underbrace{\langle q_{j+1}|p\rangle}_{e^{iq_{j+1}\cdot p}} \underbrace{\langle p| q_j \rangle}_{e^{-iq_j p}}$$

plana vågor

π-faktor (inte jätte-viktigt)

enligt påstående $\langle x|p\rangle = e^{ixp}$

- VL: $\hat{p}\langle x|p\rangle = \langle x|\hat{p}|p\rangle = \langle x|p|p\rangle = p\underline{\langle x|p\rangle}$
- HL: $\hat{p}e^{ixp} = -i\frac{\partial}{\partial x}e^{ixp} = p\underline{e^{ixp}}$

dvs

$$\langle q_{j+1}| e^{-iH\delta t} | q_j \rangle = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-i\frac{p^2}{2m}\delta t} e^{i(q_{j+1}-q_j)}}_{\text{Gaussisk integral}}$$

Gaussisk integral
– allmän formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{1}{2}iax^2 + iJx} = \sqrt{\frac{2\pi i}{a}}\, e^{-iJ^2/2a}$$

Det följer att

$$\langle q_{j+1}| e^{-i\delta t\, \hat{p}^2/2m} | q_j \rangle = \sqrt{\frac{-im}{2\pi\delta t}}\, e^{i\delta t (m/2)[(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2}$$

Sätt in detta i uttrycket för amplituden A:

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \langle q_F | e^{-iHt} | q_I \rangle =$$

$$= \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{N/2} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k\right) e^{-i\delta t (m/2) \sum_{j=0}^{N-1} [(q_{j+1} - q_j)/\delta t]^2}$$

där

$$q_0 = q_I \ , \ q_N = q_F .$$

Nästa steg: tag gränsen $N \to \infty$

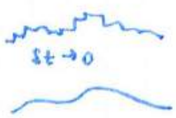
$$\left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right)^2 \xrightarrow[\delta t \to 0]{N \to \infty} \dot{q}^2$$

$$\delta t \sum_{j=0}^{N-1} \dots \xrightarrow[\delta t \to 0]{N \to \infty} \int dt \dots$$

varning: icke-trivialt!

$$\left(-\frac{im}{2\pi\delta t}\right)^{N/2} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k\right) \xrightarrow[\delta t \to 0]{N \to \infty} \int \mathcal{D}(q(t))$$

— integrerar över alla möjliga vägar $q(t)$



tolkar produkten av diskreta integraler i gränsen som integralen över en väg (över alla möjliga vägar $q(t)$)

Vi har alltså

$$\boxed{\mathcal{A}} = \langle q_F | e^{-iHt} | q_I \rangle =$$

$$= \int \mathcal{D}(q(t)) \, e^{i\int_0^t dt' \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q)\right)}_{L}} \quad \text{då} \quad H = \underbrace{\hat{p}^2/2m + U(q)}_{H}$$

lagrangefunken som svarar mot Hamiltonfunken.

$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}(q(t)) \, e^{iS/\hbar}$$

verkan!

$\hbar$ fri sudimensionen.

= viktar varje väg med exp(klassiska verkan) integrerar över alla vägar

<u>Feynmans vägintegral forts.</u>

15/12-15
(LV7)
F12

kommentarer

(1.) $\mathbb{1} = \int dx\, |x\rangle\langle x|$

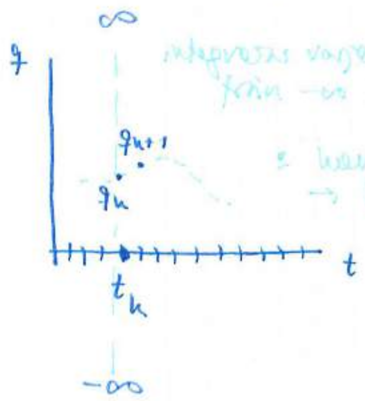
$$\Rightarrow \mathbb{1} = \frac{1}{2\pi}\int dp\, |p\rangle\langle p|$$

$$\Psi(x) \equiv \langle x|\mathbb{1}\Psi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int dp\, \underbrace{\langle x|p\rangle}_{e^{ipx}}\langle p|\Psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp\; e^{ipx}\, \Psi(p)$$

(2.) $$\left(-\frac{im}{2\pi\delta t}\right)^{(N-1)/2}\left(\prod_{k=1}^{N-1}\int dq_k\right)\dots \xrightarrow[\delta t\to 0]{N\to\infty} \int \mathcal{D}q(t)$$

namn på [illegible]



integreras varje q_k från $-\infty$ till ∞

= komponerar [illegible]
→ kont. vägar

→ får alla möjliga vägar från q_I till q_F

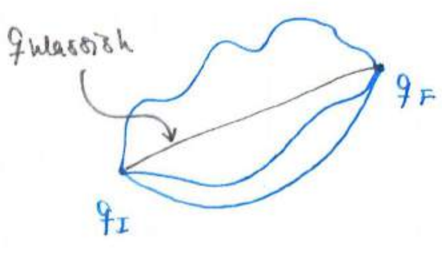
$$\boxed{\langle q_F|\, e^{-iHT/\hbar}\,|q_I\rangle \overset{\text{Feynman}}{=} \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q\; e^{iS/\hbar}}$$

uttrycker en kvantmekanisk funktion med hjälp av den klassiska verkan.

där
$$S = \int_0^T dt\; L(q,\dot{q},t).$$

viktar varje väg med klassiska verkan.

integrerar över ~~[illegible]~~ alla möjliga vägar.



"$\hbar \to 0$" $\Rightarrow$ jättelika fluktuationer för små variationer i S
destruktiv interferens

MEN
– med ett undantag!

För den klassiska banan vet vi att

$$\delta S[q_{klassisk}] = 0$$

$$\Rightarrow S[q_{klassisk}] - S[q_{kl} + \delta_{kl}] = 0$$

så i den lilla "tuben" runt $q_{klassisk}$ fås

$\Rightarrow$ konstruktiv interferens.

