MATEMATISK FYSIK!

1/11

I INTEGRALER:

1. Härleda en diff. elevation

t. ex $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \left\{ = \frac{\pi}{2} \right\}$

def. en mer allmän $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin x}{x} dx$

$I'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx = -\operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-\alpha x + ix} dx = -\operatorname{Im} \frac{1}{\alpha - i} =$

$= -\operatorname{Im} \frac{\alpha + i}{\alpha^2 + 1} = -\frac{1}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + 1} = -\arctan \alpha + C$

men $I(\infty) = 0 \Rightarrow C = \pi/2 \Rightarrow$

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha \Rightarrow I = I(0) = \frac{\pi}{2}$

2. Tricks!

$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty dx \, e^{-\alpha x^2} \Rightarrow I_0^2(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \, e^{-\alpha(x^2+y^2)}$

$= \{\text{polära koord.}\} = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{-\alpha r^2} = 2\pi \frac{-1}{2\alpha} \int_0^\infty \left(-2\alpha r e^{-\alpha r^2}\right) dr$

$= \frac{2\pi}{2\alpha} \Rightarrow I_0(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty dx \, x^2 e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} I_0(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$I_4(\alpha) = \dots = \frac{1 \cdot 3}{(2\alpha)^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

3. Symmetri

ex. $\vec{I}(\vec{E}) = \int d^d p \, \vec{p}(\vec{p}\vec{E}) e^{-\alpha p^2}$

$(d = 1, 2, 3 \dots)$

$\vec{I}$: vektor - måste ha en riktning

enda riktningen som är given är $\hat{E}$

$\Rightarrow \vec{I}(\vec{E}) = \hat{E} \underbrace{\left(\hat{E} \cdot \vec{I}(\vec{E})\right)}_{\text{längden}}$

$$\hat{E}\cdot\vec{I} = \int d^d p\,(\hat{E}\cdot\vec{p})(\vec{E}\,\vec{p})\,e^{-\alpha p^2} = E\underbrace{\int d^d p\,(\hat{E}\vec{p})^2 e^{-\alpha p^2}}_{}$$

ober. av riktningen $\hat{E}$

välj i tur och ordning $\hat{E} = \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

summerar, och delar med d ($d=3$ ty x,y,z)

$$\Rightarrow \vec{I}(\vec{E}) = \vec{E}\,\frac{1}{d}\int d^d p\, p^2 e^{-\alpha p^2} = \vec{E}\,\frac{1}{d}\,S_{d-1}\int_0^\infty dp\,p^{d-1}p^2 e^{-\alpha p^2}$$

{ S_{d-1} = arean av en d-dimensionell enhetssfär

$S_0 = 2$ (endimensionell)

$S_1 = 2\pi$ (2-dim)

$S_2 = 4\pi$ (3-dim) }

för $d=3$: $\displaystyle\int_0^\infty dp\,p^4 e^{-\alpha p^2} = \frac{1}{2}I_4(\alpha) = \frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\Rightarrow \vec{I}(\vec{E}) = \vec{E}\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{(4\alpha)^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2}\vec{E}$$

4. införa extra integraler

ex. $\displaystyle I = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_S d^3k\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}\left[\cos k_x + \cos k_y + \cos k_z\right]}$

$[S: |k_{x,y,z}| < \pi]$

använd att $\displaystyle\frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty dz\,e^{-\alpha z}$

$$\Rightarrow I = \int_0^\infty dz\int_S \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{-z\left[1-\frac{1}{3}\cos k_x - \frac{1}{3}\cos k_y - \frac{1}{3}\cos k_z\right]}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\infty dz\,e^{-z}\underbrace{\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}\,e^{\frac{z}{3}\cos k}\right]^3}_{f\left(\frac{z}{3}\right)} \; : \; f(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}\,e^{\alpha\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}\cos x\,e^{\alpha\cos x}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\,e^{\alpha\cos x}\right) + \alpha\sin^2 x\,e^{\alpha\cos x}\right]$$

$$= \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\sin^2 x\,e^{\alpha\cos x}$$

$$f''(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\cos^2 x\,e^{\alpha\cos x}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}f'(\alpha) + f''(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow f''(\alpha) + \frac{1}{\alpha} f'(\alpha) - f(\alpha) = 0$$

Bessel ekv. av ordning 0 med imaginära argumenter

$$\Rightarrow f(\alpha) = A I_0(\alpha) + B K_0(\alpha)$$

Nu $f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} = 1$

men $\begin{cases} I_0(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ K_0(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \infty \end{cases}$

$\Rightarrow A = 1 \; ; \; B = 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\infty} dz\, e^{-z} \left[I_0\left(\frac{z}{3}\right) \right]^3 \approx 1.51639$$

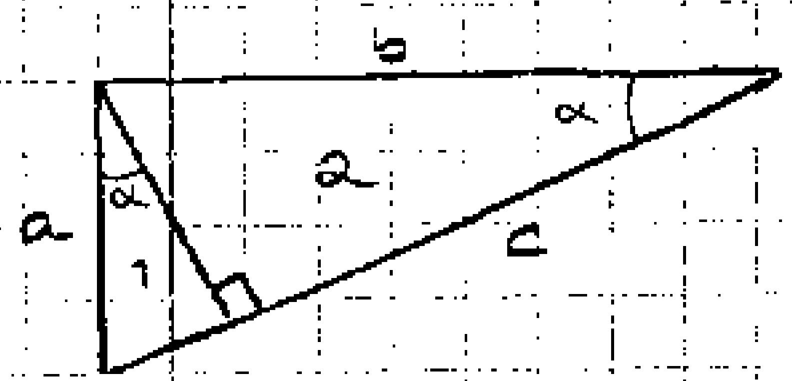
↑ numeriskt

5. Gradshteyn - Ryzhik
   Table of Integrals, Series and Products
6. Inte Mathematica om man inte är mycket försiktig

t.ex `N[Integrate[Sqrt[Sin x]], {x, 0, Pi}]]` = 58.3756

rätt svar ≈ 2.39623

□ GEOMETRIPROBLEM



$[a] = [b] = [c] = m$

$[A] = m^2$

1) $A = c^2 f(\alpha)$
   ↑ minsta vinkeln

$A_1 = a^2 f(\alpha)$

$A_2 = b^2 f(\alpha)$

3 $A = A_1 + A_2$

$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha)$

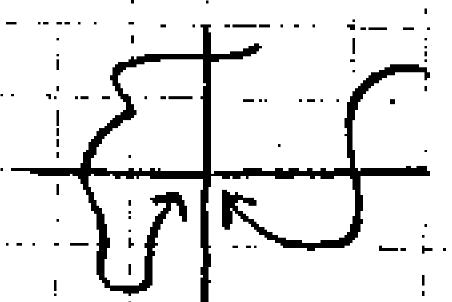
$c^2 = a^2 + b^2$

3/11 FÖRELÄSNING

Analytiska funktioner.

derivatan $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existerar

dvs. (1) gränsen måste vara oberoende av hur $h \to 0$



(2) gränsvärdet måste vara finit.

två vägar:

1) $h \in \mathbb{R}$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$z = x+iy$

$\Rightarrow f'(z) = \partial_x u + i\partial_x v$

2) $h \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(z) = -i\partial_y u + \partial_y v$

$\Rightarrow$ Cauchy-Riemann ekvationerna

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \nabla^2 v = 0 \end{cases}$$

Singulära (dvs ej analytiska) punkter

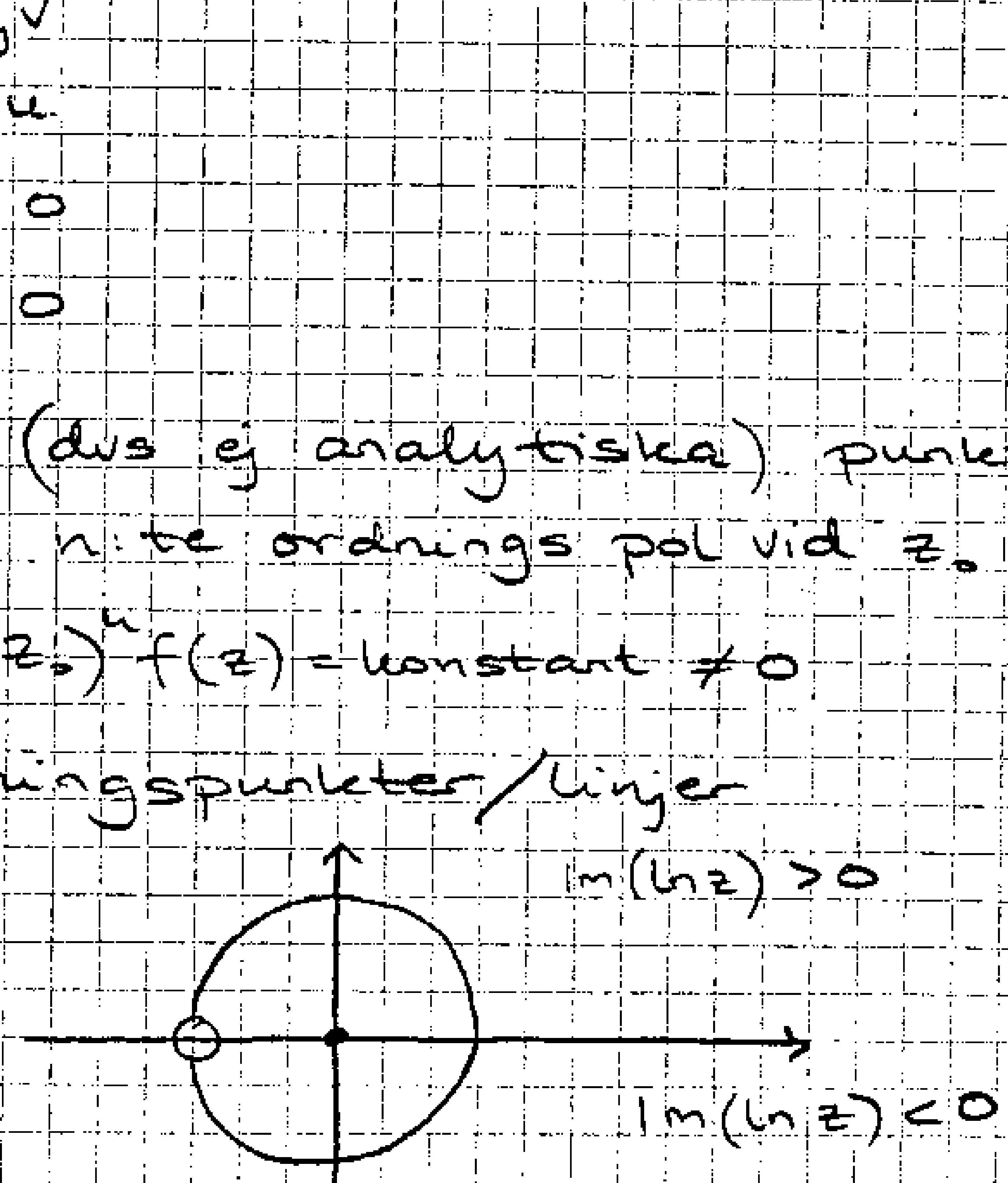
1) Poler: n:te ordnings pol vid z_0 om

$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \text{konstant} \neq 0$

2) förgreningspunkter/linjer

t.ex. $\ln z$

$$\begin{cases} \text{Im}\, z = 0 \\ \text{Re}\, z < 0 \end{cases}$$



3. väsentlig singularitet

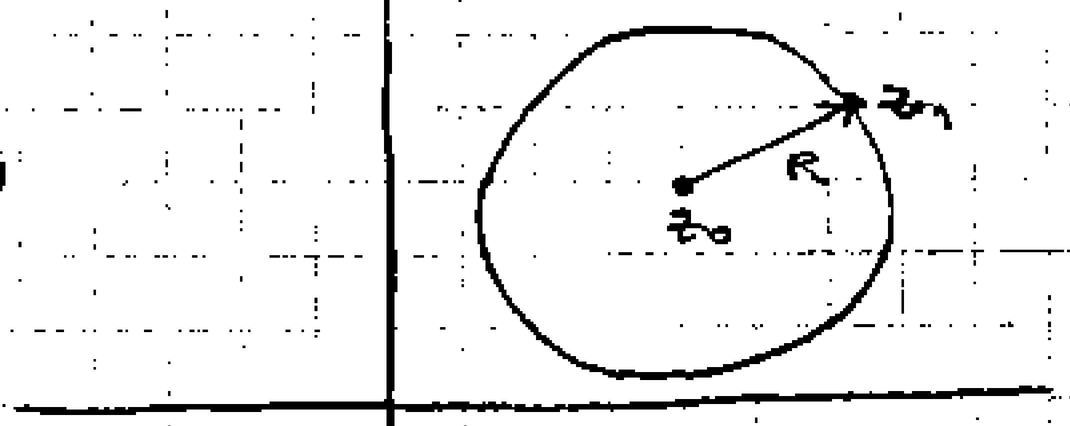
$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \infty \qquad \forall n \in N$$

t.ex $e^{1/z}$ vid $z=0$

Laurentserien

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

konvergerar inom en punkterad disk runt z_0 med en radie som bestäms av avståndet till närmaste singularitet



integrera runt en cirkel $z = z_0 + re^{i\theta}$

$$\oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \, ire^{i\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n i r^{n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \, e^{i(n+1)\theta}}_{= 2\pi \cdot \delta_{n,-1}} = 2\pi i a_{-1}$$

a_{-1} = residy vid z_0 för en n:te ordningspol

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} [(z-z_0)^n f(z)] \right]_{z=z_0}$$

Residysats:

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{\substack{\text{isolerade} \\ \text{singulariteter}}} a_{-1}$$

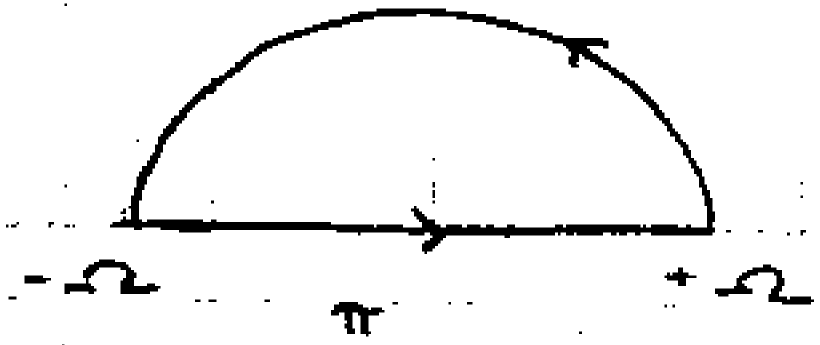
om området innanför C enbart innehåller isolerade singulariteter (ej förgreningslinjer)

exempel

1) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\frac{\omega^2}{L^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 + R^2\omega^2}}$$

$\frac{1}{\omega^2}$ för stora $|\omega|$ = konvergent

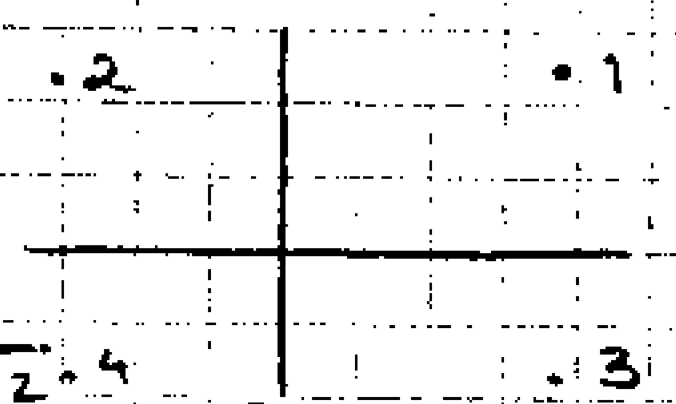
Välj konturen C:



integrera längs bågen: $\int_0^{\pi} d\theta \cdot \Omega \frac{1}{\Omega^2} \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{L^2} \oint_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_3)(\omega-\omega_4)}$$

poler: $\omega_{1,2,3,4}$



$$\omega_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \pm i \frac{R}{2L}$$

Residyer vid $\omega_{1,2}$:

$$\omega_1: \frac{\omega_1^2}{(\omega_1-\omega_2)(\omega_1-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)} = \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_1^*)^2}$$

$\omega_4 = -\omega_1$

$\omega_3 = \omega_1^*$

$\omega_2 = -\omega_1^*$

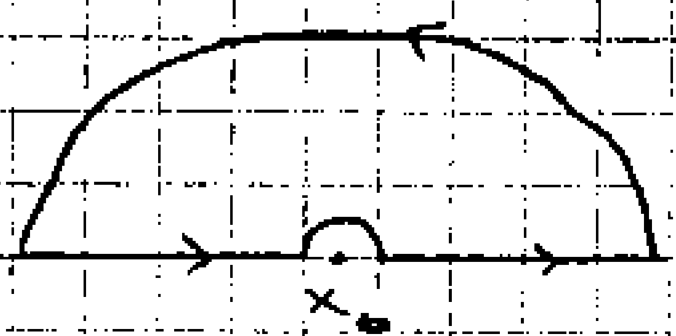
$$\omega_2: \quad \cdots \quad = \frac{\omega_1^*}{2} \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_1^*)^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{L^2} \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{1}{2} \frac{\omega_1 + \omega_1^*}{\omega_1^2 - (\omega_1^*)^2} = \frac{1}{2RL}$$

2) Vanlig

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

- konvergerar inte för $x_0 \in \mathbb{R}$ (om $f(x_0) \neq 0$)
- använd kontur C_1:



$$I_{C_1} = \oint_{C_1} dz \frac{f(z)}{z - x_0}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right] + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\pi}^{0} d(\varepsilon e^{i\theta}) \frac{f(x_0 + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}$$

$$+ \lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi} d(Re^{i\theta}) \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - x_0}$$

EH

antag 1) $f(z) \to 0$ för $|z| \to \infty$

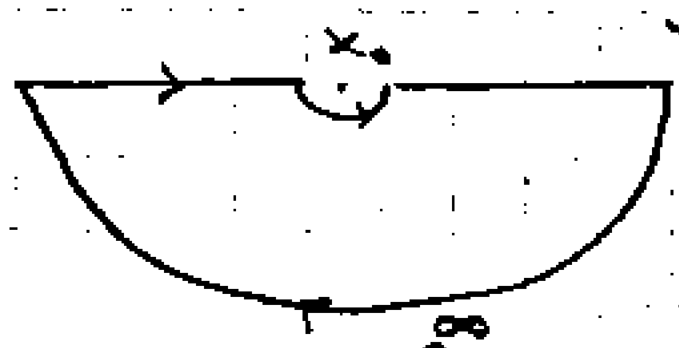
$\Rightarrow$ sista integralen $= 0$

2) $f(z)$ är analytisk vid $z = x_0$

$$\Rightarrow \quad I_{C_1} = -i\pi f(x_0) + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0^+} [\qquad]}_{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}}$$

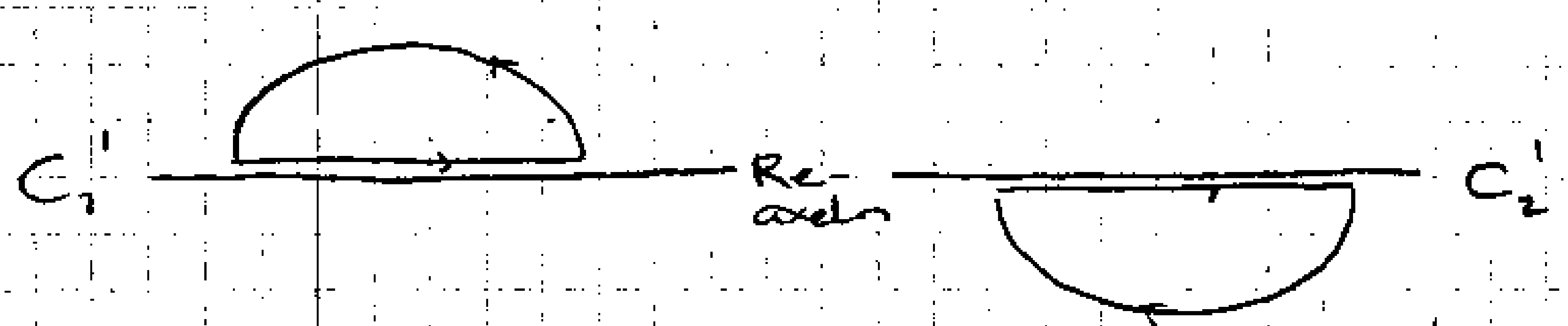
Cauchy principalvärde

- jfr C_2:



$$I_{C_2} = +i\pi f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Konturerna $C_{1,2}$ kan modifieras till



$$I_{C_1} = \{\text{samma poler innanför}\} = I_{C_1'} = \lim_{\eta \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0 + i\eta}$$

$$\lim_{\eta \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\eta} = \mp i\pi f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}$$

operatorlikhet

$$\lim_{\eta \to 0^+} \frac{1}{x - x_0 \pm i\eta} = \mathcal{P}\frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\,\delta(x - x_0)$$

där $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$

mer om δ-funktionen se B.F 5.3

3) semi-infinite

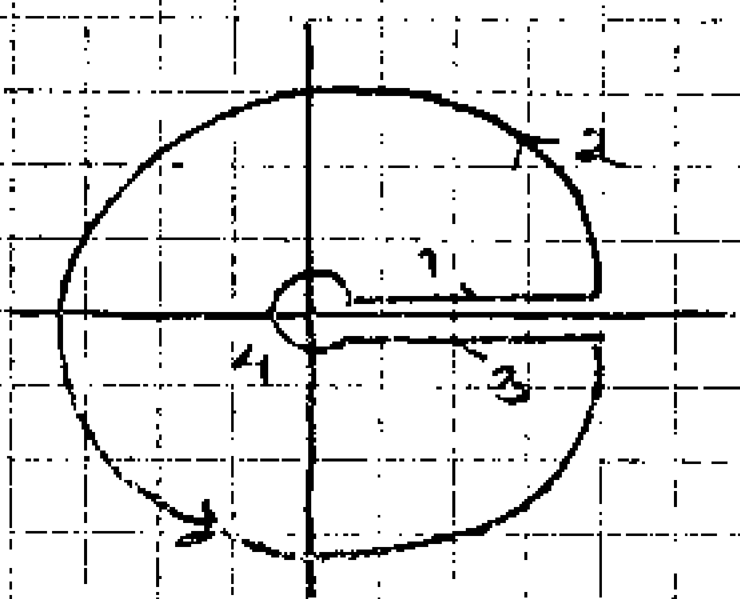
$$I = \int_0^\infty dt\, f(t)$$

- anta 1) $\lim_{|z|\to\infty} |z|^\alpha |f(z)| = 0$ för $\alpha > 1$

2) $f(z)$ har inga singulariteter på positiva realaxeln inklusive origot.

betrakta $\tilde{I} = \oint_C dz \ln(z) f(z)$

ta den gren av $\ln(z)$ som har $\operatorname{Im}[\ln(z)] \in [0, 2\pi)$

C: 

$$\Rightarrow \tilde{I} = \tilde{I}_1 + \underbrace{\tilde{I}_2}_{=0} + \tilde{I}_3 + \underbrace{\tilde{I}_4}_{=0}$$

$\tilde{I}_4 = 0$: $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) f(\varepsilon) = 0$