Vägintegraler o statistisk fysik

$q_I = q_F$

$$Z = \oint \mathcal{D}[q]\, e^{i\int_0^{T'} dt\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right)}$$

T' – tiden det tar för partikeln att ta sig runt

amplituden för detta kallar vi nu Z

Gör tiden imaginär ("Wick rotation")

$$t = -i\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

$$i\int_0^{T'} dt\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right)}_{\text{Lagrange-fkn}} = i\int_0^{iT'}(-i\,d\tau)\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{i\,d\tau}\right)^2 - V(q)\right) =$$

$$= -\int_0^{iT'} d\tau\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right)}_{\text{Hamiltonfkn}} =$$

generört.

$$= \left\{ iT' = \frac{1}{k_B T} \right\} =$$

$$= \int_0^{1/k_B T} d\tau\, H = \left\{ \begin{array}{l} \text{antag } H \\ \text{stationär} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{H}{k_B T}$$

$$\Rightarrow Z = \oint \mathcal{D}[q]\, e^{-H/k_B T}$$

A.M. Polyakov: Gauge Fields and Strings (kap. 1)

Jämför klassisk statistisk mekanik:

$$Z = \sum_n e^{-E_n/k_B T} =$$

$$= \underbrace{\mathrm{Tr}}_{\text{spår}}\left(e^{-\hat{H}/k_B T}\right) = \sum_n \langle n| e^{-\hat{H}/k_B T} |n\rangle = \sum_n \langle n| e^{-E_n/k_B T} |n\rangle$$

$$\langle n| e^{-\hat{H}/k_B T} |n\rangle$$

"q_F" "q_I"

vi ser att det verkligen är en Feynman-vägintegral.

Hilbertrum forts.

∞

uppräkneligt oändlig (separabel bas) — icke-uppräkneligt oändlig

Kan vi konstruera en bas i $\mathcal{L}^2$ som har ett icke-uppräkneligt antal element?

Ett slags kontinuum av baselement.

$$\mathcal{L}^2 : \{|e_x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}} \overset{\text{fysik}}{=} \{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}} \quad \text{möjligt?}$$

Generaliserad bas.

$$\mathcal{L}^2 \ni |u\rangle = \sum_i u_i |e_i\rangle = \sum_i \langle e_i|u\rangle |e_i\rangle$$

dvs, är detta ett legitimt steg?

$$\int dx \, \langle x|u\rangle |x\rangle = \int dx \, u(x) |x\rangle$$

Vi vet att element i $\mathcal{L}^2$ uppfyller

$$\langle v|u\rangle_{w(x)=1} \overset{\mathcal{L}^2}{\equiv} \int_a^b v^*(x)\, u(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \langle v|x\rangle \langle x|u\rangle \, dx =$$

$$= \langle v| \int_a^b dx |x\rangle\langle x| \, |u\rangle$$

$$\Leftrightarrow \int dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}.$$

$$\Rightarrow |u\rangle = \mathbb{1}|u\rangle = \int_a^b dx |x\rangle \underbrace{\langle x|u\rangle}_{u(x)}$$

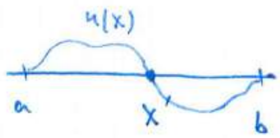
$\Rightarrow$ det är ett OK steg.

Men låt oss nu titta på

$$\langle x'|u\rangle \equiv u(x') = \int_a^b dx \, \langle x'|x\rangle \, u(x)$$

OBS

x integrationsvariabel
x' fix



antag $u(x) = 0$ i x'

men detta säger att värdet av funken i x' fås av integralen över alla värden
dvs det säger att vilket värde man än sätter in, så får man 0.

Dirac löste detta!

- Introducerade deltafunken. definierade enligt

$$\int_a^b u(x) \underbrace{\langle x'|x\rangle}_{\equiv \delta(x'-x)} dx \equiv \begin{cases} u(x'), & x' \in [a,b] \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Matematikers invändningar:

normeringsproblem

$$\| x \| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\delta(0)}$$

$\Rightarrow$ den generaliserade basens element $|x\rangle$ kallas fortfarande "improper states".

- Schwartz (1941?) löste detta genom distributionsteori.

"från generaliserade baser till Diracs deltafkn" i kompletterande materialet — mkt relevant inför tentan! Diverse identiteter m. δ-fkner, derivering osv.

Introduktion till grupptear:

$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ + kompositionsregel ("gruppmultiplikation")

en mängd av element (kan vara vad som helst)

$n = [G]$ gruppens ordning

$n < \infty$: ändlig grupp

$g_i \circ g_j = g_k$

skrivs oftast som $g_i g_j = g_k$

bildar en grupp omm elementen uppfyller Gruppaxiomen:

1. $g_i g_j \in G \quad \forall g_i, g_j$ (slutenhet)
2. $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ (associativa lagen) $\forall g_i, g_j, g_k$
3. $\exists e \in G : e g_i = g_i e = g_i \quad \forall g_i$ (existens av identitetselement)
4. $\forall g_i \, \exists g_i^{-1} : g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$ (existens av invers)

$H \subset G$ är en delgrupp till G om H uppfyller gruppaxiomen.

$\{e\}$ och G själv är triviala delgrupper.

Om $g_i g_j = g_j g_i \quad \forall g_i, g_j$

$\Rightarrow$ Abelsk grupp. som kan vara kont. eller inte kont.

Om $G = \{ g_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$ + gruppaxiomen uppfyllda

$\Rightarrow$ kontinuerlig grupp som i sin tur kan vara abelsk eller icke-abelsk.

Varför intressant i fysiken?

förutom i kristallografi.

I fysiken arbetar vi nästan alltid med symmetrigrupper, dvs grupper där elementen är symmetritransformationer

- transf. på objekt s.a. objektet är samma (ser likadant ut) före & efter transformationen.

  ex:  $G = \{ g_1 = \pi/2\text{-rotation}, \; g_2 = \pi\text{-rotation}, \dots \}$

- transf. på fysikaliska lagar, teorier, modeller, ekvationer

  ex: $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$

  $$G = \{ g_\gamma = \{ x \to x' = \gamma(x - vt),\; y \to y,\; z \to z,\; t \to \gamma(t - vt/c^2) \}, \dots \}$$

  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \in \mathbb{R}$

  kontinuerlig grupp
  Lorentzgruppen (-transformationen).

dvs veta vilka symm.transf.

Vet vi symmetrierna hos en lag/teori/modell/ekvation, går det att med hjälp av gruppteori göra fysik på ett mkt mer effektivt sätt.

16/12-15
LV7
F13

Gruppteori forts.

Permutationsgruppen

- ett viktigt exempel på en ändlig grupp.

$$S_n = \{P_1, P_2, \dots, P_{n!}\} \quad , \quad [S_n] = n!$$

Tar ett godtyckligt element

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

1:a elementet 2:a elem. 3:e elem
i nya placeringen

ex: $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3} \longrightarrow \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kommuterar inte:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \neq QP$$

ex:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{cykel} \\ 1\to 1 \\ 2\to 3 \\ 3\to 2}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{cykel} \\ 1\to 3 \\ 3\to 2 \\ 2\to 1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S_n$ icke-abelsk.

$\cancel{(1)}(2\,3) \qquad (1\,3\,2)$

denna behöver man inte skriva med

Varje element i S_n kan alltså skrivas som en produkt av disjunkta cykler.

Varför är permutationsgruppen intressant?

Cayleys teorem

Varje grupp av ordning n är isomorf med en delgrupp till S_n.

isomorf: kan matcha elementen 1:1
: gruppmultiplikationen bevarad. (gruppstrukturen)

produkten av el. i ena gruppen har en motsvarande bild i andra gruppen.

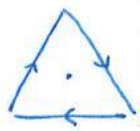
Andra instruktiva ex. på ändliga grupper

- Cykliska gruppen C_n

= symmetrigruppen av rotationer av en liksidig polygon med n orienterade sidor

↳ kan sätta pilar på dem, riktningen ska vara bevarad vid transformationen.

ex: C_3



$C_3 = \{a, b, e\}$

a: $2\pi/3$-rotation runt.

b: $4\pi/3$-rot. runt.

e: enhetselementet (dvs man gör ingenting) = rotation 2π runt. = rot. 0 runt.

multiplikationstabellen ges av

$0 + 2\pi/3$ $\quad$ $0 + \frac{4\pi}{3}$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$\frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

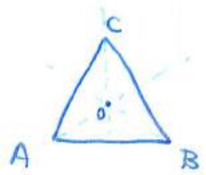
gör den ena transformationen efter den andra: typ det som att gruppelementen multipliceras m. varandra.

testa isomorfin hos två grupper: skriva upp multiplikationstabellen för respektive grupp & jämföra – om samma är de isomorfa.

- Diedergruppen D_n

= samma som C_n men utan orientering på sidorna.

ex: D_3



roteras ut ur papprets plan kring de olika axlarna

$$D_3 = \{\underbrace{a, b, e}_{\text{de andra gäller dock fortfarande}}, c_1, c_2, c_3\}$$

c_1: π-rotation runt OA, c_2: OB, c_3: OC

Viktiga begrepp

- Konjugering

$a, b \in G$ är konjugerade om $\exists g \in G$ s.a. $a = gbg^{-1}$ ← konjugerande element

⇒ "a, b ekvivalenta under konjugering"

- Ekvivalensrelation $\sim$ betecknar ekvivalens

definieras av (i) $a \sim a$ reflexiv

att gruppelement a är ekvivalent med sig själv

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ symmetrisk

(iii) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ transitiv

ex a tar samma kurs som b, b tar samma kurs som c → måste inte betyda att a tar samma kurs som c. Alltså ingen ekvivalensrelation.

Påstående: konjugering är en ekvivalensrelation.

Test: (i) $a \sim eae^{-1} = a$ OK

(ii) $a = gbg^{-1} \Rightarrow g^{-1}ag = b \Rightarrow b = hah^{-1},\ h = g^{-1}$ OK

(iii) $a = gbg^{-1},\ b = hch^{-1}$

$\Rightarrow a = g(hch^{-1})g^{-1} = (gh)c(h^{-1}g^{-1}) =$

$= (gh)c(gh)^{-1} \equiv kck^{-1}$ a konjugerad även med c alltså.

$\Rightarrow a \sim c$ OK

• Ekvivalensklass

Välj $a \in G$: $(a) = \{ b \in G \mid b \sim a \}$

ekvivalensklass map. a

innehåller alla element b som är ekvivalenta m. a

$(b) = \{ c \in G \mid c \sim b \}$

Ekvivalensklasser är disjunkta – kan inte innehålla samma element.

dvs b är inte ekvivalent m. a

Antag att $b \notin (a) \Rightarrow (a) \cap (b) = \emptyset$

Bevis: antag $\exists d \in (a) \cap (b)$

$\Rightarrow d \sim a$ och $d \sim b \Rightarrow a \sim b$

Ex: Konjugatklasser

$(a) = \{ b \in G \mid b = gag^{-1}, \exists g \in G \}$

Ex 2: Sidoklass (viktigt!!)

delgrupp $H = \{ h_1, h_2, \dots, h_r \} \subset G$

välj $g \in G$, bilda vänsterklass av H map. g:

$gH = \{ gh_1, gh_2, \dots, gh_r \}$

analogt för högerklass.

a och b är ekvivalenta om de är element i samma sidoklass.

Test: (i) $a \in aH$ OK ty $e \in H$

(ii) $b \in aH \overset{?}{\Rightarrow} a \in bH$

$b \in aH \Rightarrow \exists h : b = ah$
$\Rightarrow a = bh^{-1}, \; h^{-1} \in H$
$\Rightarrow a \in bH$ OK

(iii) $b \in aH, \; c \in bH \overset{?}{\Rightarrow} c \in aH$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$b = ah, \; \exists h \in H \qquad c = bh', \; \exists h' \in H$

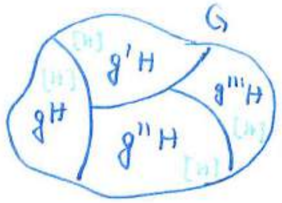
$\Downarrow$

$c = a\underbrace{hh'}_{\in H} \Rightarrow c \in aH$ OK

Varje sidoklass innehåller lika många element som den definierande delgruppen.