$\tilde{I}_2 = 0$: $|R \ln R f(Re^{i\theta})| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$$\tilde{I} = \int_0^\infty dt \ln(t) f(t) + \int_\infty^0 dt \ln\left[t e^{2\pi i}\right] f(t)$$

$$= -2\pi i \int_0^\infty dt\, f(t) = -2\pi i \, I$$

men $\tilde{I} = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}_{z_i} [\ln(z) f(z)] \Rightarrow$

$$I = -\sum_i \operatorname{Res}_{z_i} [\ln(z) f(z)]$$

exempel: $\int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1}$: poler $e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3}, e^{i5\pi/3}$

$$\Rightarrow I = -\left[i\frac{\pi}{3} \frac{1}{\left(e^{i\pi/3} - e^{i\pi 3/3}\right)\left(e^{i\pi/3} - e^{i5\pi/3}\right)} + \right.$$

$$+ i\frac{3\pi}{3} \frac{1}{\left(e^{i3\pi/3} - e^{i\pi/3}\right)\left(e^{i3\pi/3} - e^{i5\pi/3}\right)} +$$

$$+ i\frac{5\pi}{3} \cdots = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

4) transformation

t.ex $I = \int_0^\infty dx\, \underbrace{e^{i\alpha x^2}}_{\llcorner \cos(\alpha x^2) + i\sin(\alpha x^2)} \qquad \alpha > 0$

C:

: inga poler $\Rightarrow \underbrace{\oint_C dz\, e^{i\alpha z^2}}$ $= 0$

$$= \int_0^\infty dx\, e^{i\alpha x^2} + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} d(Re^{i\theta})\, e^{i\alpha R^2 e^{2i\theta}} + \int_\infty^0 d(xe^{i\pi/4})\, e^{i\alpha x^2 e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

- längs bågen:

$$iR\int_0^{\pi/4} d\theta\, \underbrace{e^{-\alpha R^2 \sin(2\theta)}}_{\substack{\text{mkt liten för} \\ R \to \infty}} e^{i(\theta + \alpha R^2 \cos(2\theta))} \to 0$$

$$\Rightarrow 0 = I - e^{i\pi/4}\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x^2}$$

$$\Rightarrow I = e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\,(1+i)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty dx \cos(\alpha x^2) = \int_0^\infty dx \sin(\alpha x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

3:e grads ekvation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \left(z - \frac{a}{3}\right) \Rightarrow x^3 = z^3 - 3z^2\frac{a}{3} + \ldots$$

$$\Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = z^3 + pz + q$$

$$\Rightarrow z^3 + pz + q = 0$$

$$z = u + \frac{\omega}{u} \Rightarrow z^3 = u^3 + \underbrace{3u^2\frac{\omega}{u} + 3u\frac{\omega^2}{u^2}}_{= 3\omega u + 3\omega\cdot\frac{\omega}{u} = 3\omega\left(u + \frac{\omega}{u}\right)} + \frac{\omega^3}{u^3}$$

$$\Rightarrow z^3 + pz + q =$$

$$u^3 + (p + 3\omega)\left(u + \frac{\omega}{u}\right) + \frac{\omega^3}{u^3} + q = 0$$

välj $3\omega = -p \Rightarrow \omega = -p/3$

$$u^3 + q - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{u^3} = 0$$

$$(u^3)^2 + qu^3 - (p/3)^3 = 0 \quad \text{lös } u^3 \Rightarrow z \Rightarrow x$$

Approximativ beräkning av integral

ex. $I(x) = \int_x^\infty dt\, e^{-t^4} = \int_x^\infty dt \sum_n \frac{(-1)^n t^{4n}}{n!}$ termvis divergens! funkar ej

testa först: serieutveckling

$$I(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t^4} - \int_0^x dt e^{-t^4} = C - \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

$$C = \int_0^\infty dt\, e^{-t^4} = \left\{ \begin{array}{l} t^4 = u \\ dt = \frac{du}{4t^3} = \frac{1}{4} u^{-3/4} du \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\infty du\, u^{-3/4} e^{-u} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

Gammafunktionen: $\Gamma(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-t}$

$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. För heltal n: $\Gamma(n+1) = n!$

Om x är stor får vi använda asymptotisk utveckling (annars måste vi ta med så många termer)

$$I(x) = \int_x^\infty dt\, e^{-t^4} = \int_x^\infty dt \left(-\frac{1}{4t^3}\right) \frac{\partial}{\partial t} e^{-t^4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{4t^3} e^{-t^4}\right]_x^\infty + \int_x^\infty \left(-\frac{3}{4t^4}\right) e^{-t^4} dt =$$

$$= \frac{1}{4x^3} e^{-x^4} - \int_x^\infty dt\, \frac{3}{4t^4} e^{-t^4}$$

Jämför resttermen med $I(x)$

$$\int_x^\infty dt\, \frac{3}{4t^4} e^{-t^4} \leq \frac{3}{4x^4} \int_x^\infty dt\, e^{-t^4} = \frac{3}{4x^4} I(x)$$

Laplaceintegraler

$$I(x) = \int_a^b dt\, f(t)\, e^{x\varphi(t)}, \quad x \to +\infty$$

Laplacemetod:

$$= \int_a^b dt \frac{f(t)}{x\varphi'(t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{x\varphi(t)} =$$

$$= \frac{f(b)}{x\varphi'(b)} e^{x\varphi(b)} - \frac{f(a)}{x\varphi'(a)} e^{x\varphi(a)} - \int_a^b dt\, e^{x\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right]$$

Antag

$$\begin{cases} \varphi'(t) \neq 0, \quad t \in [a,b] \\ \max\limits_{t\in[a,b]} \varphi(t) = \max[\varphi(a), \varphi(b)] = \varphi(c) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ asymptotisk utveckling på formen

$$I(x) \sim e^{x\varphi(c)} \sum_n A_n x^{-n}$$

ex.

$$I(x) = \int_0^{10} dt \frac{e^{-xt}}{1+t}, \quad x \to +\infty$$

$$= \int_0^{\varepsilon} dt \frac{e^{-xt}}{1+t} + \int_{\varepsilon}^{10} dt \frac{e^{-xt}}{1+t}$$

$$\int_{\varepsilon}^{10} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt < e^{-\varepsilon x} \int_{\varepsilon}^{10} dt \frac{1}{1+t}$$: Exponentially Small Term (EST) Strunta i!

$$\int_0^{\varepsilon} dt \frac{e^{-xt}}{1+t} = \int_0^{\varepsilon} dt \sum_n (-t)^n e^{-xt} = \begin{cases} u = xt \\ du = x\,dt \end{cases} \approx$$

$\infty \leftarrow$ exp dödar för stora $u \Rightarrow$ det är OK!

$$\approx \sum_n (-1)^n \int_0^{\infty} du \left(\frac{u}{x}\right)^n \frac{1}{x} e^{-u} = \sum_n (-1)^n x^{-n-1}\, \Gamma(n+1) =$$

$$= \sum_n (-1)^n x^{-n-1}\, n! \qquad I(x) \sim \sum_n (-1)^n x^{-n-1}\, n!$$

Watson's lemma

Antag att $f(t) \sim t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n\beta} \quad , t \to 0+$

Då gäller att

$$I(x) = \int_0^b dt\, f(t)\, e^{-xt} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha + n\beta + 1)}{x^{\alpha+n\beta+1}} \quad \circledast$$

"Bevis" i kursboken

<u>ex.</u> Asymptotiskt beteende hos modifierad Bessel.

$$K_0(x) = e^{-x} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2+2t}} = e^{-x} \int_0^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-xt}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+2t}} = \frac{1}{\sqrt{2t}\sqrt{1+t/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2t}} \left[1 - \frac{1}{4} t + \dots \right]$$

Identifiera exponenter och koefficienter med $\circledast$. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_1 = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\beta = 1$

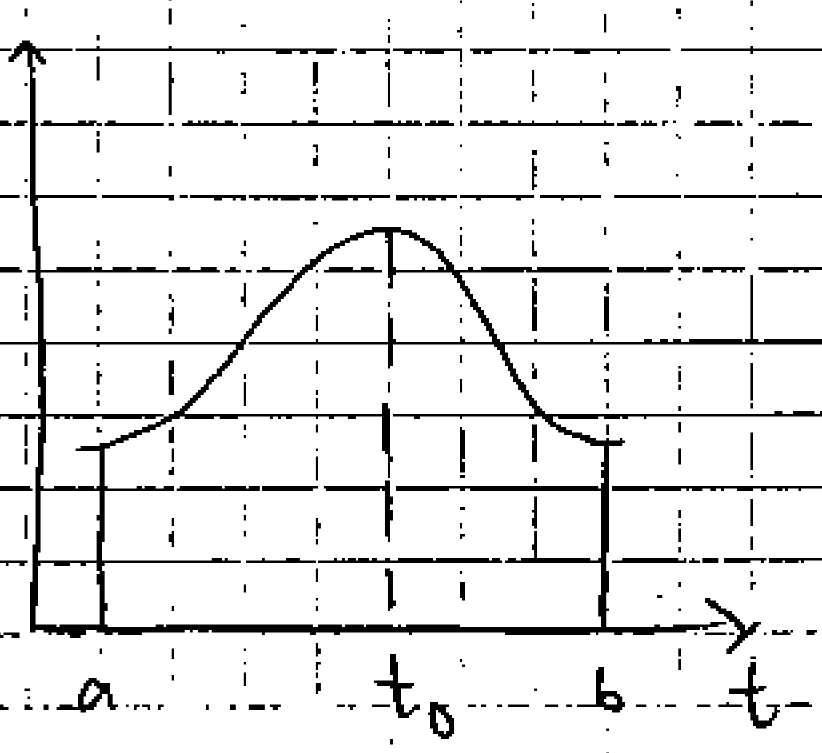
$$I(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{x^{-\frac{1}{2}+1}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1+1)}{x^{-\frac{1}{2}+1+1}} + \dots =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2}\sqrt{x}} - \frac{1/2 \cdot \Gamma(1/2)}{4\sqrt{2}\, x^{3/2}} + \dots = \left\{ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 - \frac{1}{8x} + \dots \right]$$

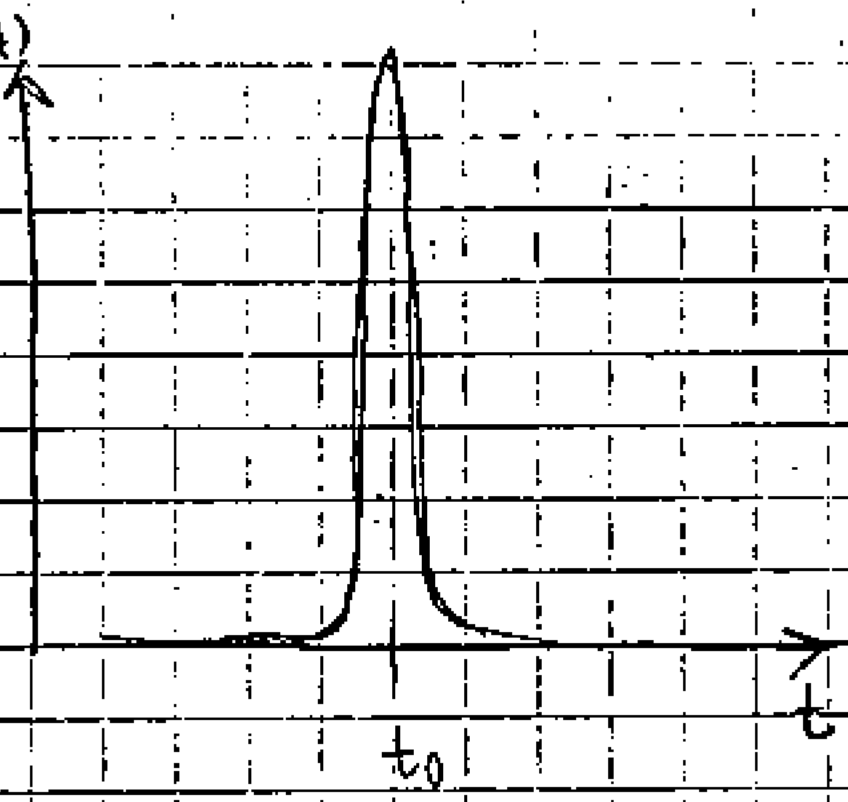
Sadelpunktsapproximationer

$$I(x) = \int_a^b dt\, f(t)\, e^{x\varphi(t)}$$



Utveckla $\varphi(t)$ till 2:a ordningen kring extrempunkt.

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2$$



$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{x\varphi(t_0) + \frac{1}{2}\underbrace{x\varphi''(t_0)}_{<0}(t-t_0)^2}$$

$$I(x) \approx f(t_0)\, e^{x\varphi(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|x\varphi''(t_0)|}} + \text{h.o.t. i } \frac{1}{x}$$

ex. $I(x) = \Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t} = \int_0^\infty dt\, e^{(x-1)\ln t - t} =$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{\varphi(t)}$$

$$\varphi(t) = (x-1)\ln t - t$$

$$\varphi'(t) = \frac{x-1}{t} - 1 \qquad \varphi'(t_0) = 0 \qquad t_0 = x-1$$

$$\varphi''(t_0) = \frac{1-x}{t^2} = \frac{1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}$$

$$\varphi(t) \approx \underbrace{(x-1)\ln(x-1) - (x-1)}_{\varphi(t_0)} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x-1}\right)(t-t_0)^2$$

$$\Gamma(x) \sim (x-1)^{(x-1)} e^{-(x-1)} \sqrt{2\pi(x-1)} =$$

$$= \left(\frac{x-1}{e}\right)^{x-1} \sqrt{2\pi(x-1)} \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (Stirlings formel)

ex. $I(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-xt - \frac{1}{t}}$

Watsons lemma fungerar ej. $e^{-\frac{1}{t}}$ saknar asymptotisk utveckling då $t \to 0^+$ (väsentlig singularitet)

Prova sadelpunktsmetod

$I(x) = \int_0^\infty dt\, e^{\varphi(t)}$, $\varphi(t) = -xt - \frac{1}{t}$

$\varphi'(t) = -x + \frac{1}{t^2}$, $\varphi'(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\varphi''(t) = -\frac{2}{t^3}$, $\varphi''(t_0) = -2x^{3/2}$

$\varphi(t_0) = -xt_0 - \frac{1}{t_0} = -\frac{x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}$

$I(x) \approx \int_0^\infty dt\, e^{-2\sqrt{x}} e^{\frac{1}{2}(-2x^{3/2})(t - \frac{1}{\sqrt{x}})^2} =$

$= e^{-2\sqrt{x}} \sqrt{\frac{2\pi}{2x^{3/2}}} = \sqrt{\pi}\, x^{-3/4} e^{-2\sqrt{x}}$

Antag nu att vi har komplexvärd funktion

$f(t) \in \mathbb{C}$ $\quad I = \int dt\, e^{f(t)}$

Samma metod fungerar

$f(t) = u(t) + i v(t)$

$I = \int dt\, e^{iv(t)} e^{u(t)} = \int dt\, h(t) e^{u(t)} = \{\text{som förut}\} =$

$= \int dt\, h(t)\, e^{u(t_0) + \frac{1}{2}u''(t_0)(t-t_0)^2}$

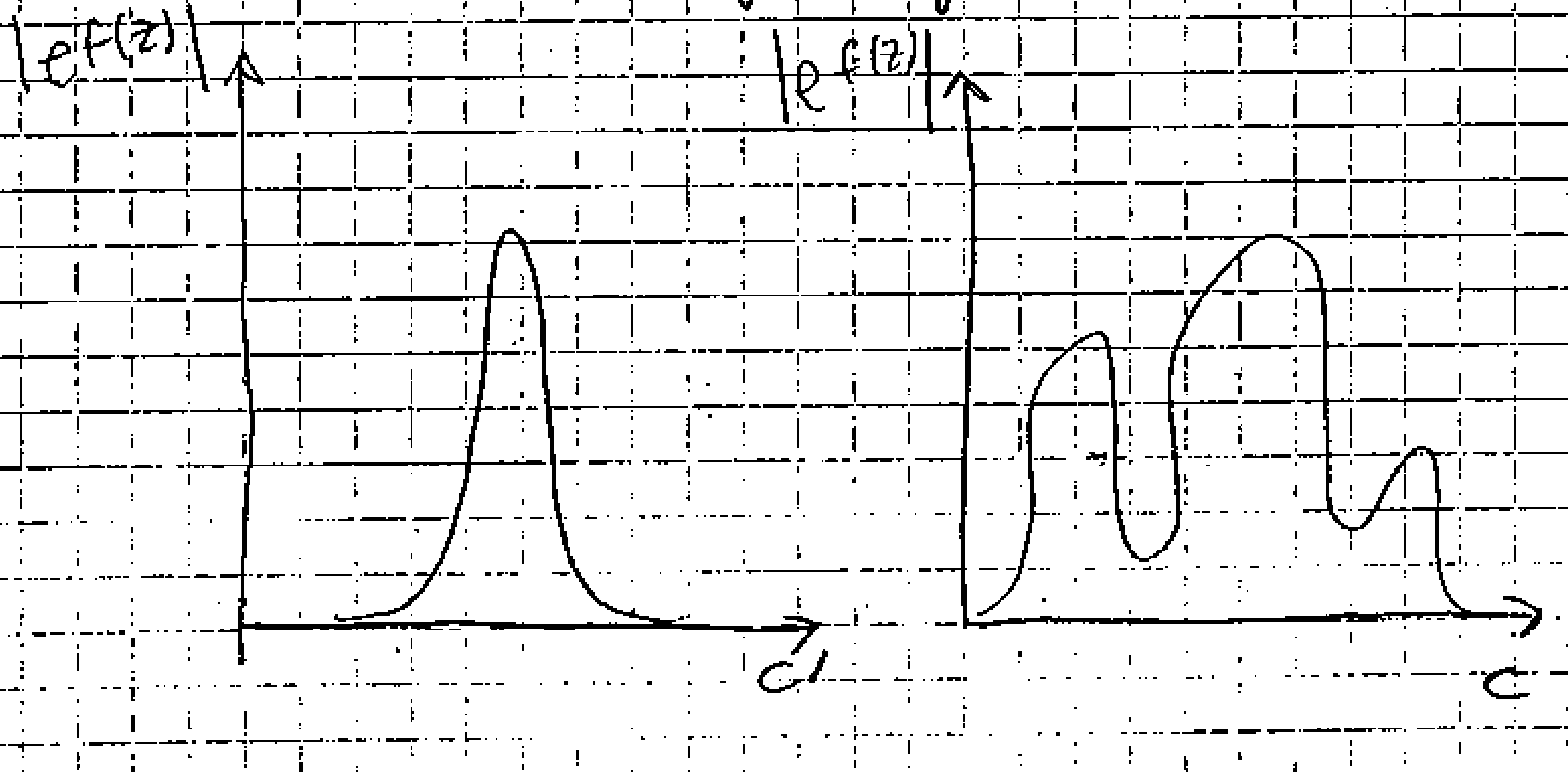
Betrakta generellt integralen

$$I = \int_C dz\, e^{f(z)} \qquad C \text{ någon kontur}$$

i) om $f(z)$ analytisk kan vi deformera konturen utan att ändra värdet på I

ii) om $f(z)$ analytisk är $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$, $f = u(z) + i v(z)$. En harmonisk funktion har ej lokala extrempunkter, enbart sadelpunkter. Deformerar C så att den passerar sadelpunkt z_0 $f'(z_0) = 0$. Vi vill $\mathrm{Im}(f(z))$ är konstant längs nya konturen

iii) Kurvan är den kurva som tar den "brantaste" vägen genom z_0.



"Method of stationary phase"

$$I(x) = \int dt\, e^{ixf(t)} \qquad f(t)\in\mathbb{R}$$

Bidrag från där $f(t)$ varierar långsammast är mest relevanta. Snabba oscillationer i resten av integrationsområdet tar ut varandra.

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t-t_0)^2 \qquad f'(t_0)=0$$

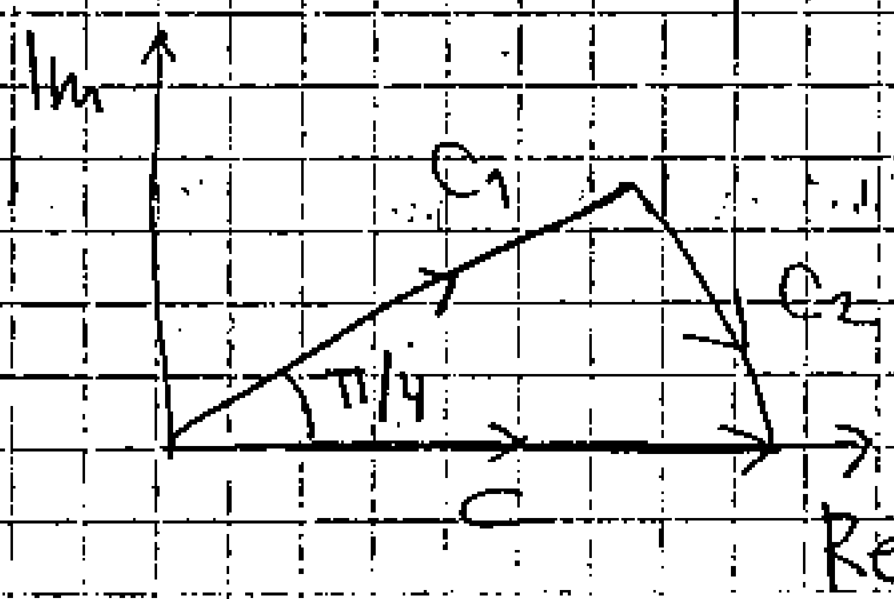
$$I(x) \approx \int dt\, e^{ixf(t_0) + \frac{i}{2}xf''(t_0)(t-t_0)^2} =$$

$$= e^{ixf(t_0)}\int dt\, e^{\frac{i}{2}xf''(t_0)(t-t_0)^2} =$$

$$= e^{ixf(t_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|xf''(t_0)|}}\, e^{i\,\mathrm{sgn}[f''(t_0)]\frac{\pi}{4}}$$

Integralen

$$I = \int_0^\infty dt\, e^{i\alpha t^2} \qquad \boxed{\alpha>0}$$



$$I = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

$$\int_{C_1} dz\, e^{i\alpha z^2} = \left\{ \begin{array}{l} z = re^{i\varphi},\ \varphi = \frac{\pi}{4} \\ dz = e^{i\varphi}dr \end{array} \right\} = \int_0^R dr\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\alpha r^2 i} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R dr\, e^{-\alpha r^2} = \{R\to\infty\} = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ \frac{1}{2}$$

$\int_{C_2}$ - integralen

$$\int_{C_2} dz\, e^{i\alpha z^2} = \left\{ \begin{array}{l} z = Re^{i\varphi} \\ dz = iRe^{i\varphi}d\varphi \end{array} \right\} = \int_{\pi/4}^{0} d\varphi\, iRe^{i\varphi} e^{i\alpha R^2 e^{i2\varphi}} =$$

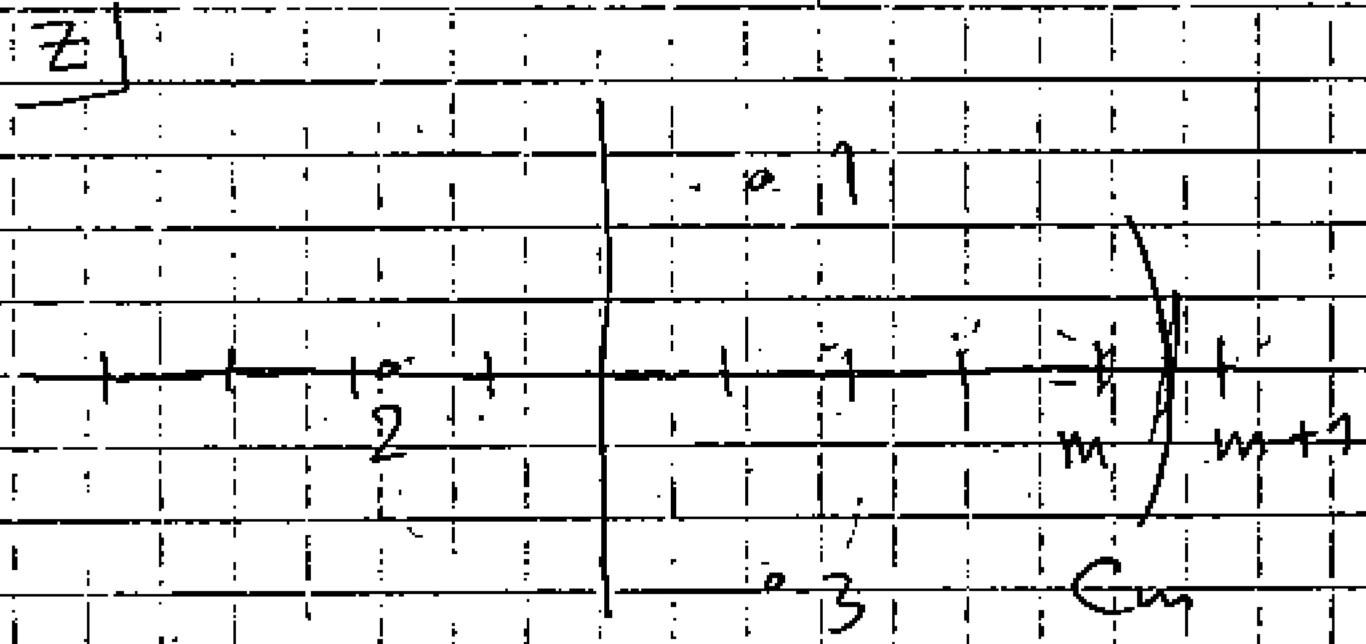
$$\Rightarrow \int_{\pi/4}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{0} d\varphi\, iRe^{i\varphi} e^{iaR^2 e^{i2\varphi}} \longrightarrow 0$$

Räkneövn.