Bevis: $gH = \{gh_1, gh_2, \dots, gh_r\}$ kan inte ha fler element iaf (trivialt.), men färre (ex $gh_1 = gh_2$)

Antag $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ *
↑ motsägelse.



välj H; välj elem. g; om inte uttömt G så välj nytt element g' osv.

$$S[H] = [G]$$

\# sidoklasser

för att uttömma, få med, hela gruppen

⇒ Lagranges teorem

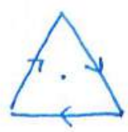
En grupp av primtalsordning kan inte ha äkta delgrupper.

ex $[G] = 17$ $\quad$ ($[G] = 15$ funkar)

Representationsteori

= teori om hur man representerar grupper i termer av matriser

Ex: C_3 igen.



$$C_3 = \{\underbrace{a}_{2\pi/3}, \underbrace{b}_{4\pi/3}, e\}$$

rotationsmatris

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associerar gruppelementen med matrisen:

$a \to R(2\pi/3)$
$b \to R(4\pi/3)$
$e \to R(0)$

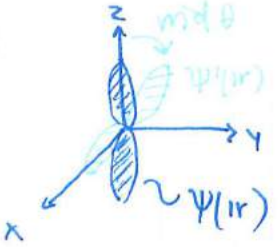
representationen av gruppelementen

Poängen? Bara en explicit realisering av vad vi redan visste?

- Representationsteorin nyttig när man går till kvantmekanik!

  - ex i övergången mellan koordinatrum & Hilbertrum, då är det rent av nödvändigt att ha.

Ex:



Väte i 2p-tillstånd.

Rotera H(2p)-orbitalen : $\psi(\mathbf{r}) \to \psi'(\mathbf{r})$

rotationsmatris

Rotera koordinatsystemet: $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$

allting fullständigt ekvivalent i det nya systemet

$\Rightarrow \psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r}')$

tar bort ', relationen densamma...

$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r})$

$|||$

$\langle \mathbf{r} | \psi' \rangle$!

dvs R^{-1} (som jobbar i koordinatrummet) inducerar en transformation i Hilbertrummet ($\psi \to \psi'$ i $\mathcal{H}$).

Tittar nu på energiegenfunktionerna för väte

$u_{nlm}(\mathbf{r}) = R_n(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$

där $Y_{lm}(\theta, \varphi) = N e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$

normering

$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$: n, l opåverkade ty $H u_{nlm}(\mathbf{r}) = E_n u_{nlm}(\mathbf{r})$

rotation.

skalär-operatorer $\mathbb{L}^2 u_{nlm}(\mathbf{r}) = \hbar^2 l(l+1) u_{nlm}(\mathbf{r})$

m påverkas ty $L_z u_{nlm}(\mathbf{r}) = \hbar m\, u_{nlm}(\mathbf{r})$

Hur ser den transformerade vågfunktionen ut?

$$u'_{nlm}(\mathbf{r}) = u_{nlm}(R^{-1}\mathbf{r}) =$$

$$= \sum_{m'} \underbrace{D^{l}_{mm'}(R)}_{} u_{nlm'}(\mathbf{r})$$

linjärkombination av vågfunktioner med index m'

summationsindex

utvecklingskoeff., matriselement i den matris som representerar R i Hilbertrummet!

Representation D av en grupp

$$G = \{g_1, g_2, \dots\} \xrightarrow{\text{homomorfism}} D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$$

bevarad gruppstruktur.

$g_1 g_2 = g_3$

$D(g_1)\,D(g_2) = D(g_3)$

$D(g_i)$ $n \times n$ inverterbara matriser

n dimensionen på vektorrummet

kan välja isomorfism = trogen representation

bevarad gruppstruktur

+ 1-1-förhållande.

D, D' ekvivalenta:

$$\exists S : D'(g) = S\,D(g)\,S^{-1} \quad \forall g$$

Räkneövning

16/12 -15
(LV7)
R7

Tillämpning av ortogonala polynom

Maxwells ekvationer, tidsoberoende i vakuum

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Första ekvationen ger att

$$E = \nabla \Phi$$

vilket vid insättning i ekvation två ger

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 0$$

så Φ uppfyller Laplace ekvation.

Ansätt (direkt i sfäriska koordinater) enligt variabelseparation

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi).$$

Laplace ekvation för Φ ger då tre ekvationer för U, P, Q.

... för $U(r)$ hittar man $U(r) = Ar^{l+1} Br^{-1}$

för P, Q: $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0$$

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2$$

Om vi har symmetri i φ-led så måste $m = 0$
(dvs inget φ-beroende, $Q(\varphi) = \text{const.}$)

Gör variabelsubstitutionen $x = \cos\theta$:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$$

antar φ-symmetri.

$$-\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta \frac{dP}{dx}\right) + l(l+1)P = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + l(l+1)P = 0$$

Detta är ett Sturm-Liouville-problem.

Lösningen till denna diffekv. ges av Legendre-polynom, som bildar en bas för $\mathcal{L}^2([-1,1])$:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

Så en lösning till Maxwells ekvationer ges nu av

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right) P_l(\cos\theta) \quad x = \cos\theta$$

Linjärkomb. av lösningarna = summan

unikhet hos lösn. ⇒ kan för ett specifikt problem hitta lösning som ger oss konst. A_l, B_l, & sägga att dessa gäller även för hela rummet.

Uppvärmning:

ekvationen för θ är SL-problem, på formen

$$(p(x)f')' + \lambda_l f = 0$$

$$(p(x)f')' = -\lambda_l f$$

Om vi multiplicerar med en annan lösning g och integrerar

$$\int g(pf')'\,dx = -\lambda_l \int gf\,dx$$

Partialintegrerar i VL

$$\left[\quad\right] - \int pg'f'\,dx = -\lambda_l \int fg\,dx$$

$p(x)=0$ i änd-punkterna så första termen blir 0.

Gör precis samma sak men börja med g:

$$-\int pg'f'\,dx = -\lambda_g \int fg\,dx$$

Subtrahera ekvationerna!

$$0 = (\lambda_f - \lambda_g)\int_{-1}^{1} fg \, dx$$

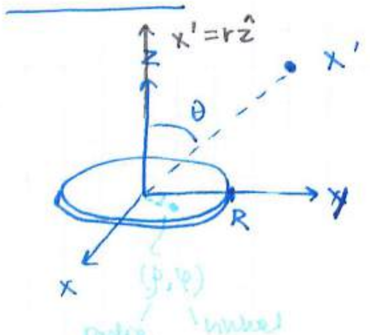
$\Rightarrow$ För $\lambda_f \neq \lambda_g$ (dvs olika egenvärden) måste f och g vara ortogonala! — integralen motsvarar skalärprodukten i det oändligdimensionella fallet (nu oändligt många punkter mellan -1 & 1)

Två olika lösn. på SL måste alltså vara ortogonala (vid olika egenv.)

<u>Ex</u>: En tunn, platt, ledande, cirkulär skiva med radie R hålls vid en fix potential V. Om det är givet att laddningsdistributionen ges av

$$\sigma(\rho) = \frac{c}{\sqrt{R^2-\rho^2}},$$

hitta elektriska potentialen för $r > R$.



– vill hitta elektr. potentialen här ute, då plattan hålls vid konst. pot. V

$x' = x'(r, \theta, \varphi)$ där $r > R$.

$\sigma \to \infty$ i $\rho = R$
men ytintegralen över hela skivan ger ändlig total laddning, lugnt.

Totala laddningen av skivan

$$Q = \int_{\text{skivan}} \sigma(\rho) \, dA =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \frac{c \cdot \rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$= 2\pi \left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R \cdot c = 2\pi R c.$$

Vi har i detta problem φ-symmetri

→ enligt föregående resonemang ges en lösning av

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

Ser direkt att vi måste sätta $A_l = 0$ för fysikalisk lösning (annars obegränsat).

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta).$$

Hur löser vi för B_l?

Kom ihåg att potentialen från en punktladdning vid $\vec{x}$ ges av

$$V = \frac{Q}{|x - x'|} = V(x')$$

Bruteforce-lösning ges därmed av

$$\Phi(r,\theta) = \int_{\text{skiva}} \frac{1}{|x - x'|} \overbrace{\sigma(x)\, dA}^{\text{laddning } Q} =$$

koord. på skivan

$x'(r,\theta)$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \frac{1}{\underbrace{|x(\rho,\varphi) - x'(r,\theta)|}_{\text{avst mellan punkten } x \text{ på skivan \& } x' \text{ ute i rummet.}}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\varphi$$

Jobbig integral... men vi kan ju ta r, θ så att den går att lösa → matchar m. serieutvecklingen → hittar koeff. B_l, vet att lösn. är unik.

Tittar på linjen $x' = r\hat{z}$, $\theta = 0$.

$$|x - x'| = \sqrt{r^2 + \rho^2}$$

Integralen kan då evalueras enligt

$$\Phi(r,0) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2}}\,\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

Använd

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^n \qquad \text{för} \quad |x|<1$$

där $\displaystyle\binom{-1/2}{n} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!\,2^n}$

Vi vet att $r > R \geq \rho$, så kan skriva om

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{\rho^2}{r^2}}} = \left\{ r>\rho \Rightarrow \left|\frac{\rho^2}{r^2}\right|<1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{\rho^{2n}}{r^{2n}}$$

Sätt in i integralen:

$$\Phi(r,0) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{r^{2n+1}}\,\frac{\rho^{2n+1}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho\,d\varphi$$

där $\displaystyle\int_0^R \frac{\rho^{2n+1}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho = \left[-\frac{1}{n}\rho^{2n}\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R +$ = 0 i båda ändpunkterna för alltid någon av faktorerna som är 0.

$$+\ \frac{2n}{2n+1}R^2\int_0^R \frac{\rho^{2n-1}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho$$ sänker graden med 2 steg

iterativt $\Rightarrow$

$$\int_0^R \frac{\rho^{2n+1}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho = (R^2)^n\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho =$$

$$= \ldots \left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R =$$ slutar iterera då vi har ρ kvar (vid $n=1$)

$$= R^{2n+1}\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}$$

Vi har alltså

$$\phi(r,0) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{r^{2n+1}} \frac{\rho^{2n+1}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\, d\rho\, d\varphi =$$

kan bryta ut en faktor 2 från alla

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!\,2^n} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}} (-1)^n \frac{\cancel{(2n-1)(2n-3)\ldots}}{\cancel{n!}\,\cancel{2^n}} \frac{\cancel{n(n-1)(n-2)\ldots}\,\cancel{2^n}}{(2n+1)\cancel{(2n-1)}\cancel{(2n-3)}\ldots}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ldots}{r^{2n}} \ldots$$

jämna potenser av r

Jämför med allmänna lösningen

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$\phi(r,0) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(1) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l} P_l(1)$$

Vi ser att $B_l = 0$ för l udda. Använd sen att $P_{2n}(1) = 1$.

$$\Rightarrow \phi(r,0) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l} r^{-2l}$$

Vi kan identifiera

$$B_{2l} = \frac{R^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n = \frac{R^{2l+1}}{2l+1}(-1)^l$$

$$\Rightarrow \phi(r,0) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^{2l+1}}{2l+1} (-1)^l \right) r^{-2l} P_{2l}(1)$$

$$\Rightarrow \phi(r,\theta) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^{2l+1}}{2l+1} (-1)^l \right) r^{-2l} P_{2l}(\cos\theta)$$

Så lösningen i hela rummet $r > R$ är hittad.