17. $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^3+a^3}$

Betrakta $I_c = \oint_c \frac{dz}{2\pi i} \pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^3+a^3}$

poler: $z = n$, $z_1 = e^{+i\frac{\pi}{3}} a$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{3}} a$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} a$



Välj konturen C_m s.a. den passerar real-axeln vid $z = \pm(m + \frac{1}{2})$

Vad är I_{C_m}? $\frac{1}{z^3+a^3} \sim \frac{1}{m^3}$ vid konturen

Är $\cot(\pi z)$ begränsad?

$$\cot(\pi z) = i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i \frac{(e^{i\pi z} + e^{-i\pi z})(e^{i\pi z^*} - e^{-i\pi z^*})}{(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})(e^{i\pi z^*} - e^{-i\pi z^*})} =$$

$$= i \frac{e^{i\pi(z-z^*)} - e^{i\pi(z+z^*)} + e^{-i\pi(z+z^*)} - e^{i\pi(z^*-z)}}{e^{i\pi(z-z^*)} - e^{i\pi(z+z^*)} - e^{-i\pi(z+z^*)} + e^{-i\pi(z-z^*)}} =$$

$z = x+iy$

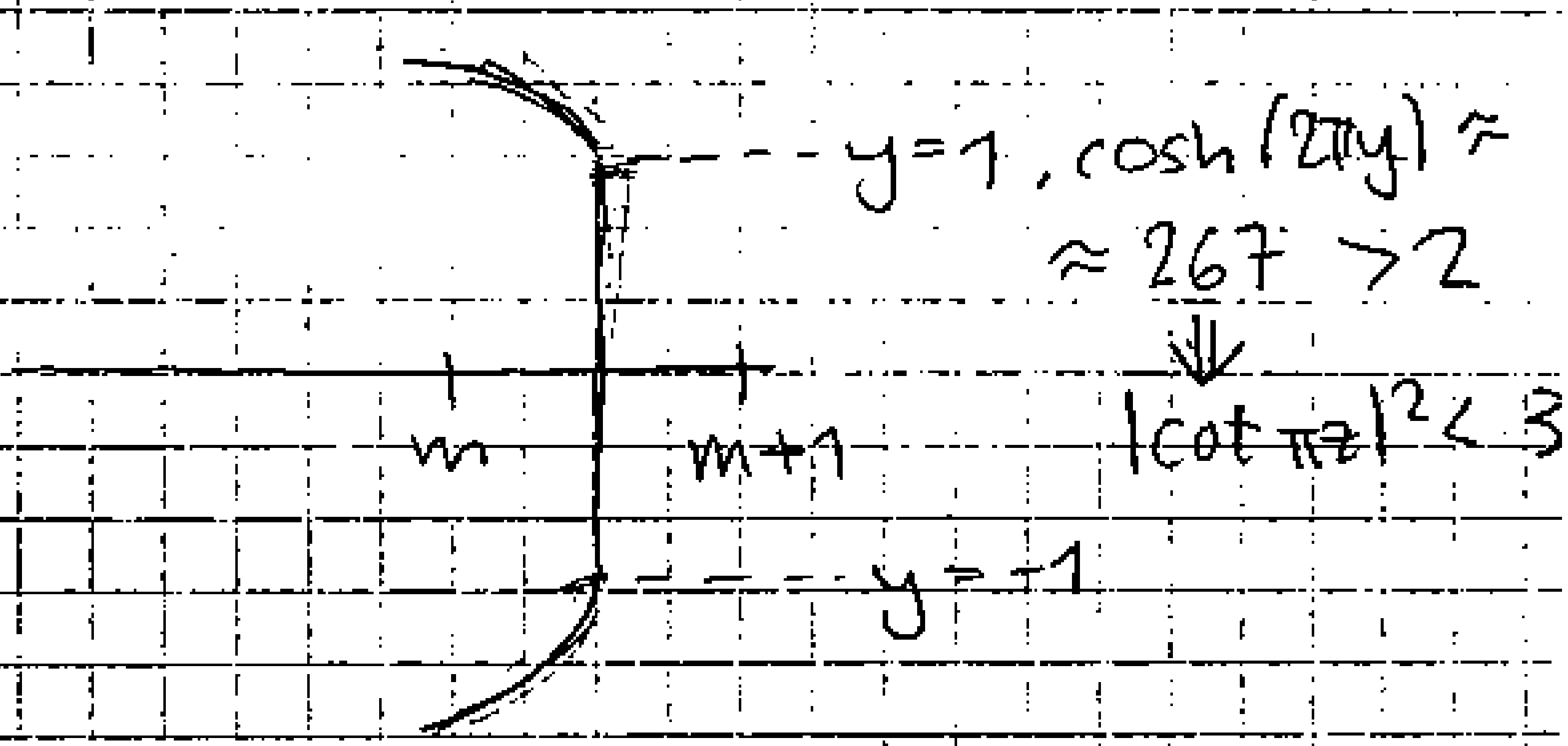
$$= -i \frac{\operatorname{sh}(2\pi y) + i\sin(2\pi x)}{\operatorname{ch}(2\pi y) - \cos(2\pi x)}$$

$$\Rightarrow |\cot(\pi z)|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2(2\pi y) + \sin^2(2\pi x)}{[\operatorname{ch}(2\pi y) - \cos(2\pi x)]^2} \leq$$

$$= 1 + 2\,\frac{\cos(2\pi x)}{\operatorname{ch}(2\pi y) - \cos(2\pi x)}$$

om $\operatorname{ch}(2\pi y) > 2$, då $\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x) >$ > 1, om $|\coth(\pi z)|^2 \le 3$

$\Rightarrow$ kontur C_m



$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} I_{C_m} = 0$$

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=n}\left[\pi \cot(\pi z)\frac{1}{z^3+a^3}\right] + \sum_{j=1}^{3} \operatorname*{Res}_{z=z_j}\left[\pi\cot(\pi z)\cdot \frac{1}{z^3+a^3}\right]$$

residyen i första termen:

$$\pi\cot(\pi z) = \pi\,\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\,\frac{\cos[\pi n + n\delta z]}{\sin[\pi n + n\delta z]} =$$

$$= \pi\,\frac{\cos(\pi n)\cos(\pi\delta z) - \sin(\pi n)\sin(\pi\delta z)}{\sin(\pi n)\cos(\pi\delta z) + \cos(\pi n)\sin(\pi\delta z)} =$$

$$= \pi\,\frac{(-1)^n\cos(\pi\delta z)}{(-1)^n\sin(\pi\delta z)} \approx \pi\,\frac{(-1)^n}{(-1)^n\pi\delta z} = \frac{1}{\delta z}$$: residy $= 1$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^3+a^3} + \Big\{\pi\cot(\pi z_1)\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} +$$

$$+ \pi\cot(\pi z_2)\frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)} + \pi\cot(\pi z_3)\frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\Big\}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{\pi}{a^2}\left[\frac{\cot(\pi a e^{i\pi/3})}{(e^{i\pi/3} - e^{i3\pi/3})(e^{i\pi/3} - e^{i5\pi/3})} + \right.$$

$$+\frac{\cot(\pi a e^{i3\pi/3})}{(e^{i\frac{3\pi}{3}}-e^{i\pi/3})(e^{i\frac{3\pi}{3}}-e^{i\frac{5\pi}{3}})}+\frac{\cot(\pi a e^{i\frac{5\pi}{3}})}{(e^{i\frac{5\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}})(e^{i\frac{5\pi}{3}}-e^{i\frac{3\pi}{3}})}\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{a^2}\Bigg[-\frac{\cot(\pi a)}{2-2\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{-1/2}}+2\,\mathrm{Re}\,\frac{\cot(\pi a e^{i\pi/3})}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}-1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}=$$

$$=\frac{\pi}{3a^2}\cot(\pi a)+\frac{4\pi}{3a^2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\cot(\pi a e^{i\pi/3})}{1-i\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\pi}{3a^2}\cot(\pi a)+\frac{\pi}{3a^2}\,\mathrm{Re}\left[(1+i\sqrt{3})\cot\left(\frac{\pi a}{2}+i\frac{\pi a}{2}\sqrt{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{3a^2}\left[\cot(\pi a)+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sh}(\pi a\sqrt{3})+\sin(\pi a)}{\mathrm{ch}(\pi a\sqrt{3})-\cos(\pi a)}\right]$$

Kontrollera: för $a\approx 0$ får vi $\frac{\pi}{3a^2}\Bigg(\frac{1}{\pi a}+$

$$+\frac{3\pi a+\pi a}{\frac{1}{2}3(\pi a)^2+\frac{1}{2}(\pi a)^2}\Bigg)=\frac{1}{a^3}\qquad \underline{\text{OK}}$$

1. $$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n)!\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}t^{2n}x^n\rightarrow$$

$$\rightarrow\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2x)^n\rightarrow\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}\frac{1}{1-t^2x}$$

konvergerar för $x>0$

3. $$x^2y''+xy'-(x^2+n^2)y=0$$

a) $y''+\frac{1}{x}y'-\left(1+\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$

i) finita: $x=0$ är en singulär punkt ty $1/x$ och $-(1+n^2/x^2)$ är singulära där

$x\cdot\frac{1}{x}$ och $x^2(1+n^2/x^2)$ är ej singulära

$\Rightarrow x=0$ är en RSP

ii) oändliga · $t = 1/x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt} = -t^2\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = -t^2\frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{d}{dt}\right) = t^4\frac{d^2}{dt^2} + 2t^3\frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow t^4 y_{tt} + 2t^3 y_t - t^3 y_t - (1+n^2t^2)y = 0$$

$$\Rightarrow y_{tt} + \frac{1}{t}y_t - \left(\frac{1}{t^4} + \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0$$

$\Rightarrow t=0$ är en ISP ty

$$t^2\left(\frac{1}{t^4} - \frac{n^2}{t^2}\right)$$

är singulär vid $t=0 \Rightarrow x=\infty$ är en ISP

b) Beteende vid $x=0$:

$x=0$ är en RSP $\Rightarrow$ Frobeniusmetod OK

$$y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$\Rightarrow$ de viktigaste termerna vid $x=0$ blir

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \alpha x^{\alpha-2} + x^\alpha - n^2 x^{\alpha-2} = 0$$

Dominanta potensen: $x^{\alpha-2}$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - \alpha - n^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm n$$

två lösningar om $n \neq 0$

$$\Rightarrow y \sim \begin{cases} x^n \\ x^{-n} \end{cases} \text{ för } x \to 0$$

Om $n=0$?

$$y \sim \begin{cases} \text{konstant} \\ \ln x \end{cases}$$

c) för $x \to \infty$

$x = \infty$ är en ISP

$\Rightarrow$ sätt $y = e^{S(x)}$

$$\Rightarrow y' = S' \cdot y \;,\; y'' = [S'' + (S')^2]\,y$$

$$\Rightarrow S'' + (S')^2 + \frac{1}{x}S' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

Antag $(S')^2 \gg S''$

$$\Rightarrow (S')^2 + \frac{1}{x}S' + \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow S' = -\frac{1}{2x} \pm \sqrt{1 + \frac{n^2 + 1/4}{x^2}} \approx -\frac{1}{2x} \pm \left(1 + \frac{n^2 + 1/4}{2x^2}\right)$$

$$\Rightarrow S'' \approx -\frac{1}{2x^2} \pm \frac{n^2 + 1/4}{x^3}$$

$$(S')^2 \approx 1 \mp \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{n^2 + 1/4}{x^2}}_{\text{dessa är inte mindre än } S''} \gg S''$$

$$\Rightarrow S' \approx \pm 1$$

$$\Rightarrow S = \pm x \Rightarrow y \sim e^{\pm x}$$

förbättra lösningen

$$y_\pm = e^{\pm x + C_\pm(x)}$$

$$C_\pm \ll x$$

$$\Rightarrow y'_\pm = [\pm 1 + C'_\pm]\, y_\pm$$

$$y''_\pm = \left[[\pm 1 + C'_\pm]^2 + C''_\pm\right] y_\pm$$

$$\Rightarrow C''_\pm + (C'_\pm)^2 \pm 2C'_\pm + 1 + \frac{\pm 1 + C'_\pm}{x} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

Antag $C''_\pm \ll (C'_\pm)^2$

$$\Rightarrow (C'_\pm)^2 + \left(\frac{1}{x} \pm 2\right)C'_\pm + \left(\pm\frac{1}{x} - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_+ = \left(-1 - \frac{1}{2x}\right) \pm \sqrt{1 + \frac{n^2 + 1/4}{x^2}} \\ C_- = \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \pm \sqrt{1 + \frac{n^2 + 1/4}{x^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C'_+ = \begin{cases} -\frac{1}{2x} + \frac{n^2 + 1/4}{2x^2} & (*) \\ -2 - \frac{1}{2x} - \frac{n^2 + 1/4}{2x^2} \end{cases}$$

$$C'_- = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2x} + \frac{n^2 + 1/4}{2x^2} \\ -\frac{1}{2x} - \frac{n^2 + 1/4}{2x^2} & (*) \end{cases}$$

Bara ⊛ uppfyller $c \ll x$

$$\Rightarrow \quad c_-' = c_+' \approx -\frac{1}{2x} \Rightarrow c_\pm \sim -\frac{1}{2}\ln x$$

$$\Rightarrow \quad y_\pm \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\pm x}$$

Konvention: $I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{x}$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}$$

8/11 MEROMORFISKA FUNKTIONER

[Meromorfisk funktion : en funktion med bara (ett finit antal) enkla poler och inga andra singulariteter]

I. Mittag-Leffler-teorem

Om $f(z)$ är meromorfisk med polerna z_j och residyerna R_j och om $z=0$ inte är en pol och om $f(z)$ inte divergerar för $|z| \to \infty$, då $f(z) = f(0) + \sum_j R_j \left(\frac{1}{z-z_j} + \frac{1}{z_j} \right)$

Kolla: låt $I(z) = \oint_c \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{f(\omega)}{\omega(\omega - z)}$) C cirkel m radie $R \to \infty$

i) $I(z) = 0$ ty $I(z) \sim R \cdot \frac{\text{konst}}{R^2} \sim \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

ii) $I(z) = \underbrace{-\frac{1}{z} f(0)}_{\text{res. } \omega=0} \underbrace{-\frac{1}{z} f(z)}_{\text{res. } \omega=z} + \underbrace{\sum_j R_j \frac{1}{z_j(z_j - z)}}_{\text{poler av } f(z)}$

$\Rightarrow f(z) = f(0) - \sum_j R_j \frac{z}{z_j(z_j - z)}$

ex. $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$

i) $f(0) = 0$

ii) poler: $z_j = j\pi \qquad j \neq 0$

iii) residyer: $R_j = \lim_{z \to j\pi} \frac{z - j\pi}{\sin z} = [\text{l'Hospital}] =$

$= \lim_{z \to j\pi} \frac{1}{\cos z} = (-1)^j$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} + \sum_{j \neq 0} (-1)^j \left[\frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{j\pi} \right] = \sum_j \frac{(-1)^j}{z - j\pi}$

Varför? Ibland användbar:

$\coth(z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (j\pi)^2}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \sin(kz)\coth(z)\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin kz}{z}\,dz}_{\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(k)} + 2\sum_{j=1}^\infty \underbrace{\int_0^\infty dz\, \frac{z\sin kz}{z^2+(j\pi)^2}}_{=\frac{\pi}{2}e^{-jk\pi}\quad k>0} =$$

$$= \mathrm{sgn}(k)\left[\frac{\pi}{2}+\pi\sum_{j=1}^\infty e^{-j\pi|k|}\right] =$$ [summan är geometrisk

$$= \frac{\pi}{2}\coth\left(\tfrac{1}{2}\pi k\right)$$

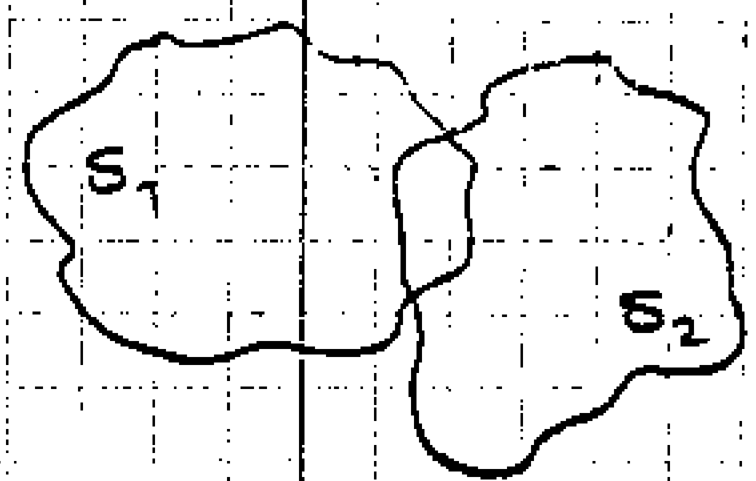
[egentligen gjorde vi ett fel när vi bytte $\sum \leftrightarrow \int$; ursprungliga integralen konvergerar inte, men den regulariserade integralen

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}\sin(kz)\coth(z)\,dz$$

konvergerar för $\alpha > 0$ och

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\coth\left(\tfrac{1}{2}\pi k\right)\ ]$$

ANALYTISK FORTSÄTTNING



$f_1(z)$ är analytisk i S_1

$f_2(z)$ är — " — i S_2

för $z \in S_1 \cap S_2$: $f_1(z) = f_2(z)$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in S_1 \\ f_2(z) & z \in S_2 \end{cases}$$

$f(z)$ är den (entydiga) analytiska fortsättningen av $f_1(z)$ och $f_2(z)$ till $S_1 \cup S_2$

Ex. $f_1(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n$ är analytisk för $|z| < 1$

$f_2(z) = \frac{1}{1-z}$ är analytisk för $z \neq 1$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z}$ är den analytiska fortsättningen av $f_1(z)$ till det hela komplexa planet med undantag av $z=1$

Varför? 1. Folk är ofta oförsiktiga och skriver $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z$

eller $\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$ [= den analytiska fortsättningen av $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ till $\mathbb{C}-\{1\}$]

2. ibland är det lättare att räkna ut en funktion i ett "felt" område och därefter analytiskt fortsätta till det önskade området

t.ex i kvantfältteorin är det lättare att räkna ut vissa funktioner för imaginära tidsargument och därefter analytiskt fortsätta till reella tider.

ex. Analytisk fortsättning av Riemanns zeta-funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad Re(s)>1$

divergerar för $s \leq 1$

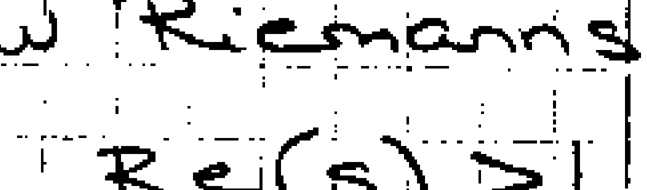
Eulers Γ-funktion $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx\, x^{s-1} e^{-x}$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} dx\, e^{-nx} x^{s-1} = \zeta(s)\Gamma(s) \quad \Leftrightarrow$

$\int_0^{\infty} dx\, x^{s-1} \left[\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right] = \zeta(s)\Gamma(s)$

$\Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx\, x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \quad Re\, s>1$

Betrakta $I_c = \int_c dz \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$ c: 

gren: $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\ln(-z)} \in \mathbb{R}$ om $z<0$

$\Rightarrow$ förgreningslinje för $z \in \mathbb{R}_+$

övre delen av konturen:

$$\int_\infty^0 \frac{e^{(s-1)(-i\pi+\ln x)}}{e^x-1}\,dx = e^{i\pi}e^{-is\pi}\int_\infty^0 dx\,\frac{x^{s-1}}{e^x-1}$$

$$\Rightarrow I_c = \left(e^{-is\pi}-e^{is\pi}\right)\int_0^\infty dx\,\frac{x^{s-1}}{e^x-1} = -2i\sin(s\pi)\,\zeta(s)\Gamma(s)$$

$$\Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\,\frac{1}{-2i\sin(s\pi)}\int_c dz\,\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}$$

analytisk $\forall\, s \neq 1$

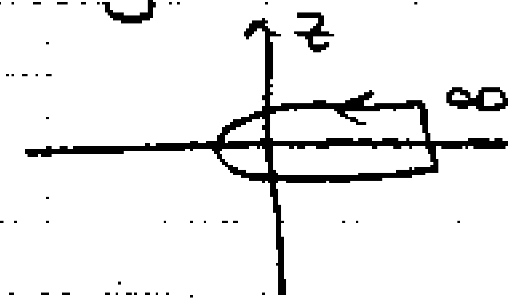
första ordn. pol vid $s=1$

(problem för z nära origo försvinner p.g.a att konturen är en loop)

använd $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

$$\Rightarrow \zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_c dz\,\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}$$

räkna ut $\zeta(-1) = -\frac{\Gamma(2)}{2\pi i}\int_c dz\,\frac{(-z)^{-2}}{e^z-1}$ = [integranden $\to 0$ för $z \to \infty$] $= -\frac{\Gamma(2)}{2\pi i}\oint_{c'} dz\,\frac{z^{-2}}{e^z-1}$ =: C'