18/12-15
(LV7)
F14

Representationsteori forts.

(Fullständigt) reducerbar rep D

Givet $D^{(1)}$ & $D^{(2)}$

inget index g så representerar hela mängden

4x4

Ex: $D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$

2x2

verkar på 4-dim underrummet

verkar på 2-dim underrummet

dvs kan delas in i block-diagonaliserad matris, där varje block också är en representation.

Mer allmänt

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & & & & \\ & D^{(2)}(g) & & 0 & \\ & & D^{(1)}(g) & & \\ & 0 & & D^{(3)}(g) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= 2D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus 4D^{(3)}(g) \oplus \ldots$$

$D^{(1)}$ förek. 2 ggr

Ej reducerbara reps kallas irreducibla representationer – irreps.

Central uppgift inom representationsteori: plocka ut de irreducibla repsen.

Några teorem

1. Maschkes teorem

$\exists S : D'(g) = S D(g) S^{-1}$

Varje rep är ekvivalent med en unitär rep

$\Leftrightarrow \forall D(g) : D^{+}(g) = D^{-1}(g)$

$\Uparrow$
D

⇒ räcker att jobba med unitära reps.

2. Schurs första lemma

D irrep till G: om $BD(g) = D(g)B \quad \forall g \in G$
$\Rightarrow B = \lambda \mathbb{1}, \ \lambda \in \mathbb{C}$

3. Schurs andra lemma

D, D' inekvivalenta irreps: om $BD(g) = D'(g)B \quad \forall g \in G$
$\Rightarrow B = 0$

4. Fundamentala ortogonalitetsteoremet

Givet G, ∃ irreps $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}, \dots$

$$\sum_{g \in G} \left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g) \right)^* D^{(j)}_{\gamma\delta}(g) = \frac{[G]}{n_i} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{ij}$$

antal element / gruppens ordn.

väljer konkreta matris element

irreps till G

dim av $D^{(i)}$, dvs $D^{(i)}(g)$ är $n_i \times n_i$-matris

kan lika gärna skriva n_j, specificerar inte detta. Ändå δ_{ij} bredvid så kmr inte spela ngn roll.

$$\left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_1) \ D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_2) \ \dots \ D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_{[G]}) \right)$$

[G]-dim-vektor
alla dessa ortogonala enl. 4

finns n_i^2 sådana vektorer, ty $D^{(i)}(g)$ är en $n_i \times n_i$ - matris.

Totalt

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_m^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i^2 \leq [G]$$

$D^{(1)}(g)$ $D^{(2)}(g)$

antal inekvivalenta irreps

tänk $\mathbb{R}^3$: max 3 ortogonala vektorer – nu [G]-dim ⇒ max [G] st ortogonala.

⇒ finns bara ett ändligt antal irreps till en grupp.

Kan visa omvända olikheten (≥)
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} n_i^2 = [G].$$

Ex: Irreps av S_3. – finns 3 st.

konjugat-klasser

gruppelementen

	g	"A_1" $= D^{(1)}$	"A_2" $= D^{(2)}$	"E" $= D^{(3)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
"I"	$(1)(2)(3)$	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	1	2
"A"	$(1\,2\,3)$	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	1	-1
	$(1\,3\,2)$	1	1	.	1	1	-1
"C"	$(13)(2)$	1	-1	.	1	-1	0
	$(12)(3)$	1	-1	.	1	-1	0
	$(1)(23)$	1	-1	.	1	-1	0

konjugerade element har samma karaktärer

den triviala representationen

Omöjligt att skriva ner allt... Smidigt sätt att karakterisera en representation:

– Karaktärer.

$$\chi^{(i)}(g) = Tr\left(D^{(i)}(g)\right) = \sum_m D^{(i)}_{mm}(g)$$

spår = summan av alla diagonalelement (basoberoende)

- Konjugerade element har samma karaktärer:

$$g_1 = h g_2 h^{-1}, \quad D(g_1) = D(h)\, D(g_2)\, D(h^{-1})$$

$$\Rightarrow \chi(g_1) = Tr\left(D(g_1)\right) = tr\left(D(h)\, D(g_2)\, \underbrace{D(h^{-1})}_{= D^{-1}(h)}\right) =$$

$$= tr\left(\underbrace{D^{-1}(h)\, D(h)}_{=1}\, D(g_2)\right) = tr\left(D(g_2)\right) = \chi(g_2).$$

Ortogonalitetsteoremet

$$\Downarrow$$

antal konjugatklasser

$$\sum_{k=1}^{s} p_k \left(\chi^{(i)}(C_k)\right)^* \chi^{(j)}(C_k) = [G]\, \delta_{ij}$$

antal element i C_k — konjugatklass $C_1, C_2, \ldots$

dvs ortogonalitet hos karaktärer, av irreps.

Bevis:

$$\underbrace{\sum_{\alpha,\gamma} \delta_{\gamma\delta}\, \delta_{\alpha\beta}}_{\text{multipl. på båda sidor}} \sum_{g\in G} \left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\right)^* D^{(j)}_{\gamma\delta}(g) = \underbrace{\sum_{\alpha,\gamma} \delta_{\gamma\delta}\, \delta_{\alpha\beta}}\, \frac{[G]}{n_i} \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\beta\gamma}\, \delta_{ij}$$

$\alpha\alpha \qquad \gamma\gamma$

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$

$$= \sum_{g} \chi^{(i)*}(g)\, \chi^{(j)}(g) = \frac{[G]}{\cancel{n_i}} \cancel{n_i}\, \delta_{ij} \qquad \boxtimes.$$

Tänk på karaktärerna i en irrep som en s-dimensionell vektor

$$\left(\chi^{(i)}(C_1)\ \chi^{(i)}(C_2), \ldots, \chi^{(i)}(C_s)\right)$$

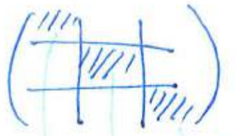
där alla dessa vektorer är ortogonala (se följden av ortogonalitetsteoremet ovan).