= [3:e ordningens pol vid $z=0$] =

$$= -\Gamma(2)\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\right]_{z=0} = \left[\Gamma(2) = 1! = 1\right] = -\frac{1}{12}$$

sätt $s=-1$ i summa-uttrycket $\sum_{n=1}^\infty n^{-s} = 1+2+3+\ldots$

Notera $\zeta(s) = 0 \quad s = -2, -4, -6, \ldots$

(residyn = 0 pga symmetrin)

10/11 FÖRELÄSNING - Serier

□ SERIER

- Serien $\sum_{n=1}^\infty s_n$ konvergerar till S om

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N s_n = S$$

i) känner igen serien som en Taylorutveckling.

t.ex $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}x^n = -\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ln(1-x)\right]_{x=0} x^n$

$= -\ln(1-x)$

ii) känna igen som en Riemannsumma

t. ex $\quad \frac{2\pi}{N}\sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{2\pi}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N} \Delta x\, f(x_n)$, $\begin{cases} x_n = n\frac{2\pi}{N} \\ \Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{2\pi}{N} \end{cases}$

$\approx \int_{x_0}^{x_N} dx f(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^{2\pi} dx f(x)$

iii) känna igen som en summa över residyer

t. ex 1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(in\frac{2\pi}{\beta}\right) = \sum_{z_n} F(z_n)$

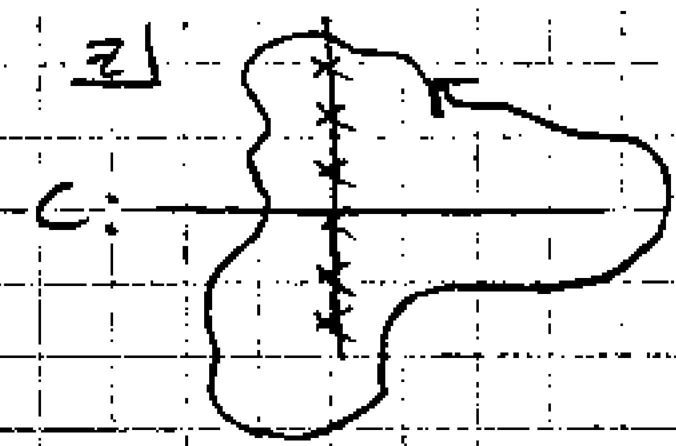
z_n = poler av en funktion $n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta z}-1}$

residyer: $n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta(z_n+z-z_n)}-1} = \frac{1}{e^{\beta(z-z_n)}-1}$

$\approx \frac{1}{\beta(z-z_n)} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_n} = \frac{1}{\beta}$

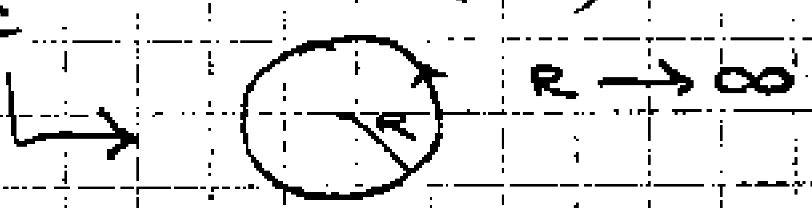
$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(in\frac{2\pi}{\beta}\right) = \beta\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Res}\left[n_B(z)F(z)\right] = \beta\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\, n_B(z)F(z)$

(om $F(z)$ inte har några poler)



2. $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$

betrakta $\quad I = \oint_C \frac{dz}{2\pi i}\frac{\pi}{\sin(\pi z)} f(z)$



om $|zf(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$; $I = 0$

$I = \sum_{\text{poler}} \text{Res}\left[\frac{\pi}{\sin(\pi z)} f(z)\right]$

nollställen av $\sin(\pi z)$: $z = n$, residy $(-1)^n f(n)$

$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) + \sum_{\substack{\text{poler av} \\ f(z)}} \text{Res}\left[\frac{\pi}{\sin(\pi z)} f(z)\right]$

ex. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = -\sum_{\substack{\text{poler av} \\ \frac{1}{(z+a)^2}}} \text{Res}\left[\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \cdot \frac{1}{(z+a)^2}\right] = -\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)_{z=-a} =$

$= \pi^2 \frac{\cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}$

- för $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ använd $\pi \cot(\pi z)$ istället för $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

iv) Poisson summeringsformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, e^{-ik\tau}}_{\text{kan ibland konvergera snabbare}}$$

t.ex $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(n-x)^2}$

för små $\alpha > 0$ många termer bidrar

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\alpha(\frac{\tau}{2\pi}-x)^2 - ik\tau}}_{\text{Gaussisk}: \sqrt{\frac{\pi(2\pi)^2}{\alpha}} \cdot e^{-2\pi i x k - \frac{\pi^2 k^2}{\alpha}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x - \frac{\pi^2 k^2}{\alpha}}$$

för små α, enbart några k nära $k=0$ ger bidrag $\Rightarrow F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[1 + e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}} \cdot 2\cos(2\pi x)\right]$

- jfr. Fourier transform

om den ursprungliga summan är "platt", är den transformerade summan "spetsig"

DIVERGENTA serier

- serieutvecklingar resulterar ofta i divergenta serier – t.ex. ett försök att hitta en serielösning till en ODE när en sådan inte finns — men ibland kan detta arbete räddas genom att bestämma ett lämpligt "värde" för serien.

- olika summeringsmetoder:

1. Abel (Euler): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n}_{\text{kan konvergera när } q \to 1}$ $|q|<1$

t.ex $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\ldots$ divergent

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n = \frac{1}{1+q} \xrightarrow[q\to 1]{} \frac{1}{2}$$

- fungerar om $a_n \sim n^z \Rightarrow a_n q^n \sim n^z q^n$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1} q^{n+1}}{a_n q^n} \sim \left(\frac{n+1}{n}\right)^z q \longrightarrow q$$

2. Borel

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\int_0^{\infty} dt\, e^{-t} t^n}{n!} a_n\right]$$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a_n$$

- konvergerar bättre än den ursprungliga serien

- Borel-summering är en analytisk fortsättning av den ursprungliga summan till ett större område

ex. $S(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2n+1)!!}_{=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}} q^n$: konvergensradie $= 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)!!\, q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} dt\, e^{-t} t^{2n+1}}{2^n \cdot n!} q^n \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} dt\, e^{-t}\, t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{t^2 q}{2}\right)^n = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t}\, t\, e^{\frac{1}{2}t^2 q} =$$

$$= \int_0^{\infty} dt\, t\, e^{\frac{1}{2}qt^2 - t}$$ konvergerar för $q<0$

$= S_B(q)$

- $S_B(q)$ kan vara en lösning till det

ursprungliga problemet för $q<0$

- Asymptotiska serier:

Serien $\sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$ är en asymptotisk serie för funktionen $f(x)$ om $|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n| \ll (x-x_0)^N$ när $x \to x_0$ (för ett visst N)

Ofta divergerar serien när $N \to \infty$

- Tumregel: trunkeringen av den asymptotiska serien precis före den minsta termen ger ofta en bra approximation för $f(x)$

jfr. Stirling formeln

Stieltjes integral:

$$f(x) = \int_0^\infty dt\, \rho(t) \frac{1}{1+xt} \quad \begin{cases} 1)\ \rho(t) \geq 0 \quad \forall t > 0 \\ 2)\ a_n = \int_0^\infty dt\, t^n \rho(t) \text{ finit } n=1,2,\dots \end{cases}$$

då $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n \quad x \to 0^+$

exempel: $\rho(t) = e^{-t^2}$

$$f(x) = \int_0^\infty dt\, \frac{e^{-t^2}}{1+xt}$$

$$a_n = \int_0^\infty dt\, t^n e^{-t^2} = \left\{ \begin{matrix} u = t^2 \\ du = 2t\,dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(-x)^n$$

- minsta term: kvoten mellan två efterföljande termer

$$= \left| \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right) x^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) x^n} \right| = x \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{stor } n: \\ \Gamma(z) \approx \left(\frac{z}{e}\right)^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{e} \\ \uparrow \\ \text{Stirling} \end{matrix} \right\} \approx x \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{e}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n/2}\right]^{n/2} = x\sqrt{\frac{n}{2}}$$

minsta termen: $x\sqrt{\frac{n}{2}} = 1 \Rightarrow n_{opt} = \frac{2}{x^2}$

$$\Rightarrow f(x) \approx \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{[2/x^2]} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(-x)^n$$

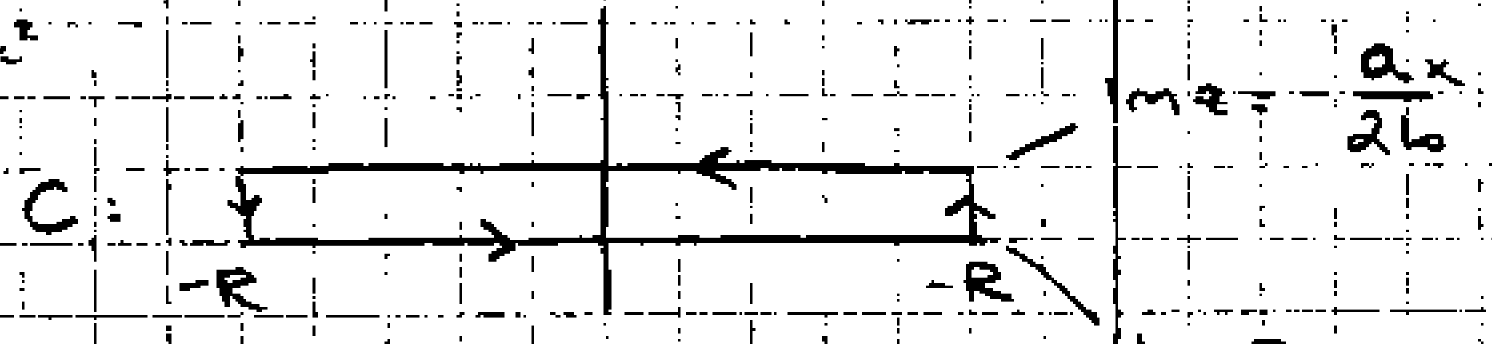
RÄKNEÖVNING

7. $\vec{I}(\vec{a}) = \int d^3x\, \vec{x}\, e^{i\vec{a}\vec{x} - bx^2}$

1° symmetri: $\vec{I} \parallel a \Rightarrow$ räkna ut $\vec{I}\cdot\vec{a}$ o.s.v.

2° notera: $\vec{I}(\vec{a}) = -i\vec{\nabla}\underbrace{\int d^3x\, e^{i\vec{a}\vec{x} - bx^2}}_{*}$ └ gradient $\frac{\partial}{\partial\vec{a}}$

$$* \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ia_x x - bx^2}}_{= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-b\left(x - i\frac{a_x}{2b}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{a_x^2}{b}}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{ia_y y - by^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{ia_z z - bz^2}$$



i) $\oint_C dz\, e^{-bz^2} = 0$ ← inga poler

ii) för $R \to \infty$, vertikala delar $= 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-bx^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-b\left(x - i\frac{a_x}{2b}\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-b\left(x - i\frac{a_x}{2b}\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\Rightarrow \vec{I}(\vec{a}) = -i\vec{\nabla}\left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{4b}\vec{a}^2}\right] = -i\,\frac{-1}{4b}\,2\vec{a}\left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{4b}\vec{a}^2}\right]$$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta(x) f(x)\right) - \delta(x) f'(x)\right] =$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f'(x) = -f'(0)$$

gäller för $f(x)$ som är kontinuerligt deriverbara vid $x = 0$

12 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x^2) f(x) = I$

i) Variabelsubstitution $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{y}} \delta(y) f(\sqrt{y}) + \int_{-\infty}^{0} \frac{dy}{-2\sqrt{y}} \delta(y) f(-\sqrt{y})$$

$$= \int_0^{\infty} dy\, \delta(y) \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

meningsfullt enbart om $\lim_{y\to 0^+} \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$ är finit; eftersom δ-funktionens nollställe är likt ett av integralens gränser får vi en extra ~~faktor~~ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{4\sqrt{y}}, \text{ om någonting}$$

ii) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{a\to 0^+} \delta(x^2 - a^2) f(x) =$$

$$= \int_0^{\infty} dx \lim_{a\to 0^+} \delta[(x-a)(x+a)] f(x) + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} dx \lim_{a\to 0^+} \delta[(x-a)(x+a)] f(x)}_{\text{byt } x \to -x}$$

$$= \int_0^{\infty} dx \lim_{a\to 0^+} \delta[(x-a)(x+a)][f(x) + f(-x)] =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \int_0^{\infty} dx\, \delta[(x-a)(x+a)][f(x) + f(-x)]$$

variabelsubst. $y = (x-a)(x+a)$ $dy = 2x\,dx$

$$\Rightarrow I = \lim_{a\to 0^+} \int_{-a^2}^{\infty} dy\, \delta(y) \frac{1}{2} \frac{f(\sqrt{y+a^2}) + f(-\sqrt{y+a^2})}{\sqrt{y+a^2}} =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{2} \frac{f(a) + f(-a)}{a}$$

iii) $$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{n^2x^2+1}$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{n}{\pi} \frac{1}{n^2x^4+1} f(x) = \int_0^{\infty} dx \frac{n}{\pi} \frac{1}{n^2x^4+1} [f(x) + f(-x)]$$

$$= \int_0^{\infty} dy \frac{n}{\pi} \frac{1}{n^2y^2+1} \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \Rightarrow n \to \infty$$

$$I_n \longrightarrow \lim_{y\to 0^+} \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{4\sqrt{y}} \quad \text{som (i)}$$

t.ex $f(x) = |x|$

$$I = \lim_{y \to 0^+} \frac{2|\sqrt{y}|}{4\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{n}{\pi} \frac{1}{(x^2a^2)^2+1} |x| = \frac{2n}{\pi} \int_0^{\infty} dx \, \frac{x}{(x^2a^2)^2+1}$$

$$= \left\{ y = x^2 - a^2 \quad dy = 2x\,dx \right\} =$$

$$= \frac{n}{\pi} \int_{-a^2}^{\infty} \frac{dy}{n^2y^2+1} = \left\{ \begin{matrix} u = ny \\ du = n\,dy \end{matrix} \right\} =$$

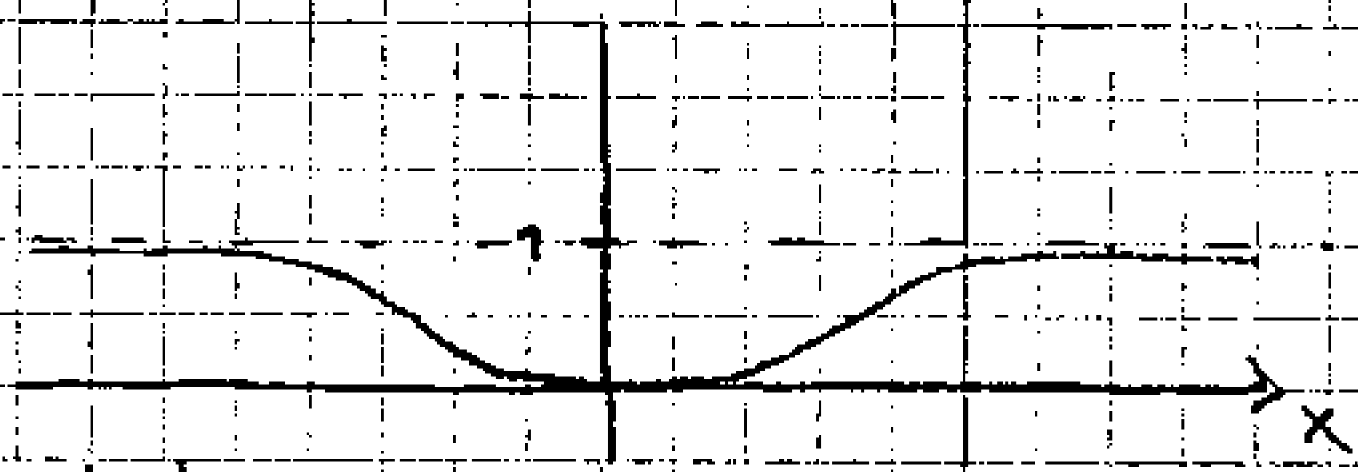
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-n^2a^2}^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(-n^2a^2)\right] =$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\xrightarrow{a \to 0} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

14

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



a) hoppar över - uppenbart!

b) derivator:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f''(x) = \left[\left(\frac{2}{x^3}\right)^2 - \frac{6}{x^4}\right] e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f^{(n)}(x) \sim \left(\frac{2}{x^3}\right)^n e^{-1/x^2} + (\text{mindre termer}) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ Taylorutveckla

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \ldots$$

c) Taylorserien konvergerar för alla x, men bara för $x = 0$ är seriens summa $= f(x)$

d) Varför?

Konvergens av Taylorserier är svårbedömt

Den lämpliga utvecklingen är inte Taylor utan Laurentutveckling

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(-1)^j \left(\frac{1}{z^2}\right)^j \text{ konvergerar } \forall z \neq 0$$

$f(z)$ är inte kontinuerlig vid $z=0$, utan $z=0$ är en väsentlig singularitet t.ex låt

$z = iy$; $f(iy) = e^{1/y^2} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$

15/11 FÖRELÄSNING

□ Ordinära differential ekvationer, asymptotiska lösningar

- Allmän linjär ODE:

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x) y(x) = 0$$

en punkt x_0 är: en <u>ordinär</u> punkt om alla $p_k(x)$ är analytiska vid $x = x_0$

en <u>singulär</u> punkt, om den inte är ordinär

en regulär s.p om alla $(x-x_0)^{n-k} p_k(x)$ är analytiska

en iregulär s.p om den inte är en RSP

Lösning av en linjär ODE:

nära en OP: potensserie

nära en RSP: Frobenius metod

nära en ISP: lösningen har ofta en väsentlig singularitet

Punkten $x=\infty$ är en ISP/RSP/OP om pkten $t=0$ är en ISP/RSP/OP av den ODE som fås genom substitution $t=1/x$

t.ex (1) $xy''+y'=y \iff y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x}y=0$

$\Rightarrow x=0$ är RSP

$t=1/x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=-t^2\frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}=-t^2\frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{d}{dt}\right)=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\left(t^4y_{tt}+2t^3y_t\right)-t^2y_t-y=0$

$\iff t^3y_{tt}+t^2y_t-y=0$

$\Rightarrow y_{tt}+\frac{1}{t}y_t-\frac{1}{t^3}y=0 \qquad t=0$

ISP ty $t^2\frac{1}{t^3}$ ej analytisk vid $t=0$

$\Rightarrow x=\infty$ en ISP av (1)

Nära en ISP försök med substitutionen

$y=e^{S(x)}$

t.ex $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$\left\{\left[S''+(S')^2\right]+p(x)S'+q(x)\right\}e^{S(x)}=0$

$\Rightarrow S''+(S')^2+p(x)S'+q(x)=0$

om x_0 är en ISP, då gäller ofta att $S''\ll(S')^2$ när $x\to x_0$

$(S')^2+p(x)S'+q(x)\approx 0$

$\Rightarrow S'\approx\frac{1}{2}\left[-p(x)\pm\sqrt{p^2(x)-4q(x)}\right]$

$S(x)$ kallas "controlling factor" och den ger det viktigaste bidraget till $y(x)$

Notation

1) $g(x) << f(x) \quad x \to \infty$

$\iff \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

2) $g(x) \sim f(x)$

$\iff g(x) - f(x) << g(x)$ {eller $f(x)$}

ex. 1 $\quad x^3 y'' = y \quad$ för $x \approx 0$

$y'' - \frac{1}{x^3} y = 0 \Rightarrow x = 0$ är ISP

sätt $y = e^{S(x)} \Rightarrow S'' + (S')^2 - \frac{1}{x^3} = 0$

anta $(S')^2 >> S'' \Rightarrow S' = \pm \frac{1}{x^{3/2}}$

$\Rightarrow S'' = \mp \frac{3}{2} x^{-5/2} << x^{-3} = (S')^2$ för $x \to 0$

$\Rightarrow S \sim \pm 2x^{-1/2}$

[fokusera på $x > 0$ s.a. $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$]

$\Rightarrow y \sim e^{\pm 2/\sqrt{x}}$

noggrannare lösning: $S(x) = 2x^{-1/2} + C(x)$

där $C(x) << 2/\sqrt{x}$ för $x \to 0^+$

$\Rightarrow y = e^{C(x) + 2/\sqrt{x}}$

$y' = (C'(x) - x^{-3/2}) y$

$y'' = (C' - x^{-3/2})^2 y + (C'' + \frac{3}{2} x^{-5/2}) y$

$\Rightarrow (C')^2 - 2x^{-3/2} C' + C'' + \frac{3}{2} x^{-5/2} = 0$

men $C << x^{-1/2}$

$\Rightarrow C' << x^{-3/2}$: första term << andra term

$\Rightarrow C'' << x^{-5/2}$: tredje term << fjärde

ex. 1 $\Rightarrow -2x^{-3/2} C' + \frac{3}{2} x^{-5/2} \approx 0$

$C' = \frac{3}{4x} \Rightarrow C = \frac{3}{4} \ln x$

kolla: $C << \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad C' << x^{-3/2}, \quad C'' << x^{-5/2}$

$\Rightarrow y(x) \sim e^{2/\sqrt{x} + \frac{3}{4}\ln x} = x^{3/4} e^{2/\sqrt{x}}$

ytterligare förbättringar

$$S = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{4}\ln x + D(x)$$

Mer allmänt:

Dominant balans

1) försumma alla små termer för att få en asymptotisk relation

2) lösa den asymptotiska relationen som om den var en ekvation

3) Kontrollera antaganden i steg 1.

ex 2 $y' + xy = x^{-4}$ nära $x=0$

möjliga förenklingar

i) $x^{-4} \gg |y'| \Rightarrow x^{-4} \sim xy \Rightarrow y \sim x^{-5} \Rightarrow y' \sim x^{-6}$

$\therefore x^{-4} \not\gg y'$

ii) $|xy| \gg x^{-4} \Rightarrow y' \sim -xy \Rightarrow \ln y \sim -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y \sim e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow xy \not\gg x^{-4}$

iii) $x^{-4} \gg xy \Rightarrow y' \sim x^{-4} \Rightarrow y \sim -\frac{1}{3}x^{-3} \Rightarrow x^{-4} \gg xy$ ok!