$\Rightarrow$ max s stycken (inekvivalenta) irreps.

Kan visa:

$$\#\,\text{irreps} = \#\,\text{konjugatklasser} \ (= s)$$

Givet en grupp G (i fysiken: en symmetrigrupp)
– vi konstruerar en rep D av G & frågar oss vilka irreps som finns inom denna (vilka den är uppbyggd av).

$D(g) =$ 

motsvarar byggstenar inom naturen
– ex kvantpartiklar inom kvantfysiken osv.

$$D(g) = c_a D^{(a)}(g) \oplus c_b D^{(b)}(g) \oplus \dots$$

plockar ut matriselementet som svarar mot g ur representationen

multiplicitet
– hur många ggr en irrep förekommer inom en representation. (Typiskt = 0)

Formel för att ta fram multipliciteten på ett systematiskt sätt...

$$\chi(C_k) = c_a \chi^{(a)}(C_k) + c_b \chi^{(b)}(C_k) + \dots$$
$$= \sum_\mu c_\mu \underbrace{\chi^{(\mu)}(C_k)}_{\equiv \chi_k^{(\mu)}}$$

– skrivs ofta $\mu, \nu = i, j \dots$ i litteraturen.

multiplicitet

$$\Rightarrow \sum_k \rho_k (\chi^{(\nu)}(C_k))^* \chi(C_k) = \sum_k \sum_\mu \rho_k (\chi^{(\nu)}(C_k))^* c_\mu \chi^{(\mu)}(C_k)$$

$$= \{\text{ortogonalitet hos karaktärer}\} =$$

$$= [G] \sum_\mu \delta_{\mu\nu} c_\mu =$$

$$= [G] c_\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{c_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k \rho_k (\chi^{(\nu)}(C_k))^* \chi(C_k)}$$

multipliciteten av $D^{(\nu)}$ i D.

Vet alltså hur man ska ta fram de minsta beståndsdelarna, givet en symmetri!

Ex: Clebsch – Gordan – sönderläggningar

Tänk två spinn 1/2 - partiklar

$$\left(\tfrac{1}{2}\right) \otimes \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ spinn upp $\quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ spinn ner $\quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad |\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

får de 4 bas-vektorerna för rummet.

$$\left(\tfrac{1}{2}\right) \otimes \left(\tfrac{1}{2}\right) = \underbrace{(0)}_{\text{singlett-repres.}} \oplus \underbrace{(1)}_{\text{triplett-repres.}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad D(g) = \left(\begin{array}{c|c} 1\times 1 & \\ \hline & 3\times 3 \end{array}\right)$$

Kompletterande material:

Variationskalkyl med tvång

- se föreläsning 30/11-15, Ex: Kvantmekanik som nås här Schrödinger härledde tidsoberoende (stationära) Schrödingerekv. på precis det sätt som beskrivs nedan.

Betrakta problemet att göra funktionalen I stationär:

$$I = \int f(\underbrace{y_1, \dots, y_m}_{\text{"}y_i\text{"}};\ \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y_m}{\partial x_n}}_{\text{"}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\text{"}};\ \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{"}x_j\text{"}})\ \underbrace{dx_1 \dots dx_n}_{\text{"}dx_j\text{"}}$$

$$\equiv \int f(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j)\, dx_j$$

$$\delta I = 0 \qquad (*)$$

under tvången

$$\varphi_k(y_i, x_j) = 0, \quad k = 1, \dots, l \quad (**)$$ $\{y_i\}$ ej längre oberoende

Lagrangemultiplikator

$$(**) \overset{\text{trivialt}}{\Rightarrow} \int \lambda_k^{(x_j)} \varphi_k(y_i, x_j)\, dx_j = 0$$

$$\Rightarrow \delta \int \lambda_k^{(x_j)} \varphi_k(y_i, x_j)\, dx_j = 0 \qquad (***)$$

$$(*), (***) \Rightarrow \delta \int \underbrace{\left[f(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j) + \sum_k \lambda_k^{(x_j)} \varphi_k(y_i, x_j) \right]}_{\equiv g(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j)} dx_j = 0$$

Istället för att redan nu försöka bestämma $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ (som för en vanlig funktion) så kan vi slutsvidare låta $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ vara godtyckliga och nu bara göra observationen att

$$g(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j)$$

uppfyller Eulerekvationerna:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_j} \frac{\partial g}{\partial y_i / \partial x_j} = 0 \qquad i = 1, \dots, m.$$

som har lösningar för bara vissa värden på $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. jmf egenvärden till egenvärdesekvationer

Kompletterande material:

Ortogonala polynom

Rodrigues generaliserade formel:

$$\boxed{F_n(x) = \frac{1}{k_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(w(x)\,s(x)\right) \quad , \quad n=0,1,2,\dots}$$

konst. som beror på n

- F_1 första gradens polynom $\in \mathcal{L}^2_w[a,b]$
- $s(x) \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ av graden $n \le 2$ – stödfunktion
- $w(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ – viktfunktion
- $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0$

$$\Downarrow$$

$F_n(x)$ polynom av grad n ortogonalt mot varje annat polynom $P_k(x)$ av grad $k<n$, dvs

$$\int_a^b P_k(x)\,F_n(x)\,w(x)\,dx = 0 \quad , \quad k<n.$$

$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ bildar en separabel bas i $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ och ger för olika val av $s(x)$, $w(x)$ – de klassiska ortogonala polynomen.

I. $s(x)$ av grad 0

Välj
$a=-\infty$, $b=\infty$ $\quad [-\infty,\infty]$
$s(x)=1$
$w(x)=e^{-x^2}$
$k_n=(-1)^n$

$\Rightarrow$ Hermitepolynomen

$$\boxed{F_n(x) = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)}$$

Rekursionsformel (Riffig)

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x)$$

$H_n(x)$ är lösningen till Hermites ODE

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{d H_n(x)}{dx} + 2n\, H_n(x) = 0$$

Fysiktillämpning:

egenfunktionen till kvantmekaniska harmoniska oscillatorn.