$\Rightarrow$ ledande beteende $y \approx -\frac{1}{3x^3}$ för små x: $x \to 0$

ex. 3: Vågfunktioner av en harmonisk oscillator

$$y'' + (\nu + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x^2)y = 0$$

ν — en parameter ~ energi

Lösning för $x \to \infty$: $x = \infty$ ISP $\Rightarrow y = e^S$

$\Rightarrow S'' + (S')^2 + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2) = 0$

anta $S'' \ll (S')^2$

$\Rightarrow S' \sim \pm\frac{1}{2}x \Rightarrow S \sim \pm\frac{1}{4}x^2$

$[\, S'' = \pm\frac{1}{2} \ll (\frac{1}{2}x)^2$: ok! $]$

$\Rightarrow y \sim e^{\pm\frac{1}{4}x^2}$

mer noggrann lösning

$y_\pm = e^{\pm\frac{1}{4}x^2}\omega(x)$

$y_\pm' = \left(\pm\frac{1}{2}x\omega + \omega'\right)e^{\pm\frac{1}{4}x^2}$

$y_\pm'' = \left[\pm\frac{1}{2}\omega \pm x\omega' + x\omega'' + \frac{1}{4}x^2\omega\right]e^{\pm\frac{1}{4}x^2}$

$\Rightarrow \omega'' \pm x\omega' + \left(\nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\omega = 0$

försök $\omega \sim x^\alpha$ [Frobenius metod]

$\omega' \sim \alpha x^{\alpha-1}$

$\omega'' \sim \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\Rightarrow \underbrace{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}_{\text{försumbar}} \pm \alpha x^\alpha + \left(\nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)x^\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha + \left(\frac{1}{2} \pm \nu \pm \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\nu - 1 \\ \alpha = \nu \end{cases}$

$\Rightarrow y_+ \sim x^{-\nu-1}e^{\frac{1}{4}x^2}$

$y_- \sim x^\nu e^{-\frac{1}{4}x^2}$

normaliseringskrav $\Rightarrow$ bara y_- är relevant

Allmänt om asymptotiska lösningar

1) om en funktion har en asymptotisk utveckling, så är utvecklingen entydig

2) Många olika funktioner har samma asymptotiska utveckling

t.ex $f(x) \sim \sum_n a_n x^n \quad x \to 0$

då $f(x) + e^{-1/x^2} \sim \sum_n a_n x^n$

3) Asymptotiska serier kan summeras, multipliceras och divideras som konvergenta serier

4) Asymptotiska serier kan integreras termvis

MEN de kan {ibland} inte deriveras termvis

- det sistnämnda är inte ett problem vid lösning av ODEs om koeff. har asymptotiska utvecklingar.

t.ex $y'' + q(x)y = 0$

antag $\begin{cases} q(x) \sim \sum_n q_n x^n \\ y(x) \sim \sum_n y_n x^n \end{cases}$

$\Rightarrow$ produkten qy har en asymptotisk utveckling

$\Rightarrow$ y'' har en as. utv

$\Rightarrow$ y' — " — då $y' = \int y'' dx$

{KURIOSA}

Hur löser man en fjärdegrads ekv. ?

(Ludovico Ferrar, 1540)

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$

$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 - cx - d$

$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) + y^2 = \left(2y + \frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 + (ay - c)x + y^2 - d$

välj y s.a HL är en kvadrat $(px + q)^2$

måste ha $\Delta = \left(2y + \frac{1}{4}a^2 - b\right)\left(y^2 - d\right) - \frac{1}{4}(ay - c)^2 = 0$

tredje grads ekv för y

$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}ax + y\right)^2 = (px + q)^2$

$x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm(px + q)$

2:a grads ekv. för x

22/11 FÖRELÄSNING - EGENVÄRDESPROBLEM

- Egenvärdesproblem för en allmän linjär operator

$\mathcal{L}u = \lambda u$

Linjär : $\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{L}u + \beta \mathcal{L}v$

t.ex $\mathcal{L}u = \left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right)u$

$\mathcal{L}u = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, K(x,y)\, u(y)$

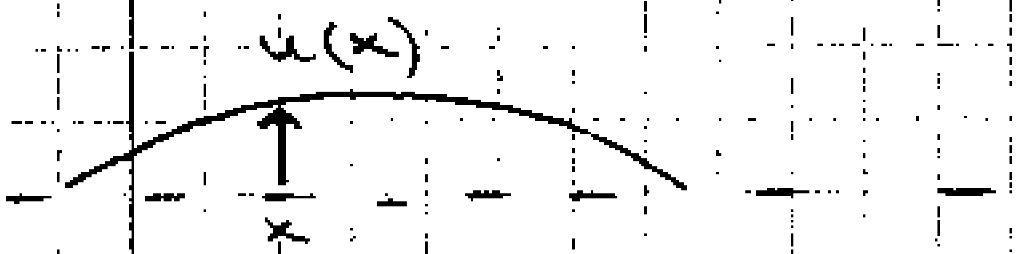
$\mathcal{L}$ är hermitesk om:

$\int dx\, v^*(x)\, \mathcal{L}\, u(x) = \left[\int dx\, u^*(x)\, \mathcal{L}\, v(x)\right]^*$

annan notation $\langle v|\mathcal{L}|u\rangle = \langle u|\mathcal{L}|v\rangle^*$

- om $\mathcal{L}$ är hermitesk, då $\lambda \in \mathbb{R}$ och egenfunktioner som tillhör olika egenvärden är ortogonala, $\langle u_m | u_n \rangle = \delta_{m,n}$
- om $\mathcal{L}$ är en diff. operator måste ekvationen $\mathcal{L}u = \lambda u$ kombineras med randvillkoren

ex. : 1-dim vibrerande sträng



$$-T\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \rho\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0$$

↳ spänning ↳ densitet

leta efter harmoniska lösningar:

anta $u(x,t) = e^{i\omega t}u(x,0)$

$\Rightarrow \left(\rho\omega^2 + T\frac{d^2}{dx^2}\right)u(x,0) = 0$: egenvärdesproblem

randvillkor: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

$\Rightarrow u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\rho\omega^2 - T\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$

multiplicerar med $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $k = 0, 1, 2 ..$

och integrera $\int_0^L dx$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\rho\omega^2 - T\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\right) \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}_{= \frac{1}{2}\delta_{n,k}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = a_k\left(\rho\omega^2 - T\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\right)$$

$\Rightarrow$ egenvärden $\quad \omega_k = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,\frac{\pi}{L}k$

- egenfunktioner av en hermitisk operator utgör en komplett bas

Inhomogena egenvärdesproblem:

$$\mathcal{L}u - \lambda u = f$$

anta: i) $\mathcal{L}$ är hermitisk

ii) $\mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n$: lösningar till det homogena problemet är kända

skriv: $u(x) = \sum_n a_n u_n(x)$

$f(x) = \sum_n f_n u_n(x)$

$$\Rightarrow \quad \sum_n a_n(\lambda_n - \lambda)u_n(x) = \sum_n f_n u_n(x)$$

multip. med $u_m^*(x)$ och integrera $\langle u_m | u_n \rangle = \delta_{m,n}$

$$\Rightarrow \quad a_m(\lambda_m - \lambda) = f_m$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \sum_n \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} u_n(x)$$

$$f_n(x) = \int dx' \, u_n^*(x') f(x')$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int dx' \sum \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} f(x')$$

$$= \int dx' \, G(x, x') f(x')$$

$G(x,x')$ är en Greens funktion

- om vi känner till $G(x,x')$, som bestäms av lösningen till det homogena problemet kan vi lösa alla icke-homogena problem av samma typ.

Hur tar man fram $G(x,x')$?

1. Summa över egenfunktioner

$$G(x,x') = \sum_n \frac{u_n(x)u_n^*(x')}{\lambda - \lambda_n}$$

Svårt!

2. Härleda en ekvation för $G(x,x')$ och lösa den.

$$\mathcal{L}u - \lambda u = f$$

$$\Rightarrow u(x) = \int dx'' G(x,x'') f(x'')$$

välj $f(x) = \delta(x-x') \Rightarrow u(x) = G(x,x')$

$\Rightarrow G(x,x')$ uppfyller ekv. $\mathcal{L}u - \lambda u = \delta(x-x')$

ex. $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$

randvillkor: $u(L) = u(0) = 0$

Sätt $\lambda = -k^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} G(x,x') + k^2 G(x,x') = \delta(x-x') \\ G(0,x') = G(L,x') = 0 \end{cases}$$

i) $x \neq x'$: $\frac{d^2}{dx^2} G(x,x') + k^2 G(x,x') = 0$

$$\Rightarrow G(x,x') = \begin{cases} A \sin kx & x < x' \\ B \sin[k(x-L)] & x > x' \end{cases}$$

ii) nära $x = x'$

$G(x,x')$ måste vara kont. Om så inte var fallet skulle vi ha

$$\frac{d}{dx} G(x,x') \sim \delta(x-x') \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} G(x,x') \sim \delta'(x-x')$$

men högersidan har bara $\delta(x-x')$, ej $\delta'(x-x')$

$\frac{d}{dx}G(x,x')$ måste vara diskont. för att få

$\frac{d^2}{dx^2}G(x,x') \sim \delta(x-x')$

diskontinuiteten måste vara sådan att

$$G'(x,x')\Big|_{x=x'+\epsilon} - G'(x,x')\Big|_{x=x'-\epsilon} = 1$$

$$\left(G'(x,x') = \int^{x} G''(x'',x')\,dx'' \right.$$

$$\Rightarrow \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} G''(x,x')\,dx = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \delta(x-x')\,dx = 1$$

$$\left. = G'(x'+\epsilon,x') - G'(x'-\epsilon,x') \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sin(kx') = B\sin[k(x'-L)] \\ kA\cos(kx') = kB\cos[k(x'-L)] - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\sin[k(x'-L)]}{k\sin(kL)} \\ B = \frac{\sin(kx')}{k\sin(kL)} \end{cases}$$

$$G(x,x') = \frac{1}{k\sin(kL)}\sin[k(x_>-L)]\sin[kx_<]$$

$$\text{där} \begin{cases} x_> = \max(x,x') \\ x_< = \min(x,x') \end{cases}$$

3. I högre dimensioner skriv:

$$G(x,x') = u(x,x') + v(x,x')$$

där $\mathcal{L}u - \lambda u = \delta(x-x')$ men $u(x,x')$ uppfyller inte randvillkoren, och $\mathcal{L}v - \lambda v = 0$ och randvillkoren av $v(x,x')$ bestäms så att $u+v$ uppfyller de ursprungliga randvillkoren. Lösningen $u(x,x')$ är en s.k fundamentallösning

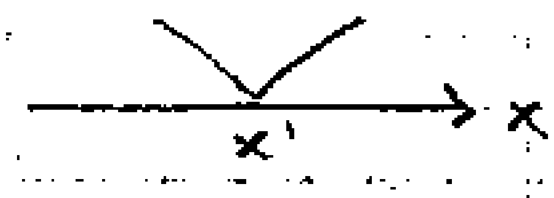
- Fundamentallösningar av Poissons elevation

$$\nabla^2 u(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

i) $d=1$: $\frac{d^2}{dx^2}u(x,x') = \delta(x-x')$

$\Rightarrow$ lutningen av $u(x,x')$ ändras med 1 vid $x=x'$

$\Rightarrow u(x,x') = \frac{1}{2}|x-x'|$

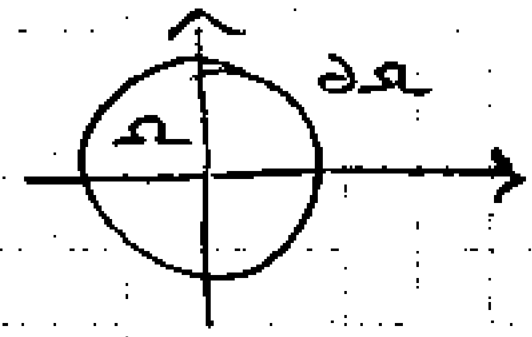


ii) $d=2$ (sätt $\vec{r}\,'=0$)

$$\nabla^2 u(\vec{r},0) = \delta(\vec{r})$$

symmetri: $u(\vec{r},0)$ beror endast på $|\vec{r}|=r$

Gauss' lag:



$$\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla}u \cdot d\hat{n} = \iint_{\Omega} \nabla^2 u\, d^2r =$$

$$= \iint_{\Omega} \delta(\vec{r})\, d^2r = 1$$

Välj Ω att vara en disk med radie R

$\Rightarrow 1 = \{\text{symmetri } \vec{\nabla}u \parallel \hat{r} \text{ obero. av } \theta\} = R\int_0^{2\pi} d\theta (\vec{\nabla}u)_r =$

$= R \cdot 2\pi \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r} \Rightarrow u(\vec{r},0) = \frac{1}{2\pi}\ln r$

$\Rightarrow u(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{2\pi}\ln(|\vec{r}-\vec{r}\,'|)$

iii) $d=3$ $\nabla^2 u(\vec{r},0) = \delta(\vec{r})$

Ω: ett klot med radie R

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{\nabla}u \cdot d\hat{n} = \iiint_{\Omega} \nabla^2 u\, d^3r = 1$$

$\Rightarrow 4\pi R^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 1 \Rightarrow u(\vec{r}, 0) = -\frac{1}{4\pi r}$

$\Rightarrow u(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(\vec{r} - \vec{r}\,')}$

- Retarderade och avancerade Greens funktioner

betrakta vågekvationen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi(x,t) = F(x,t)$$

↳ källterm

$$\Rightarrow \Phi = \int dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(x-x', t-t') F(x', t')$$

där $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(x,t) = \delta(x)\delta(t)$

$\mathcal{F}$: $G(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx-\omega t)} G(k,\omega)$

$\Rightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(k,\omega) = 1$

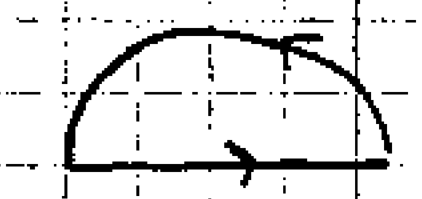
$\Rightarrow G(k,\omega) = \frac{c^2}{\omega^2 - c^2 k^2}$

genom $\mathcal{F}$-transf. förlorade vi info om randvillkoren ; fysikaliska randvillkoren är att $F(x', t')$ kan påverka lösningen enbart för $t > t'$ $\Rightarrow$ måste ha $G(x,t) = 0$ för $t < 0$ Kausalitet

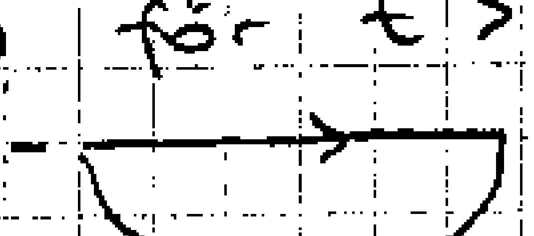
- Konsekvenser av kausalitet:

betrakta $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f(\omega)$

i) $t < 0$ $e^{-i\omega t} \to 0$ för $\mathrm{Im}(\omega) \to +\infty$

$\Rightarrow$ sluta konturen i övre halvplan 

ii) för $t > 0$ sluta konturen i nedre halvplan



$\Rightarrow$ om $f(\omega)$ endast har poler i nedre halvplan är kausaliteten garanterad $f(t<0)=0$

$\Rightarrow$ införa kausaliteten genom att ge polerna av $G(k,\omega)$ en liten negativ imaginärdel

$$G^R(k,\omega) = G(k, \omega + i\eta) \quad \eta > 0$$

$$= \frac{c^2}{(\omega + i\eta)^2 - c^2k^2}$$

poler $\omega = \pm ck - i\eta$ i lägre h.p

$\Rightarrow G(x,t) = 0$ för $t<0$

R står för retarderad: responsen sker senare än orsaken.

En avancerad Greens funktion def. på ett likadant sätt

$$G^A(k,\omega) = G(k, \omega - i\eta) \quad \eta > 0$$

$\Rightarrow G^A(x,t) = 0$ för $t>0$ ["havenkommission"]

24/11 FÖRELÄSNING - STÖRNINGSRÄKNING

- Reguljär störn.räkning

1. Icke-degenererat fall

$\mathcal{L}u = \lambda u$ [svårt]

$\mathcal{L}^{(0)}u^{(0)} = \lambda^{(0)}u^{(0)}$ [lätt] lösning $[\lambda_n^{(0)}, u_n^{(0)}(x)]$

om $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}^{(0)}$ (i någon mening) skriv det hårda problemet $[\mathcal{L}^{(0)} + (\mathcal{L} - \mathcal{L}^{(0)})]u = \lambda u$

störning $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L} - \mathcal{L}^{(0)}$

skriv: $\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} + \dots$

$$u_n = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} + u_n^{(2)} + \dots = u_n^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(2)} u_m^{(0)}$$

där $\lambda_n^{(j)} \sim (\delta\mathcal{L})^j$

$a_{mn}^{(j)} \sim (\delta\mathcal{L})^j$

$\Rightarrow$ vi får $[\mathcal{L}^{(0)} + \delta\mathcal{L}][u_n^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{(0)} + \ldots]$

$= (\lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} + \ldots)(u_n^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{(0)} + \ldots)$

Lös ordning för ordning:

$(\delta\mathcal{L})^0 : \mathcal{L}^{(0)} u_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)}$

$(\delta\mathcal{L})^1 : \sum_m a_{mn}^{(1)} \mathcal{L}^{(0)} u_m^{(0)} + \delta\mathcal{L} u_n^{(0)} =$

$= \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} u_m^{(0)} + \lambda_n^{(1)} u_n^{(0)}$

$(\delta\mathcal{L})^2 : \sum_m a_{mn}^{(2)} \mathcal{L}^{(0)} u_m^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} \delta\mathcal{L} u_m^{(0)} =$

$= \sum_m a_{mn}^{(2)} \lambda_n^{(0)} u_m^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(1)} u_m^{(0)} + \lambda_n^{(2)} u_n^{(0)}$

betrakta ordning $(\delta\mathcal{L})^1$:

i) multiplicera med komplex konj. $(u_n^{(0)})^*$ och integrera

$\sum_m a_{mn}^{(1)} \underbrace{\langle u_n^{(0)} | \mathcal{L}^{(0)} | u_m^{(0)} \rangle}_{= \circledast} + \langle u_n^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_n^{(0)} \rangle$

$= \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} \langle u_n^{(0)} | u_m^{(0)} \rangle + \lambda_n^{(1)} \underbrace{\langle u_n^{(0)} | u_n^{(0)} \rangle}_{= 1}$

$\circledast \; \lambda_m^{(0)} \langle u_n^{(0)} | u_m^{(0)} \rangle = \lambda_m^{(0)} \delta_{m,n}$

$\Rightarrow \lambda_n^{(1)} = \langle u_n^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_n^{(0)} \rangle$

ii) multiplicera m $(u_k^{(0)})^*$ $k \neq n$ och integrera

$\Rightarrow \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^{(0)} \delta_{km} + \langle u_k^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_n^{(0)} \rangle =$

$= \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} \delta_{k,m} + \lambda_n \underbrace{\delta_{k,n}}_{= 0}$

$\Leftrightarrow a_{kn}^{(1)} \lambda_k^{(0)} + \langle u_k^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_n^{(0)} \rangle = \lambda_n^{(0)} a_{kn}^{(1)}$

$\Rightarrow a_{kn}^{(1)} = \dfrac{\langle u_k^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_n^{(0)} \rangle}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \quad k \neq n$

$a_{nn}^{(1)}$ bestäms så att ortogonaliteten bevaras

$\Rightarrow \mathrm{Re}[a_{nn}^{(1)}] = 0$

OK att stoppa här om korrektionen liten

"Liten": $\delta\mathcal{L}$ är liten om korrektionen

$|\lambda_n^{(1)}| << |\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}| \quad \forall m \neq n$

ex. Mathieu ekvation:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + [b - \underbrace{s\cos^2\theta}_{\text{besvärlig term: störning}}]u = 0$$

randvillkoren: $u(0) = u(2\pi)$

ostörd: $u''(\theta) + bu(\theta) = 0$

sätt $b = n^2$

$$\Rightarrow \quad u_n(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(n\theta) & \text{jämn } n \in \mathbb{N} \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin(n\theta) & \text{udda } n \in \mathbb{N} \\ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} & n = 0 \end{cases}$$

störningen bevarar paritet: $s\cos^2\theta = s\cos^2(-\theta)$

$\Rightarrow$ jämna och udda lösningar blandas inte

- fokusera på jämna lösningar $u(\theta) = u(-\theta)$
- till ordning s^1, $n \neq 0$

$$b_n = n^2 + \langle u_n^{(0)} | -s\cos^2\theta | u_n^{(0)} \rangle$$

$$= n^2 - \frac{s}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\cos^2(n\theta)\cos^2\theta}_{\left[\frac{1}{2}\cos[(n+1)\theta] + \frac{1}{2}\cos[(n-1)\theta]\right]^2}$$

$$\Rightarrow b_n = n^2 - \frac{1}{2}s$$

$$a_{mn}^{(1)} = \frac{\langle u_m^{(0)} | -s\cos^2\theta | u_n^{(0)} \rangle}{-m^2 + n^2}$$

$$= \frac{s}{n^2 - m^2} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \cos(n\theta)\cos(m\theta)\underbrace{\cos^2\theta}_{= 1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{s}{n^2 - m^2}\left[\delta_{n,m-2} + \delta_{n,m+2}\right]$$

2. Degenererad

ovan: $a_{kn}^{(1)} = \dfrac{\langle u_k^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_n^{(0)} \rangle}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_k^{(0)}}$

problem om $\lambda_n^{(0)} = \lambda_k^{(0)}$: degenererat egenvärde betrakta det degenererade underrummet separat låt λ vara ett n-faldigt degenererat egenvärde

dvs $\mathcal{L}^{(0)} u_j^{(0)} = \lambda^{(0)} u_j^{(0)} \quad j = 1, 2, \ldots n$

försök lösa $(\mathcal{L}^{(0)} + \delta\mathcal{L}) u = \lambda u \quad \lambda \approx \lambda^{(0)}$

skriv $\tilde{u}_k^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} u_j^{(0)}$: linjärtransformation

mål: välja basen α_{jk} på ett bra sätt för att få en "lätt" bas, och

$$u_k = \tilde{u}_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} a_{mk}^{(1)} \tilde{u}_m^{(0)}, \quad \lambda_k = \lambda^{(0)} + \lambda_k^{(1)}$$

$$(\mathcal{L}^{(0)} + \delta\mathcal{L}) u_k = \mathcal{L}^{(0)} \tilde{u}_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} a_{mk}^{(1)} \tilde{u}_m^{(0)} + \delta\mathcal{L} \tilde{u}_k^{(0)} + \mathcal{O}(\delta^2\mathcal{L}^2)$$

$$= \lambda^{(0)} \tilde{u}_k + \sum_{m=1}^{n} a_{mk}^{(1)} \lambda^{(0)} \tilde{u}_m^{(0)} + \lambda_k^{(1)} \tilde{u}_k^{(0)}$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L} \tilde{u}_k^{(0)} = \lambda_k^{(1)} \tilde{u}_k^{(0)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \delta\mathcal{L} u_j^{(0)} = \lambda_k^{(1)} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} u_j^{(0)}$$

multiplicera med $(u_i^{(0)})^*$ och integrera

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \langle u_i^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_j^{(0)} \rangle \alpha_{jk} = \lambda_k^{(1)} \alpha_{ik}$$

definiera en matris $(\widehat{\delta\mathcal{L}})_{ij} = \langle u_i^{(0)} | \delta\mathcal{L} | u_j^{(0)} \rangle$

och vektorer $(\vec{\alpha}_k)_i = \alpha_{ik}$

$\Rightarrow \widehat{\delta\mathcal{L}} \vec{\alpha}_k = \lambda_k^{(1)} \vec{\alpha}_k$ egenvärdesproblem i det degenererade underrummet

- dimensionen av matrisen $\widehat{\delta\mathcal{L}}$ ges av antalet degenererade egenfunktioner

ex. $\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{d^2}{dx^2}}_{\mathcal{L}^{(0)}} + \underbrace{i\varepsilon \frac{d}{dx}}_{\delta\mathcal{L}} \qquad u(x) = u(x + 2\pi)$

[t.ex elektroner i en 1-dimensionell ring
$\varepsilon \sim$ magnetfält]

$\mathcal{L}^{(0)} u = \lambda u$

egenvärden $\lambda_k^{(0)} = k^2$

egenfunktioner $\begin{cases} u_{k,1}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \\ u_{k,2}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \end{cases}$

för $k \neq 0$ varje egenvärde 2-faldigt degenererat

Matris $\delta\hat{\mathcal{L}}$

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_{1,1} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\pi} \cos(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right) \cos(kx) = 0$$

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_{2,2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\pi} \sin(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right) \sin(kx) = 0$$

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_{1,2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\pi} \cos(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right) \sin(kx) = i\varepsilon k$$

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_{2,1} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\pi} \sin(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right) \cos(kx) = -i\varepsilon k$$

$\Rightarrow$ egenvärdesproblem $\begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon k \\ -i\varepsilon k & 0 \end{pmatrix} \vec{\alpha}_k = \lambda_k^{(1)} \vec{\alpha}_k$

$\Rightarrow \vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda_k^{(1)} = -\varepsilon k$

$\vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \lambda_k^{(2)} = \varepsilon k$

$\Rightarrow$ störningen bryter degenerationen

$$k^2 + \varepsilon k \quad \tilde{u}_{k,2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(kx) - \frac{i}{\sqrt{2}} \sin(kx)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

$k \quad k^2$

$$k^2 - \varepsilon k \quad \tilde{u}_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+ikx}$$

KURIOSA: Hur räknar man ut en determinant?

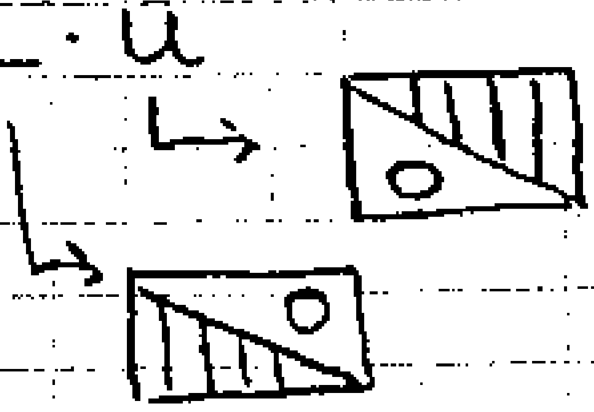
i) def $\det(A) = \sum_p (-1)^p \prod_i A_{i,p_i}$

$T \sim N! \sim (N/e)^N$ permutationer oerhört långsamt

ii) små determinanter ($N=2$ eller $N=3$) "\" - "/"

iii) med en dator

LU-dekomposition $\quad A = L \cdot U$



$T \sim N^3$, men kräver mkt "bookkeeping"

iv) ett trick från Wonderland [Lewis Carroll, 1833]

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{5\cdot 6 - 2\cdot 3} \begin{pmatrix} 24 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -7 \\ -2 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \frac{3\cdot 6 - 3\cdot 7}{3} = -1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 32 & 4 & 0 \\ -4 & -12 & 0 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{32(-12)+4\cdot 4}{8} = 50} \begin{pmatrix} 50 & ? \\ -16 & -4 \end{pmatrix}$$

$? = \frac{1}{0}(4\cdot 0 - 0\cdot 12)$ byt ut 0:n till ε

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 8 & \varepsilon & 0 \\ 4 & 3 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4-\varepsilon & -4\varepsilon \\ 12-2\varepsilon & -7\varepsilon \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon}\left[(4-\varepsilon)(-7\varepsilon) - (-4\varepsilon)(12-2\varepsilon)\right]$$

$$= 20 - \varepsilon \longrightarrow 20$$

$$\begin{pmatrix} 50 & 20 \\ -16 & -4 \end{pmatrix} = \frac{50(-4) - 20(-16)}{-12} = 10$$

Föreläsning
24/11-06
fre lv.4

Störningsräkning

Reguljär störningsräkning

1) icke degenererad fall

$\mathcal{L}u = \lambda u$ [svårt]

$\mathcal{L}^{(0)}u^{(0)} = \lambda^{(0)}u^{(0)}$ [lätt]: lösning $[\lambda_n^{(0)}, u_n^{(0)}(x)]$

om $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}^{(0)}$ (i någon mening), skriv det

hårda problemet $[\mathcal{L}^{(0)} + (\mathcal{L} - \mathcal{L}^{(0)})]u = \lambda u$

störning $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L} - \mathcal{L}^{(0)}$

skriv: $\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} + \dots$

$$u_n = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} + u_n^{(2)} + \dots$$

$$= u_n^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(2)} u_m^{(0)} + \dots$$

där $\lambda_n^{(j)} \sim (\delta\mathcal{L})^j$

$a_{mn}^{(j)} \sim (\delta\mathcal{L})^j$

$\Rightarrow$ Vi får $[\mathcal{L}^{(0)} + \delta\mathcal{L}][u_n^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{(0)} + \dots] =$

$$= (\lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} + \dots)(u_n^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{(0)} + \dots)$$

lös ordning för ordning

$(\delta\mathcal{L})^0$: $\mathcal{L}^{(0)} u_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)}$

$(\delta\mathcal{L})^1$: $\sum_m a_{mn}^{(1)} \mathcal{L}^{(0)} u_m^{(0)} + \delta\mathcal{L}\, u_n^{(0)} = \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} u_m^{(0)} + \lambda_n^{(1)} u_n^{(0)}$

$(\delta\mathcal{L})^2$: $\sum_m a_{mn}^{(2)} \mathcal{L}^{(0)} u_m^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} \delta\mathcal{L}\, u_m^{(0)} =$

$$= \sum_m a_{mn}^{(2)} \lambda_n^{(0)} u_m^{(0)} + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(1)} u_m^{(0)} + \lambda_n^{(2)} u_n^{(0)}$$

osv

etrakta ordning $(\delta\alpha)^1$

(i) multiplicera med $(u_n^{(0)})^*$ o. integrera

$$\sum_m a_{mn}^{(1)} \langle u_n^{(0)} | \alpha^{(0)} | u_m^{(0)} \rangle + \langle u_n^{(0)} | \delta\alpha | u_n^{(0)} \rangle$$

$$= \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} \underbrace{\langle u_n^{(0)} | u_m^{(0)} \rangle}_{\delta_{n,m}} + \lambda_n^{(1)} \underbrace{\langle u_n^{(0)} | u_n^{(0)} \rangle}_{1}$$

$$= \lambda_m^{(0)} \langle u_n^{(0)} | u_m^{(0)} \rangle = \lambda_m^{(0)} \delta_{m,n}$$

$$\Rightarrow \lambda_n^{(1)} = \langle u_n^{(0)} | \delta\alpha | u_n^{(0)} \rangle$$

i) multiplicera med $(u_k^{(0)})^*$, $k \neq n$ och integrera

$$(\delta\alpha)^1 : \sum_m a_{mn}^{(1)} \alpha^{(0)} u_m^{(0)} + \delta\alpha\, u_n^{(0)} = \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} u_m^{(0)} + \lambda_n^{(1)} u_n^{(0)}$$

$$\Rightarrow \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^{(0)} \delta_{k,m} + \langle u_k^{(0)} | \delta\alpha | u_n^{(0)} \rangle = \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_n^{(0)} \delta_{k,m} + \lambda_n^{(1)} \underbrace{\delta_{k,n}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow a_{kn}^{(1)} \lambda_k^{(0)} + \langle u_k^{(0)} | \delta\alpha | u_n^{(0)} \rangle = \lambda_n^{(0)} a_{kn}^{(1)}$$

$$\Rightarrow a_{kn}^{(1)} = \frac{\langle u_k^{(0)} | \delta\alpha | u_n^{(0)} \rangle}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \quad k \neq n$$

$a_{nn}^{(1)}$ bestäms så att ortogonaliteten bevaras $\Rightarrow \mathrm{Re}[a_{nn}^{(1)}] = 0$

OK att stoppa här om korrektionen är liten

"liten": $\delta\alpha$ är liten om $|\lambda_n^{(1)}| \ll |\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}|$, $\forall m \neq n$

ex: Mathieu ekvation

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+[b-\underbrace{s\cos^2\theta}_{\text{besvärlig term: störning}}]u=0$$

randvilkoren: $u(0)=u(2\pi)$

ostörd: $u''(\theta)+bu(\theta)=0$

sätt $b=n^2$

$$\Rightarrow u_n(\theta)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(n\theta),\ \text{jämn} & n\in\mathbb{N}\\ \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin(n\theta),\ \text{udda} & n\in\mathbb{N}\\ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} & n=0\end{cases}$$

Störningen bevarar paritet: $s\cos^2\theta=s\cos^2(-\theta)$

$\Rightarrow$ jämna och udda lösningar blandas inte

fokusera på jämna lösningar $u(\theta)=u(-\theta)$

till ordning s^1, $n\neq 0$

$$b_n=n^2+\langle u_n^{(0)}|-s\cos^2\theta|u_n^{(0)}\rangle=n^2-\frac{s}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\,\underbrace{\cos^2(n\theta)\cos^2\theta}_{\left[\frac{1}{2}\cos[(n+1)\theta]+\frac{1}{2}\cos[(n-1)\theta]\right]^2}$$

$$\Rightarrow b_n=n^2-\frac{1}{2}s$$

$$a_{mn}^{(1)}=\frac{\langle u_m^{(0)}|-s\cos^2\theta|u_n^{(0)}\rangle}{-m^2+n^2}=\frac{s}{n^2-m^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\cos(n\theta)\cos(m\theta)\underbrace{\cos^2(\theta)}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{s}{n^2-m^2}\left[\delta_{n,m-2}+\delta_{n,m+2}\right]$$

Degenererad

ovan: $a_{kn}^{(1)} = \dfrac{\langle u_k^{(0)} | \delta\alpha | u_n^{(0)} \rangle}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_k^{(0)}}$

problem om $\lambda_n^{(0)} = \lambda_k^{(0)}$: degenererat egenvärde

betrakta det degenererade underrummet separat

låt λ vara ett n-faldigt degenererat egenvärde

dvs: $\alpha^{(0)} u_j^{(0)} = \lambda^{(0)} u_j^{(0)} \quad j = 1, \dots n$

försök att lösa $(\alpha^{(0)} + \delta\alpha) u = \lambda u \quad \lambda \approx \lambda^{(0)}$

skriv $\tilde{u}_k^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} u_j^{(0)}$ en linjärtransformation

mål: välj α_{jk} på ett bra sätt för att få en "lätt" bas

och $u_k = \tilde{u}_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} a_{mk}^{(1)} \tilde{u}_m^{(0)} \qquad \lambda_k = \lambda^{(0)} + \lambda_k^{(1)}$

$$\Rightarrow (\alpha^{(0)} + \delta\alpha) u_k = \alpha^{(0)} \tilde{u}_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} a_{mk}^{(1)} \alpha^{(0)} \tilde{u}_m^{(0)} + \delta\alpha\, \tilde{u}_k^{(0)} + \mathcal{O}((\delta\alpha)^2)$$

$$= \lambda^{(0)} \tilde{u}_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} a_{mk}^{(1)} \lambda^{(0)} \tilde{u}_m^{(0)} + \lambda_k^{(1)} \tilde{u}_k^{(0)}$$

$$\Rightarrow \delta\alpha\, \tilde{u}_k^{(0)} = \lambda^{(1)} \tilde{u}_k^{(0)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\, \delta\alpha\, u_j^{(0)} = \lambda_k^{(1)} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} u_j^{(0)}$$

multiplicera med $(u_i^{(0)})^*$ och integreras

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \langle u_i^{(0)} | \delta\alpha | u_j^{(0)} \rangle \alpha_{jk} = \lambda_k^{(1)} \alpha_{ik}$$

definiera en matris $(\widehat{\delta\alpha})_{ij} = \langle u_i^{(0)} | \delta\alpha | u_j^{(0)} \rangle$

och vektorer $(\bar{\alpha}_k)_i = \alpha_{ik}$

$\Rightarrow \widehat{\delta\alpha}\, \bar{\alpha}_k = \lambda_k^{(1)} \bar{\alpha}_k$ egenvärden i det degenererade underrum dimensionen av matrisen $\widehat{\delta\mathcal{L}}$ ges av antalet degenererade egenfunktioner.

ex: $\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{d^2}{dx^2}}_{\mathcal{L}^{(0)}} + \underbrace{i\varepsilon \frac{d}{dx}}_{\delta\mathcal{L}}$ $\quad u(x) = u(x+2\pi)$

tex elektroner i en 1-dim ring $\varepsilon \sim$ magnetfält

$\mathcal{L}^{(0)} u = \lambda u$

egenvärden $\lambda_k^{(0)} = k^2$

egenfunktioner $\begin{cases} u_{k,1}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \\ u_{k,2}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \end{cases}$

för $k \neq 0$ är varje egenvärde 2-faldigt degenererat

matris $\widehat{\delta\mathcal{L}}$

$$\widehat{\delta\mathcal{L}}_{1,1} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\pi} \cos(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right)\cos(kx) = 0$$

$$\widehat{\delta\mathcal{L}}_{2,2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\pi} \sin(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right)\sin(kx) = 0$$

$$\widehat{\delta\mathcal{L}}_{1,2} = \int_0^{2\pi} dx \frac{1}{\pi} \cos(kx)\left(i\varepsilon \frac{d}{dx}\right)\sin(kx) = i\varepsilon k$$

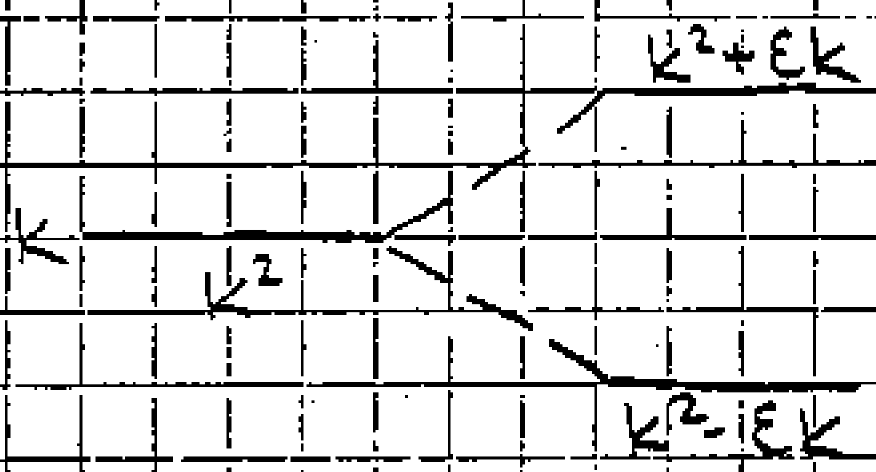
$$\widehat{\delta\mathcal{L}}_{2,1} = \qquad = -i\varepsilon k$$

→ egenvärdesproblem $\begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon k \\ -i\varepsilon k & 0 \end{pmatrix} \bar{\alpha}_k = \lambda_k^{(1)} \bar{\alpha}_k$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda_k^{(1)} = -\varepsilon k$$

$$\bar{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda_k^{(2)} = +\varepsilon k$$

⇒ Störningen bryter degenerationen



$$\tilde{u}_{k,2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(kx) - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin(kx)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

$$\tilde{u}_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\quad + \quad \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

Hur räknar man ut determinanter?

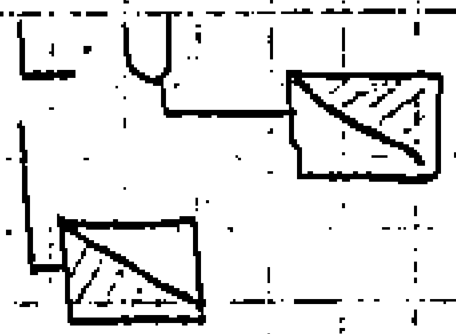
(i) definition $\det(A) = \sum_p (-1)^p \prod_i A_{i,p_i}$

$T \sim N! \sim (N/e)^N$ permutationer: långsamt!

(ii) små determinanter ($N=2$ eller $N=3$) "\" - "/"

(iii) med dator

LU-dekomposition $A = L \cdot U$



$T \sim N^3$ men kräver mycket "bookkeeping"

Räkneövning 24/11-06 fre 1.4

29 $I(x) = \int_0^\infty dt\, e^{xt-e^t}$ $x \gg 1$

aningen komplicerad om vi skriver I i standardformen $\int_0^\infty dt f(t) e^{x\phi(t)}$ får vi att exponenten har max

när $t \longrightarrow +\infty$, men då är $f(t) = e^{-e^t} \longrightarrow 0$

två sätt

1) max för hela funktionen

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left[xt - e^t\right] = x - e^t \Rightarrow t = \ln x$$

utveckla runt $t_0 = \ln x$: $t = t_0 + \delta t$

$$xt - e^t = xt_0 - e^{t_0} + \underbrace{x\delta t - e^{t_0}\delta t}_{0} + \frac{1}{2}e^{t_0}(\delta t)^2$$

$$= x\ln x - x + \frac{1}{2}x\,\delta t^2$$

$$\Rightarrow I(x) \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\delta t\, e^{x\ln - x}\, e^{\frac{1}{2}x\delta t^2} = e^{x(\ln x - 1)}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

2, variabelbyte: $t = \ln(xs)$

$$dt = \frac{ds}{s}$$

$$\Rightarrow I(x) = \int_{1/x}^{\infty} \frac{ds}{s}\, e^{x\ln(xs) - xs}$$

$$= \int_{1/x}^{\infty} \frac{ds}{s}\, e^{x\ln x + x(\ln s - s)}$$

max av $e^{x(\ln s - s)}$ $\quad 0 = \frac{\partial}{\partial s}(\ln s - s) = \frac{1}{s} - 1 \Rightarrow s = 1$

$$\ln(1+\delta s) = \delta s - \frac{1}{2}\delta s^2$$

$$\Rightarrow I(x) = e^{x\ln x}\,\frac{e^{-x}}{1}\int_{-\infty}^{\infty} d\delta s\, e^{-\frac{1}{2}x\delta s^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{x(\ln x - 1)}$$

$$I(x) = \int_0^1 dt \cos(x t^4) \tan(t) \qquad x \longrightarrow +\infty$$

$$= \mathrm{Re} \int_0^1 dt \tan(t) e^{ixt^4}$$

stationär fas: $\frac{\partial}{\partial t}(x t^4) = 4 x t^3 = 0 \Rightarrow t = 0$

problem $\tan(t=0) = 0$

$\Rightarrow$ variabelbyte

i) $s = t^2 \Rightarrow ds = 2t\,dt \Leftrightarrow dt = \frac{ds}{2\sqrt{s}}$

$$\Rightarrow \tan(t)dt = \underbrace{\frac{\tan(\sqrt{s})}{2\sqrt{s}}}_{\neq 0 \text{ då } s \to 0^+} ds$$

ii) alternativ: välj $s = -\ln \cos t$

$$ds = \frac{\sin t}{\cos t} dt = \tan t \cdot dt$$

$$\Rightarrow e^{-s} = \cos t \Rightarrow t = \arccos(e^{-s})$$

$$I(x) = \mathrm{Re} \int_0^{-\ln \cos 1} ds\, e^{ix[\arccos(e^{-s})]^4}$$

stationär fas: $0 = \frac{\partial}{\partial s}\left[\arccos^4(e^{-s})\right] = 4 \arccos^3(e^{-s}) \cdot \frac{(-1)(-1)e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}$

$$= \underbrace{\frac{4e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}}_{\neq 0 \ \forall s} \arccos^3(e^{-s})$$

$$\Rightarrow \arccos(e^{-s}) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-s} = 1 \Rightarrow s = 0$$

utveckla: $\arccos(e^{-s}) \approx \arccos(1 - s + \frac{1}{2}s^2)$

problem $\arccos(y)$ har ingen

Taylor utv. när $y = 1$

$$\Rightarrow \arccos\left(1-s+\tfrac{1}{2}s^2\right)=u$$

$$\Rightarrow 1-s+\tfrac{1}{2}s^2=\cos u \approx 1-\frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}u^2 = s-\tfrac{1}{2}s^2$$

$$\Rightarrow u=\sqrt{2s-s^2} \approx \sqrt{2s}\left(1-\tfrac{1}{4}s\right)$$

$$\Rightarrow \arccos(e^{-s}) \approx \sqrt{2s}\left(1-\tfrac{1}{4}s\right)$$

$$\Rightarrow I(x) \approx \mathrm{Re}\int_0^\infty ds\, e^{ix\left[\sqrt{2s}\left(1-\frac{1}{4}s\right)\right]^4}$$

$$\approx \mathrm{Re}\int_0^\infty ds\, e^{ix4s^2} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{8x}}(1+i)\right] = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

notera om exponenten inte är 4 skulle vi få en annorlunda integral i stil med $\int_0^\infty ds\, e^{i\alpha s^{p/2}}$ som fortfarande är lösbar.