$\underline{II}$. $\underline{s(x) \text{ av grad } 1}$

Välj
$$\begin{cases} a=0,\ b=\infty & [0,\infty] \\ s(x)=x \\ w(x) = x^{\nu} e^{-x}, & \nu > -1 \\ h_n = n! \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Laguerrepolynomen

$$\boxed{F_n(x) = L^{\nu}(x) = = \frac{1}{n!} x^{-\nu} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\nu} e^{-x}\right)}$$

Rekursionsformel

$$(n+1)\, L_{n+1}^{\nu} = (2n+\nu+1-x)\, L_n^{\nu} - (n+\nu)\, L_{n-1}^{\nu}$$

$L_n^{\nu}(x)$ är lösningen till

$$x \frac{d^2 L_n^{\nu}(x)}{dx^2} + (\nu+1-x) \frac{d L_n^{\nu}}{dx} + n L_n^{\nu} = 0$$

Fysiktillämpning:

radialdelen av vågfunken för enelektronatomer

$\underline{III}$. $\underline{s(x) \text{ av grad } 2}$

Välj
$$\begin{cases} a=-1,\ b=1 & [-1,1] \\ s(x) = 1-x^2 \\ w(x) = (1+x)^{\mu}(1-x)^{\nu} \\ \mu, \nu > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Jacobipolynomen

$$F_n(x) = P_n^{\mu,\nu}(x)$$

Jacobipolynomen är en stor klass som innehåller flera typer av ortogonala polynom, beroende på valet av μ, ν.

- $\mu = 0 = \nu$: Legendrepolynomen

$$\boxed{P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right]}$$

$$\left[k_n = (-1)^n / 2^n n!\right]$$

Rekursionsformel

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

ODE

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n+1) P_n = 0$$

Fysiktillämpning:

löser Laplace-ekvationen i sfäriska koordinater (vinkelberoendet).

- $\mu = \lambda - \frac{1}{2}$, $\nu = \lambda - \frac{1}{2}$: Gegenbauerpolynom

$$C_n^{\lambda}(x), \quad \lambda > -1/2$$

Fysiktillämpning:

gravitationsteori

- $\mu = -\frac{1}{2} = \nu$: Chebyshevpolynom T_n
- $\mu = +\frac{1}{2} = \nu$: Chebyshevpolynom U_n

Fysiktillämpning: interpolationsformler för analys av mätdata.

Kompletterande material:

Egenskaper hos deltafunktionen

Def. Diracs deltafkn:

$$\delta(x-x') \equiv w(x)\langle x'|x\rangle$$

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x')\,dx = f(x') \quad , \quad x \in [a,b]$$

1) Deltafkn kan representeras som ett gränsvärde av vanliga funktioner, t ex

$$\delta(x-x') = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-(x-x')^2/\varepsilon}$$

$$\delta(x-x') = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin t(x-x')}{x-x'}$$

2) Deltafkn är derivatan av stegfkn:

$$\delta(x-x') = \frac{d}{dx}\,\theta(x-x')$$

3) Fouriers integral:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')t}\,dt$$

ty

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$f(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} f(k)\,dk$$

$$\Rightarrow f(x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx\,dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)}\,dk\right)}_{\delta(x'-x)} f(x)\,dx.$$

4) Derivatan av en deltafunktion

$$\boxed{\delta'(x-x') = -\delta(x-x')\frac{d}{dx}}$$

ty

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x')\,dx}_{f(x')} = \{\text{flytta in derivatan, ok}\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\delta(x-x')\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x-x')\,dx =$$

$$= 0 \quad \text{ty} \quad \frac{d}{dx} f(x') = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x-x')\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\delta(x-x')\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\delta'(x-x')}\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\underline{-\delta(x-x')\frac{d}{dx}}\Big) f(x)\,dx$$

5) Andra identiteter

- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
- $\delta(g(x)) = \begin{cases} 0 & \text{om } g(x) \neq 0 \ \forall x \\ \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|} & \text{om } g(x_0) = 0 \end{cases}$

generalisering

- $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad g(x_i) = 0, \quad \forall i$
- $\frac{d}{dx}\delta(-x) = -\frac{d}{dx}\delta(x)$

Kompletterande material:

Grupp- o representationsteori

Ex: konstruera en 3D representation D av S_3

konjugat-klasser

$$C_1: \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2: \quad (123) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (132) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3: \quad (13)(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S_3 har 3 irreps: $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$. Det följer att

$$D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus c_3 D^{(3)}.$$

Vad är multipliciteterna c_1, c_2, c_3?

$$c_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k \rho_k \chi^{(\nu)}(C_k)^* \chi(C_k)$$

(ρ_k: antal element i C_k)

$$\chi^{(i)}(g) = Tr\Big(\underbrace{D^{(i)}(g)}_{\text{rep av } g \in G}\Big) = \sum_\alpha D^{(i)}{}_{\alpha\alpha}(g)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{[G]}\left(\rho_1 \chi^{(1)}(C_1)^* \chi(C_1) + \rho_2 \chi^{(1)}(C_2)^* \chi(C_2) + \rho_3 \chi^{(1)}(C_3)^* \chi(C_3)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\overset{\text{el. i } C_1}{1} \cdot \underline{1} \cdot \underbrace{3}_{1+1+1 \text{ i } C_1} + \overset{\text{el. i } C_2}{2} \cdot \underline{1} \cdot \underbrace{0}_{0+0+0 \text{ i } C_2} + \overset{\text{el. i } C_3}{3} \cdot \underline{1} \cdot \underbrace{1}_{0+1+0,\ 0+0+1,\ 1+0+0 \text{ i } C_3}\right) = 1$$

mitten-1:an i varje produkt kommer från att $D^{(1)} = 1$ i alla tre klasserna.

$$c_2 = \ldots = 0$$

$$c_3 = \ldots = 1$$

Det vill säga

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(3)}.$$