41. $y'' + \omega^2 y = g(x) \qquad 0 \le x < 2\pi$

periodiska randvilkor

$$y(x) = \int_0^{2\pi} dx'\, G(x,x')\, g(x')$$

hitta Greens funktion

$$\partial_x^2 G(x,x') + \omega^2 G(x,x') = \delta(x-x')$$

i) $x \neq x'$: $\quad G(x,x') = \begin{cases} \sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{cases}$

ii) nära $x=x'$: $\quad \partial_x G(x,x')\Big|_{x=x'+\varepsilon} - \partial_x G(x,x')\Big|_{x=x'+\varepsilon} = 1 \quad \varepsilon \to 0^+$

för $x < x'$: $G_L = A_L \sin \omega x + B_L \cos \omega x$

$x > x'$: $G_R = A_R \sin \omega x + B_R \cos \omega x$

sätt $S = \sin(\omega x')$

$C = \cos(\omega x')$

$G_L(x', x') = G_R(x', x')$

$$A_L S + B_L C = A_R S + B_R C$$

$$\partial_x G_L(x,x')\Big|_{x=x'} = \partial_x G_R(x,x')\Big|_{x=x'} - 1$$

$$\omega A_L C - \omega B_L S = \omega A_R C - \omega B_R S - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega A_L = \omega A_R - C \\ \omega B_L = \omega B_R + S \end{cases}$$

periodiska randvillkor: $G_L(0, x') = G_R(2\pi, x')$

$$\partial_x G_L(x,x')\Big|_{x=0} = \partial_x G_R(x,x')\Big|_{x=2\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_L = B_R \cos(2\pi\omega) + A_R \sin(2\pi\omega) \\ \omega A_L = \omega A_R \cos(2\pi\omega) - \omega B_R \sin(2\pi\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega B_R + S = \cos(2\pi\omega)\omega B_R + \sin(2\pi\omega)\omega A_R \\ \omega A_R - C = \cos(2\pi\omega)\omega A_R - \sin(2\pi\omega)\omega B_R \end{cases}$$

$\Rightarrow$ matris

$$\Rightarrow \quad \omega A_R = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\pi\omega)}{1-\cos(2\pi\omega)} S = \frac{1}{2}\left[C + \cot(\pi\omega) S\right]$$

$$\omega B_R = \qquad = \frac{1}{2}\left[\cot(\pi\omega) C - S\right]$$

$$\Rightarrow \quad \omega A_L = \frac{1}{2}\left[-C + \cot(\pi\omega)S\right]$$

$$\omega B_L = \frac{1}{2}\left[\cot(\pi\omega)C + S\right]$$

$$\Rightarrow G(x,x') = \frac{1}{2\omega\sin(\pi\omega)}\begin{cases} \underbrace{[-\cos(\omega x')\sin(\pi\omega) + \cos(\pi\omega)\sin(\omega x')]\sin(\omega x) + [\cos(\pi\omega)\cos(\omega x') + \sin(\pi\omega)\sin(\omega x')]\cos(\omega x)}_{0 \leq x \leq x'} \\ [\cos(\omega x') \qquad x' \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x,x') = \frac{1}{2\omega\sin(\pi\omega)}\begin{cases} \sin[\omega(x'-\pi)]\sin(\omega x) + \cos[\omega(x'-\pi)]\cos(\omega x) & 0 \leq x \leq x' \\ \sin[\omega(x'+\pi)]\sin(\omega x) + \cos[\omega(x'+\pi)]\cos(\omega x) & x' \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x,x') = \frac{1}{2\omega\sin(\pi\omega)}\begin{cases} \cos[\omega(x-x'-\pi)] & 0 \leq x \leq x' \\ \cos[\omega(x-x'+\pi)] & x' \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

definiera: $x_{red} = x - 2\pi \underbrace{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}_{\text{största heltal ej större än } x} \quad \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow G(x,x') = \frac{\cos[\omega(x_{red} - x' + \mathrm{sgn}(x_{red} - x')\pi]}{2\omega\sin(\pi\omega)}$$

ingen lösning för ω = heltal

då heltal är egenvärden av det

homogena problemet

29/11 FÖRELÄSNING - singulär störningsteori
- gränsskikt
- WKB

ex. $\varepsilon x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

ε liten

ostörd : $ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow$ 2 lösningar

störd : 3 lösningar

$\Rightarrow$ kvalitativ förändring p.g.a störning.

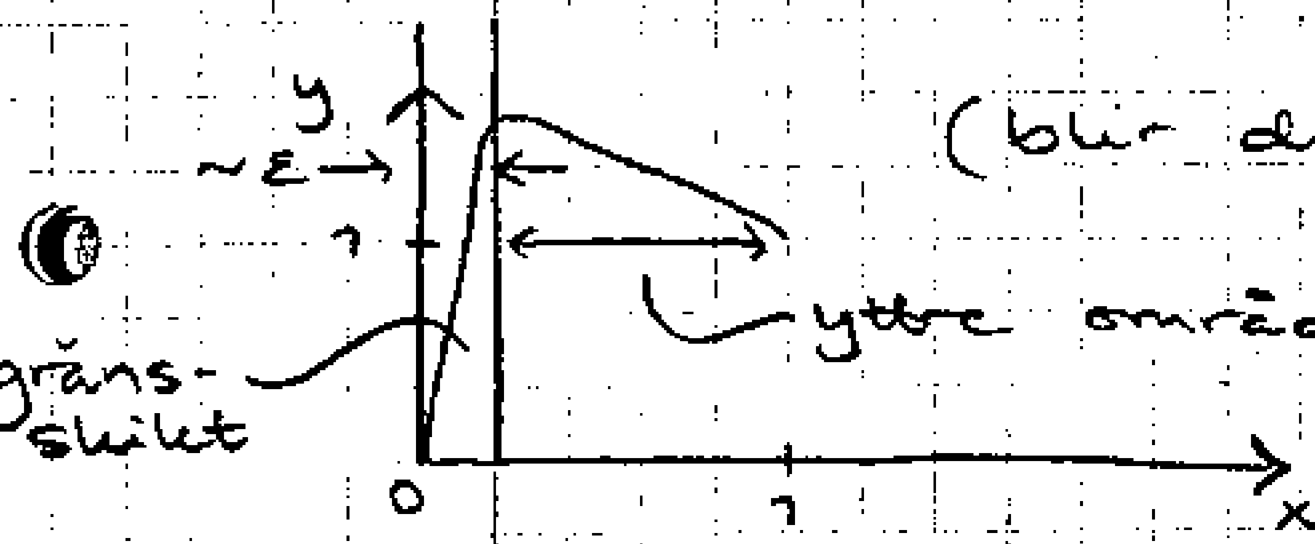
1. Gränsskiktsmetoden

- smalt område där lösningen av en diff. ekv. varierar kraftigt.
- motsats till gränsskiktet : yttre område, där lösningen varierar långsamt.

ex. $\varepsilon y'' + (1+\varepsilon)y' + y = 0$

$y(0) = 0$; $y(1) = 1$

exakt lösning : $y(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}$



(blir diskont. för $\varepsilon \to 0$)

Metod :

i) i det yttre området (OR) försumma alla derivator som multipliceras med ε

ii) i gränsskiktet (BL) behåll alla derivator men approx. långsamt varierande funktioner med konstanta.

iii) matcha BL och OR lösningarna.

ex. $\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = 0$

$y(0) = A \ , \ y(1) = B \quad \varepsilon \to 0^+$

- antag $a(x) \neq 0$ för x $0 \leq x \leq 1$

för att vara definit anta $a(x) > 0$

- antag att det finns ett BL vid $x = 0$

och att $y(x)$ för andra x varierar långsamt

OR: $a(x)y_{out}'(x) + b(x)y_{out}(x) = 0$

$y_{out}(1) = B$

$\Rightarrow y_{out}(x) = B e^{\int_x^1 dt \frac{b(t)}{a(t)}}$

approximativ lösning för $x > \delta(\varepsilon)$

BL: $\varepsilon y_{in}''(x) + a(0)y_{in}'(x) [+ b(0)y_{in}(x)] = 0$

snabb variation $\Rightarrow y(x) << y'(x) \Rightarrow$

försumma sista termen.

$y_{in}(0) = A$

$\Rightarrow y_{in}(x) = C_1 + C_2 e^{-a(0)x/\varepsilon}$

$y_{in}(0) = A \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$

$$\Rightarrow y_{in}(x) = A + C_2 \underbrace{\left[e^{-a(0)x/\varepsilon} - 1 \right]}_{\approx \begin{cases} 0, & x << \varepsilon/a(0) \\ -1 & x >> \varepsilon/a(0) \end{cases}}$$

Matchning:

* $y_{in}(x)$ varierar kraftigt för $x \lesssim \varepsilon/a(0)$

$\Rightarrow$ BL har en bredd $\delta(\varepsilon) \sim \varepsilon$

* matcha $y_{in}(x)$ och $y_{out}(x)$ med varandra

för ett $x = x_0$ s.a $\varepsilon y_{out}''$ är litet (i)

och $|a(x_0)y_{in}'(x_0)| >> |b(x_0)y_{in}(x_0)|$ (ii) t.ex $x_0 \approx -\frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{d}$ där $d > a(0)$

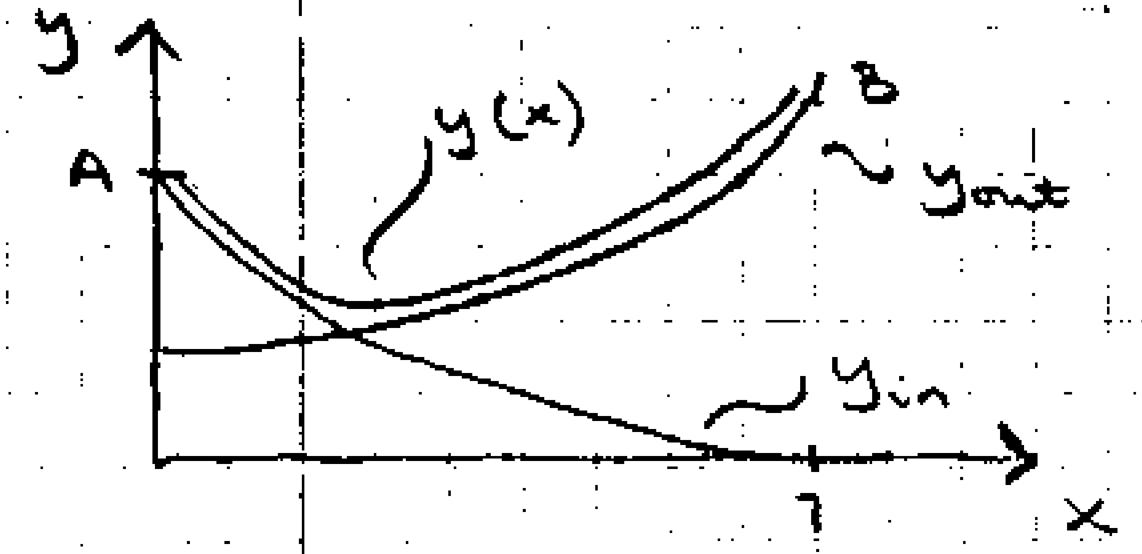
$$y_{in}(x_0) = A + C_2\left[e^{-a(0)x_0/\varepsilon} - 1\right] \approx A - C_2$$

$$y_{out}(x_0) \approx B e^{\int_0^1 dt \frac{b(t)}{a(t)}}$$

$$\Rightarrow C_2 = A - B e^{\int_0^1 dt \frac{b(t)}{a(t)}}$$

"Matching solution" $y(x) \approx y_{in}(x) + y_{out}(x) - y_{match}(x_0)$

$$= \left[A - B e^{\int_0^1 dt \frac{b(t)}{a(t)}}\right] e^{-a(0)x/\varepsilon} + B\exp\left[\int_x^1 dt\, b(t)/a(t)\right]$$



Notera att om (i) $a(x) = 0$ för något $0 < x < 1$

$\Rightarrow$ intern BL

(ii) om $a(x) < 0$: BL vid $x = 1$

2. Wentzel - Kramers - Brillouin - Jeffreys metod

$$\varepsilon^2 y'' = Q(x)\, y \qquad Q(x) \neq 0 \qquad \varepsilon \to 0^+$$

WKB Ansats: $y(x) \sim e^{\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(x)}$ $\quad \delta \to 0^+$

$$\Rightarrow y'(x) \sim \left(\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n S_n'\right) y(x)$$

$$y''(x) \sim \left[\left(\frac{1}{\delta}\sum \delta_n S'\right)^2 + \frac{1}{\delta}\sum \delta^n S''_n\right] y(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}(S_0')^2}_{\text{dominant term}} + \frac{2\varepsilon^2}{\delta} S_0' S_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_0'' + \dots = Q(x)$$

dominant term = måste ha $\delta \sim \varepsilon$: sätt $\delta = \varepsilon$

$$\begin{cases} \varepsilon^0: & (S_0')^2 = Q(x) \quad \Rightarrow S_0(x) = \pm \int^x \sqrt{Q(t)}\, dt \\ \varepsilon^1: & 2S_0'S_1' + S_0'' = 0 \quad \Rightarrow S_1(x) = -\frac{1}{4}\ln Q(x) \\ \varepsilon^{n\geq 2}: & 2S_0'S_n' + S_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{n-1} S_j' S_{n-j}' = 0 \quad \Rightarrow \text{osv.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ y(x) = C_1 Q^{-1/4}(x)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_a^x dt\sqrt{Q(t)}} + C_2 Q^{-1/4} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^x dt\sqrt{Q(t)}}$$

randvillkor : $C_{1,2}$, a [välj 1 , bestäm 2]

t.ex $y(0) = A$ $y'(0) = B$ välj $a = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} Q^{-1/4}(0)[C_1 + C_2] = A \\ -1/4\, Q'(0)\, Q^{-5/4}(0)[C_1 + C_2] + \frac{1}{\varepsilon}[C_1 - C_2]\, Q^{-1/4}(0) = B \end{array}$$

Vändpunkt : $Q(x) = 0$

1 En enkel vändpunkt (vid origo)

$Q(x) \sim ax$, $x \to 0$ $a > 0$

för enkelhet, antag $|Q(x)| \gg x^{-2}$

för $x \to \pm\infty$

Region I : $x \gg \varepsilon^{2/3}$

II : $|x| \ll 1$

III : $x \ll -\varepsilon^{2/3}$

I region I :

$$y_I(x) = C\,[Q(x)]^{-1/4} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x dt\sqrt{Q(t)}}$$

randvillkoren $y(x)$ ska vara finit $x \to \pm\infty$
tillåts bara den avtagande lösningen

* gränsen $\varepsilon^{2/3}$ sätts av villkoret $S_2 \ll S_1$

I region II

$\varepsilon^2 y'' = axy$

variabelbyte : $t = \varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = t\,y$: Airy diff. ekv.

$$y_{II}(x) = \underbrace{D\,Ai(\varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x) + E\,Bi(\varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x)}_{\text{Airy funktioner}}$$

I region III : $Q \neq 0$

$$y_{III}(x) = F\,[-Q(x)]^{-1/4} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 dt\sqrt{-Q}} + G[-Q]^{-1/4} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 dt\sqrt{-Q}}$$

matchning: $y_I(x \to 0^+) \sim C a^{-1/4} x^{-1/4} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{2}{3}x^{3/2}a^{1/2}}$

$$y_{II}(x) = \{\text{för } \varepsilon^{-2/3}a^{1/3}x \to \infty\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a^{-1/12}\varepsilon^{1/6}x^{-1/4}\left[\frac{1}{2}De^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{2}{3}a^{1/2}x^{3/2}} + Ee^{\frac{1}{\varepsilon}\frac{2}{3}a^{1/2}x^{3/2}}\right]$$

där vi använder asymptotiska uttryck för Ai och Bi för stora argument

$$Ai(t) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{-2/3\, t^{3/2}} \qquad t \to +\infty$$

$$Bi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{2/3\, t^{3/2}}$$

Matcha y_I och y_{II}: $\begin{cases} D = 2\sqrt{\pi}(a\varepsilon)^{-1/6} C \\ E = 0 \end{cases}$

På ett likadant sätt: matcha y_{II} och y_{III}

$\Rightarrow$ behöver asymptotiska utvecklingar för $Ai(t)$, $Bi(t)$ för $t \to -\infty$

$$Ai(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$Bi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow y_{III} = 2C[-Q(x)]^{-1/4} \sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 dt\sqrt{-Q(t)} + \frac{\pi}{4}\right]$$

/12 FÖRELÄSNING – integralekvationer

Linjär integralekvation:

$$\lambda\int_a^b dy\, K(x,y)f(y) + g(x) = h(x)f(x)$$

känt: $h(x)$, $g(x)$, $\underbrace{K(x,y)}_{\text{kärna}}$ $(, \lambda)$

okänt: $f(x)$, (λ)

- Fredholm ekvation

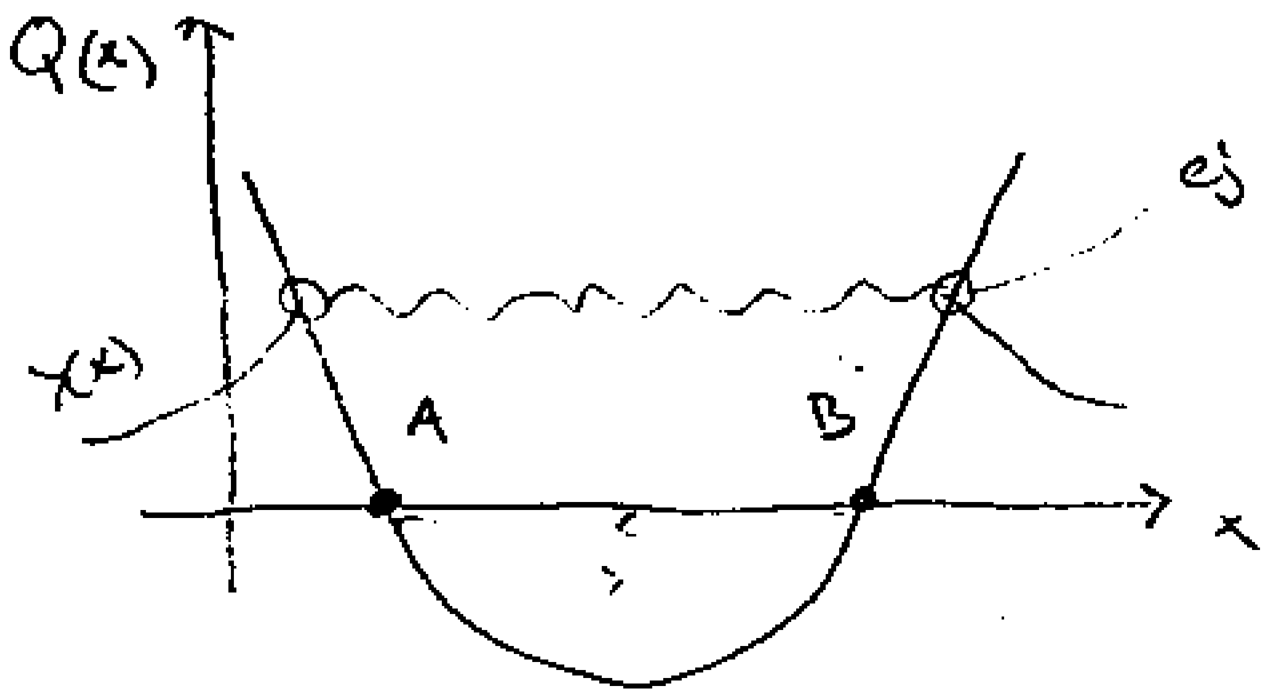
$h(x) = 0$ [F. ekv. av typ 1]

$h(x) = 1$ [F. ekv av typ 2]

WKB med två vändpunkter Isabelle

$$\varepsilon^2 y'' = Q(x) y$$

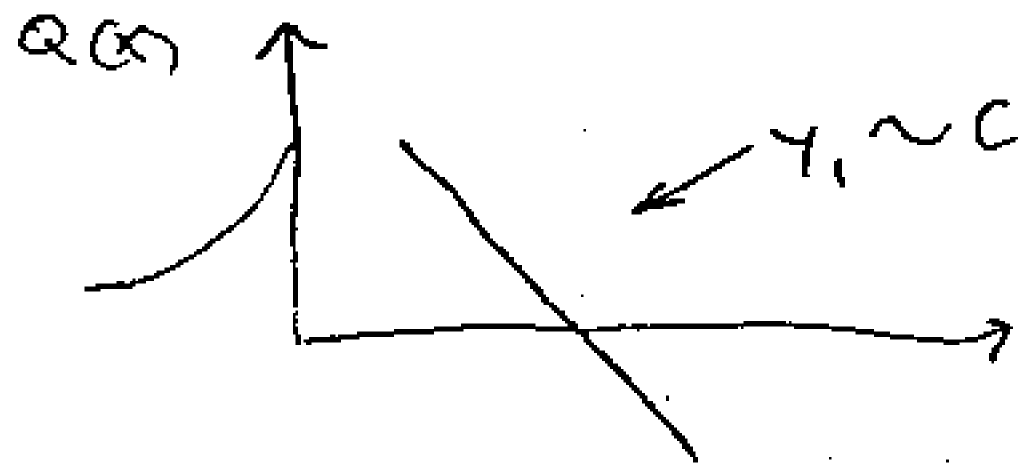
$$y(\pm\infty) = 0$$



- för de flesta $Q(x)$, är den enda lösn.

  $y(x) = 0 \quad \forall x$ [om $y(x)$ avtagande på den ena sidan får man oftast en ökande komponent på andra sidan]

- Titta på vänstra vändpunkten



$$y_1 \sim C_1 [-Q(x)]^{-1/4} \sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_A^x dt \sqrt{-Q(t)} + \frac{\pi}{4}\right]$$

för $x \gg A$

nära B:

avtagande lösn. för stora $x \gg B$

imedan

$$y_2(x) \sim C_2 [-Q(x)]^{-1/4} \sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_x^B dt \sqrt{-Q(t)} + \frac{\pi}{4}\right]$$

för $x \ll B$

för $A \ll x \ll B$ måste $y_1(x) = y_2(x)$

$$\Rightarrow C_1 \sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_A^x dt \sqrt{-Q(t)} + \frac{\pi}{4}\right] = C_2 \sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_x^B dt \sqrt{-Q(t)} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow C_1 \sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_A^x \sqrt{-Q(t)} + \frac{\pi}{4}\right] = -C_2 \sin\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_x^B \sqrt{-Q} - \frac{\pi}{4}\right]$$

om $C_1 = C_2$, vi behöver

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_A^x \sqrt{-Q} + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_x^B \sqrt{-Q} - \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \text{ udda}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_A^B dt\,\sqrt{-Q(t)} = m\pi - \frac{\pi}{2}$$

om $C_1 = -C_2$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_A^B dt\,\sqrt{-Q(t)} = m\pi - \frac{\pi}{2}, \quad m \text{ jämn}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_A^B dt\,\sqrt{-Q(t)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad C_1 = (-1)^n C_2$$

Exempel:

$$\varepsilon^2 y'' = (V(x) - E)\,y(x), \quad y\pm\infty = 0$$

(bundna tillstånd i kvantmekanik)

$\Rightarrow$ egenvärden E måste uppfylla

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_A^B \sqrt{E-V(x)}\,dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \underbrace{O(\varepsilon)}_{\text{kot. av } \varepsilon}$$

typiskt $\varepsilon^2 = \frac{\hbar^2}{2m}$

---

3) Flerskalsanalys

Problem: initiellt liten korrektion till lösn. av det ostörda problemet växer med tiden
$\Rightarrow$ antagandet att korrektionen är liten gäller bara under en begränsad tid.

Exempel $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y = \underbrace{\varepsilon \cos(\omega t)}_{\text{störning}}$

$\underline{1^\circ}$ $\omega \neq \omega_0$: lösn.

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)}_{\text{alltid liten om } \varepsilon \text{ liten}}$$

$\underline{2^\circ}$ $\omega = \omega_0$: lösn.

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2\omega_0^2}\omega_0 t \sin(\omega_0 t)}$$

sekulär term

liten enbart om $\frac{\varepsilon}{2\omega_0}\omega_0 t \ll 1$

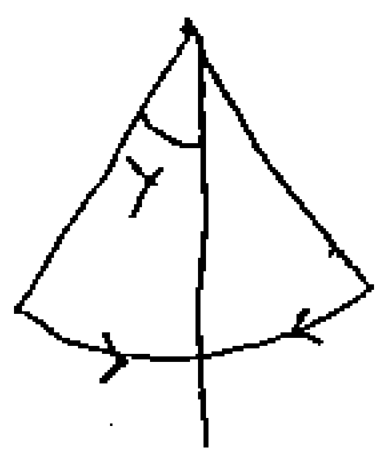
$\Leftrightarrow t \ll \frac{2\omega_0}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Vid resonans leder en liten störning till stora effekter

$\Rightarrow$ ordinär störningsteori fungerar inte

Exempel icke harmonisk oscillator
[Duffin oscillator]

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y + \varepsilon y^3 = 0$$



Standard Ansatz:

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

ordn. för ordn.

ε^0: $\ddot{y}_0(t) + \omega_0^2 y_0(t) = 0$

ε^1: $\ddot{y}_1(t) + \omega_0^2 y_1(t) + y_0^3(t) = 0$

osv.

randvillkor: $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$

$$\Rightarrow y_0(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = -\cos^3(\omega_0 t) = -\frac{1}{4}\cos(3\omega_0 t) - \frac{3}{4}\cos(\omega_0 t)$$

jmf. ovan:

$$y_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4}\frac{1}{\omega_0^2 - 9\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t) -$$
$$- \frac{3}{4}\frac{1}{2\omega_0^2}\omega_0 t\sin(\omega_0 t)$$

$y_1(0)=0$, $\dot{y}_1(0)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{32\omega_0^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \cos(\omega_0 t) - \frac{\varepsilon}{32\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{\varepsilon}{32\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t) -$$
$$- \frac{3\varepsilon}{8\omega_0^2}\omega_0 t\sin(\omega_0 t)$$

Är det rätt? Nej

- ekvationen beskriver rörelse i en potentialbrunn

$$V(y) = m\left[\frac{1}{2}\omega_0^2 y + \frac{1}{4}\varepsilon y^4\right]$$

energin bevarad $\Rightarrow$ $y(t)$ kan inte växa hur stor som helst,

men vi fick $y(t\to\infty) = \pm\infty$

<u>Bevis</u>: $\ddot{y} = -\omega_0^2 y - \varepsilon y^3$

$$\Rightarrow \dot{y}\ddot{y} = -\omega_0^2 y\dot{y} - \varepsilon y^3\dot{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\dot{y}^2) = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}\omega_0^2 y^2 - \frac{1}{4}\varepsilon y^4\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{y}^2 = C - \frac{1}{2}\omega_0^2 y^2 - \frac{1}{4}\varepsilon y^4$$

vid $t=0$ $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$ $\Rightarrow C = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{4}\varepsilon$

men $\frac{1}{2}\dot{y}^2 \geq 0$ $\Rightarrow \max y^2 = 1$

I allmänhet händer detta när vi har ett problem

$$\mathcal{L}y = \varepsilon f$$

där $\mathcal{L}$ = linj. diff operator med konstanta koeff. och om $\mathcal{L}f = 0$, dvs.
störningen (källan) f uppfyller den homogena ekv. (resonans)

Recept: separera den snabba tidsskalan av det ostörda problemet och den långsamma tidsskalan under vilken resonansen växer, ofta är den långsamma skalan $\sim 1/\varepsilon$

Exempel:

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) + \varepsilon y^3(t) = 0$$

sätt $y(t) = Y(t,\tau)$, $\tau = \varepsilon t$

resonansen är stor, om $\tau \approx 1$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \tau}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial \tau} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}}_{\text{försumma (liten)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial \tau} + \omega_0^2 Y + \varepsilon Y^3 = 0$$

Skriv $Y(t,\tau) = Y_0(t,\tau) + \varepsilon Y(t,\tau)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^0: & \dfrac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_0 = 0 \\ \varepsilon^1: & \dfrac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_1 + 2\dfrac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + Y_0^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{i\omega_0 t} + B(\tau)e^{-i\omega_0 t}$$

Kräv $Y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow B(\tau) = A^*(\tau)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_1 = -\left[A(\tau)\, e^{i\omega_0 t} + A^*(\tau)\, e^{-i\omega_0 t}\right]^3 -$$

$$-2\left[i\omega_0 A'(\tau)\, e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A^{*\prime}(\tau) e^{-i\omega_0 t}\right] =$$

$$= e^{i\omega_0 t}\left[-2i\omega_0 A'(\tau) - 3A^2(\tau) A^*(\tau)\right] + e^{-i\omega_0 t}\left[2i\omega_0 A^{*\prime}(\tau) - 3A^{*2}(\tau) A(\tau)\right] -$$

$$- A^3(\tau)\, e^{3i\omega_0 t} - A^{*3}(\tau)\, e^{-3i\omega_0 t}$$

- Om de två första termerna på högersidan är skilda från noll, har vi resonans, och följaktligen problem.,

$\Rightarrow$ Välj $A(\tau)$ så att

$$\begin{cases} -2i\omega_0 A'(\tau) - 3A^2(\tau) A^*\tau = 0 & \text{och} \\ 2i\omega_0 A^{*\prime}(\tau) - 3A^{*2}(\tau) A(\tau) = 0 \end{cases}$$

sätt $\quad A(\tau) = R(\tau)\, e^{i\theta(\tau)}, \quad R, \theta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -2i\omega_0 R'(\tau) + 2\omega_0 R(\tau)\theta'(\tau) - 3R^3(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Imag. del:} & -2i\omega_0 R' = 0 \Rightarrow R(\tau) = R_0 \\ \text{Real.del:} & 2\omega_0 R_0 \cdot \theta' - 3R_0^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta(\tau) = \frac{3R_0^2}{2\omega_0}\tau + \theta_0$$

$$\Rightarrow A(\tau) = R_0 \exp\left[i\frac{3R_0}{2\omega_0}\tau + i\theta_0\right]$$

$$\Rightarrow Y_0(t,\tau) = 2R_0 \cos\left[\omega_0 t + \frac{3R_0^2}{2\omega_0}\tau + \theta_0\right]$$

ekv. för $Y_1(t,\tau)$ har ingen resonans

$$\Rightarrow Y_1(t,\tau) = C_1(\tau)\cos\left[\omega_0\left(t + \frac{3}{2}\frac{R_0^2}{\omega_0^2}\tau\right) + \theta_0\right] +$$

$$+ C_2(\tau)\sin\left[\quad \text{——} \;''\; \text{——} \quad\right] -$$

$$- \frac{2R_0^3}{\omega_0^2 - 9\omega_0^2}\cos\left[3\omega_0\left(t + \frac{3}{2}\frac{R_0^2}{\omega_0^2}\tau\right) + \theta_0\right]$$

Randvillkoren $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_0(0,0) + \varepsilon Y_1(0,0) = 1 \\ \left(\frac{\partial Y_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial Y_0}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial t}\right)_{\substack{t=0 \\ \tau=0}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(0,0)=1 \Rightarrow 2R_0 \cos\theta_0 = 1$$

$$\frac{\partial Y_0(0,0)}{\partial t} = 0 \Rightarrow -2R_0\omega_0 \sin\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow R_0 = \tfrac{1}{2}, \quad \theta_0 = 0$$

$$\begin{cases} Y_1(0,0) = 0 \\ \frac{\partial Y_0(0,0)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_1(0,0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

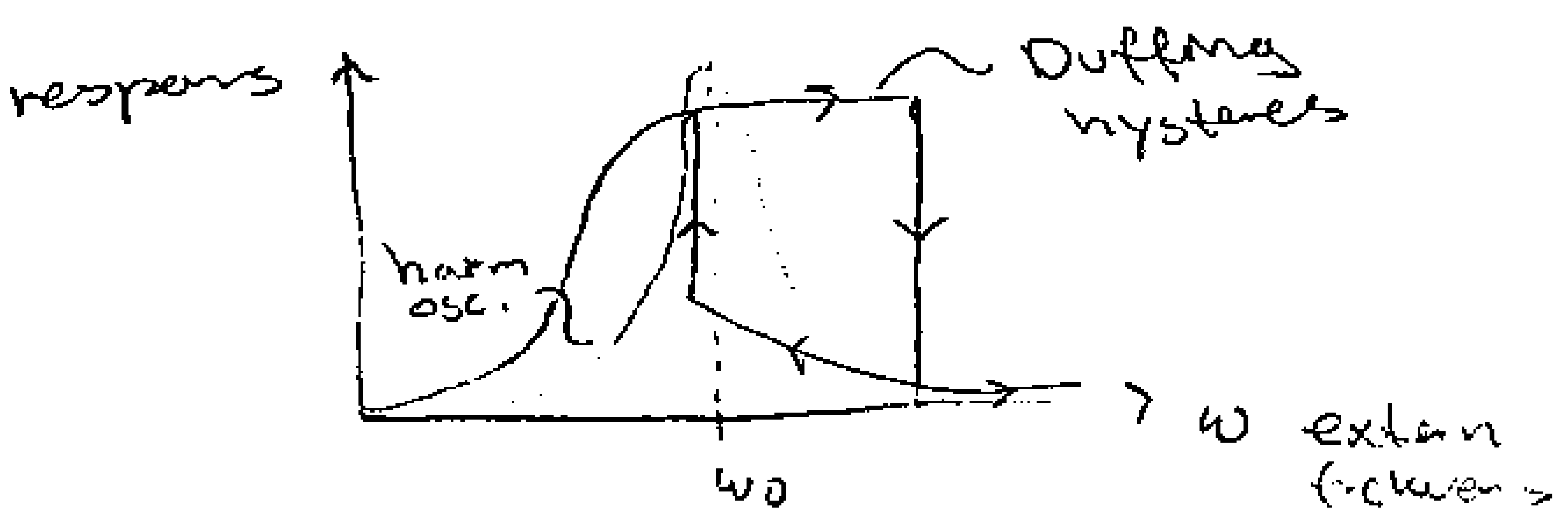
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(0) = -\frac{2R_0^3}{8\omega_0^2} \\ C_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \cos\left[\underbrace{\left(\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_0}\right)}_{\text{ny frekvens}} t\right] + O(\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ Icke harmoniskt leder till, i första hand en frekvensskift

$\Rightarrow$ drift i en pendelklocka om amplituden är för stor

- i högre ordningar i ε är Duffing oscillatorns beteende mångfacetterat, i synnerhet om den drivs med en extern kraft $\rightarrow$ bifurkationer mm.



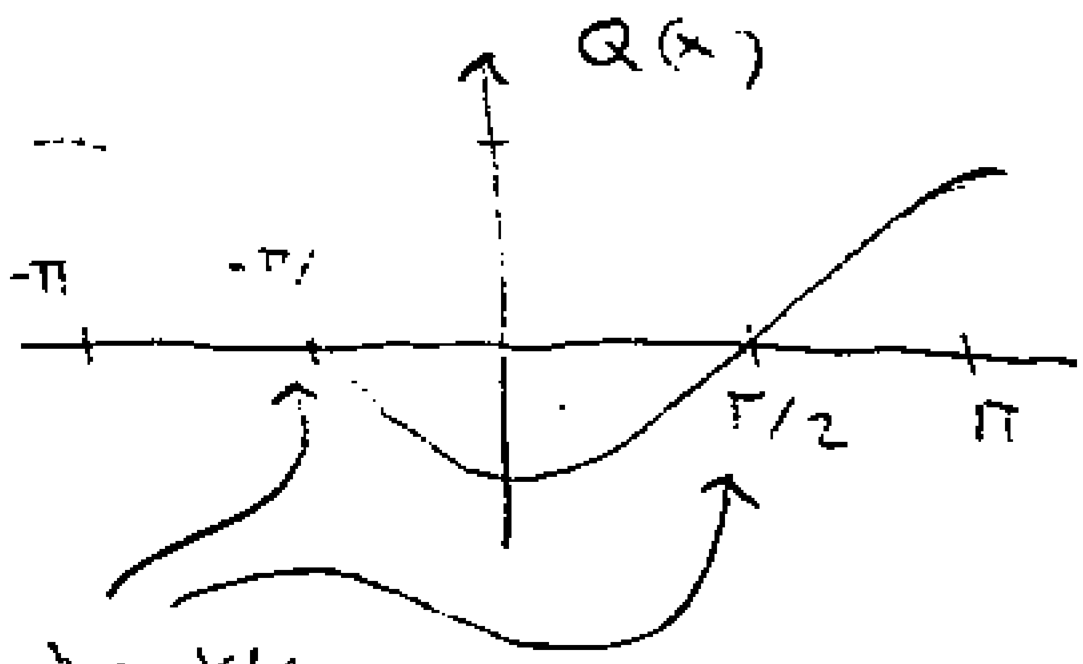
59)

$$y'' + E\cos(x)\, y = 0$$

$$E \gg 1 \ , \quad y(\pm\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{E} y'' = -\cos(x)\, y \ : \quad \text{WKB} \quad \left(E^{-1} = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{E} = \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$Q(x) = -\cos x$$



vändpunkter

fem områden:

① $-\pi \le x \ll -\frac{\pi}{2} - E^{-1/3}$

② $-\frac{\pi}{2} - W < x < -\frac{\pi}{2} + W$

③ $-\frac{\pi}{2} + E^{-1/3} \ll x \ll \frac{\pi}{2} - E^{-1/3}$

④ $\frac{\pi}{2} - W < x < \frac{\pi}{2} + W$

⑤ $\frac{\pi}{2} + E^{-1/3} \ll x \le \pi$

W: området nära $\pm\pi$ där $-\cos x$ är linjär, $W \gtrsim \pi/4$

① o ⑤ $\quad Q(x) > 0$

$$\Rightarrow y(x) \approx [Q(x)]^{-1/4} e^{\pm\sqrt{E} \int^x dx' \sqrt{Q(x')}}$$

③ $\quad Q(x) < 0 \Rightarrow y(x) \approx [-Q(x)]^{-1/4} e^{\pm i\sqrt{E} \int^x dx' \sqrt{Q(x')}}$

② o ④ innehåller ett nollställe

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \mathrm{Ai}(\ ) + C_2 \mathrm{Bi}(\ )$$

Matcha ① ↔ ②, ② ↔ ③, ③ ↔ ④, ④ ↔ ⑤

① $\leftrightarrow$ ⑤: randvillkor $y(\pm\pi)=0$

$$\Rightarrow y_1(x) = A\left[-\cos x\right]^{-1/4}\sinh\left[\sqrt{E}\int_{-\pi}^{x}dx'\sqrt{-\cos x'}\right]$$

$$y_5(x) = \hat{A}\left[-\cos x\right]^{-1/4}\sinh\left[\sqrt{E}\int_{x}^{\pi}dx'\sqrt{-\cos x'}\right]$$

För $x \lesssim -\frac{\pi}{2}$

$$y_1(x) = A\left[-x-\frac{\pi}{2}\right]^{-1/4}\sinh\left[\sqrt{E}\int_{-\pi}^{-\pi/2}dx'\sqrt{-\cos x'} - \sqrt{E}\int_{x}^{-\pi/2}dx'\sqrt{-\cos x'}\right] \approx$$

$$\approx A\left[-x-\frac{\pi}{2}\right]^{-1/4}\sinh\left[\sqrt{E}\,\Phi - \sqrt{E}\Big|_{x}^{-\pi/2} -\frac{2}{3}\left(-x'-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}A\left[-x-\frac{\pi}{2}\right]\left\{e^{\sqrt{E}\,\Phi}e^{-\sqrt{E}\frac{2}{3}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}} - e^{-\sqrt{E}\,\Phi}e^{+\sqrt{E}\frac{2}{3}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}}\right\}$$

$$\left(\int_a^b f(x')\,dx' = \Big|_a^b F(x)\right)$$

pss.

$$y_5\left(x \gtrsim \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\hat{A}\left[x-\frac{\pi}{2}\right]^{-1/4}\left\{e^{\sqrt{E}\,\Phi - \sqrt{E}\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}} - e^{-\sqrt{E}\,\Phi + \sqrt{E}\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}}\right\}$$

② ≅ ④.

②: $\frac{1}{E}y'' \approx \left(-x-\frac{\pi}{2}\right)y$: sätt $t = \alpha\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{E}\alpha^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{t}{\alpha}y$$

$$\Rightarrow \text{välj } \alpha = \sqrt[3]{E} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = ty$$

$$\Rightarrow y_2(x) = B\,Ai\left(\sqrt[3]{E}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)\right) + C\,Bi\left(\sqrt[3]{E}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

pss.

$$y_4(x) = \tilde{B}\,Ai\left(\sqrt[3]{E}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \tilde{C}\,Bi\left(\sqrt[3]{E}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Asymptotiska beteenden

y_1: för $x < -\frac{\pi}{2}$ så att $\sqrt[3]{E}\,(-x-\frac{\pi}{2}) \gg 1$

$$\begin{cases} Ai(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-2/3\, z^{3/2}} \\ Bi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{+2/3\, z^{3/2}} \end{cases} \quad , z \gg 1$$

(B.O 3.5.17 a,b)

y_4 för $x > \frac{\pi}{2}$ pss.

y_2 för $x > -\frac{\pi}{2}$ så att $\sqrt[3]{E}\,(-x-\frac{\pi}{2}) \ll -1$

och y_4 för $x < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} Ai(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ Bi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \quad z \to -\infty$$

(BO 3.7.6 + BO 3.7.12a + BO 3.7.13b)

$$y_2\left(x < -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left(-x-\frac{\pi}{2}\right)^{-1/4} \left\{ \frac{1}{2} B \exp\left[-\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\right] + \right.$$
$$\left. + C \exp\left[\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\right] \right\}$$

$$y_2\left(x > -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{-1/4} \left\{ B \sin\left[\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] + \right.$$
$$\left. + C \cos\left[\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \right\}$$

$$y_4\left(x > \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-1/4} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{B} \exp\left[-\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\right] + \right.$$
$$\left. + \tilde{C} \exp\left[\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\right] \right\}$$

$$y_4\left(x < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)^{-1/4} \left\{ \tilde{B} \sin\left[\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] + \right.$$
$$+ \tilde{C} \cos\left[\frac{2}{3}\sqrt{E}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

⑤ $y_5(x) \approx (\cos x)^{-1/4}\left\{ D\, e^{i\sqrt{E}\int_0^x dx'\sqrt{\cos x'}} + F e^{-i\sqrt{E}\int_0^x dx'\sqrt{\cos x'}} \right\}$

for $x \gtrsim \frac{\pi}{2}$: $\int_0^x dx'\sqrt{\cos x'} = \int_0^{-\pi/2} dx'\sqrt{\cos x'} + \int_{-\pi/2}^{x} dx'\sqrt{\cos x'} =$

$$\approx -\Phi + \frac{2}{3}\left(+x+\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$$

for $x \lesssim \frac{\pi}{2}$ $\int_0^x dx'\sqrt{\cos x'} \approx +\Phi - \frac{2}{3}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$

Matching:

① ↔ ② $\quad \frac{1}{2} A\, e^{\sqrt{E}\,\Phi} = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \frac{B}{2}$

$-\frac{1}{2} A\, e^{-\sqrt{E}} = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} C$

④ ↔ ⑤ $\quad \frac{1}{2}\tilde{A}\, e^{\sqrt{E}\,\Phi} = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \frac{\tilde{B}}{2}$

$\frac{1}{2}\tilde{A}\, e^{-\sqrt{E}\,\Phi} = \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \tilde{C}$

② ↔ ③ $\quad \frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2i} e^{i\pi/4} B + \frac{1}{2} e^{i\pi/4} C\right] = D e^{-i\sqrt{E}\,\Phi}$

$\frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2i} e^{-i\pi/4} B + \frac{1}{2} e^{-i\pi/4} C\right] = F e^{i\sqrt{E}\,\Phi}$

④ ↔ ⑤

$\frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2i} e^{i\pi/4}\tilde{B} + \frac{1}{2} e^{i\pi/4}\tilde{C}\right] = F e^{-i\sqrt{E}\,\Phi}$

$\frac{E^{-1/12}}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2i} e^{-i\pi/4}\tilde{B} + \frac{1}{2} e^{-i\pi/4}\tilde{C}\right] = D e^{i\sqrt{E}\,\Phi}$

①/② $\Rightarrow$ $-e^{2\sqrt{E}\,\Phi} = \frac{B}{2C}$

④/⑤ $\Rightarrow$ $-e^{2\sqrt{E}\,\Phi} = \frac{\tilde{B}}{2\tilde{C}}$

②/③ $\Rightarrow$ $e^{i\pi/2}\,\frac{-iB+C}{iB+C} = \frac{D}{F} e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi}$

④/⑤ $\Rightarrow$ $e^{i\pi/2}\,\frac{-i\tilde{B}+\tilde{C}}{i\tilde{B}+\tilde{C}} = \frac{F}{D} e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi}$

$$\Rightarrow \frac{F}{D} = i\, e^{2i\sqrt{E}\,\Phi}\, \frac{-i\tilde{B}+\tilde{C}}{i\tilde{B}+\tilde{C}} = -i\, e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi}\, \frac{iB+C}{-iB+C}$$

$$\Leftrightarrow \; -e^{4i\sqrt{E}\,\Phi}\, \frac{1-i\tilde{B}/\tilde{C}}{1+i\tilde{B}/\tilde{C}} = \frac{1+iB/C}{1-iB/C}$$

$$\Leftrightarrow \; -e^{4i\sqrt{E}\,\Phi}\, \frac{1+2ie^{2\sqrt{E}\,\Phi}}{1-2ie^{2\sqrt{E}\,\Phi}} = \frac{1-2ie^{2\sqrt{E}\,\Phi}}{1+2ie^{2\sqrt{E}\,\Phi}}$$

Stort E, och $\Phi > 0 \Rightarrow \sqrt{E}\,\Phi \gg 1$

$$\Rightarrow e^{4i\sqrt{E}\,\Phi} = -1$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{E}\,\Phi = 2n\pi + \pi$$

$$\Rightarrow \sqrt{E} = \frac{2n+1}{4}\,\frac{\pi}{\Phi} \Rightarrow E_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2\Phi}\right)^2$$

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{\cos x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma^2\!\left(\tfrac{3}{4}\right) \approx 1{,}2$$

Alt. alla lösningar är jämna : $F = D$
alla lösn. är udda : $F = -D$

$$\Rightarrow e^{i\pi/2}\, \frac{-iB+C}{iB+C} = \pm\, e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\pi/2}\, \frac{1+i2e^{2\sqrt{E}\,\Phi}}{1-i2e^{2\sqrt{E}\,\Phi}} = \pm\, e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi}$$

$$\sqrt{E}\,\Phi \gg 1 \Rightarrow -i = \pm\, e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi}$$

$$\Rightarrow e^{i3\pi/2} : \begin{cases} e^{-2i\sqrt{E}\,\Phi} & \text{, jämn} \\ e^{i\pi - 2i\sqrt{E}\,\Phi} & \text{, udda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2} = -2\sqrt{E}\,\Phi - 2n\pi \\ \frac{\pi}{2} = -2\sqrt{E}\,\Phi - 2n\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_n = \begin{cases} \left(2n+2-\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2\Phi}\right)^2 & \text{, jämn} \\ \left(2n+1-\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2\Phi}\right)^2 & \text{, udda} \end{cases}$$

- Volterra ekv. $K(x,y) = 0$ om $y > x$

↳ kan skrivas om som diff. ekv.

t. ex $f(x) = u(x) + \int_0^x dy\, e^{x^2-y^2} f(y)$

$$= u(x) + e^{x^2} \underbrace{\int_0^x dy\, e^{-y^2} f(y)}_{\equiv g(x)}$$

$\Rightarrow g'(x) = e^{-x^2} f(x)$

$g'(x) = e^{-x^2} u(x) + g(x)$

randvillkor: $g(0) = \int_0^0 dy\, e^{-y^2} f(y) = 0$

$\Rightarrow g(x) = e^{x} \int_0^x dy\, e^{-y-y^2} u(y)$

$\Rightarrow f(x) = u(x) + e^{x^2+x} \int_0^x dy\, e^{-y-y^2} u(y)$

[Skriver : $\lambda K f + g = h f$ (2)

jfr. matrisekv. $\lambda \hat{K} \vec{f} + \vec{g} = \hat{h} \vec{f}$]

1. Integralekv. med en degenererad (separabel) kärna: om $K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \psi_i(y)$ är kärnan degenererad och (2) är lätt att lösa.

$(2) \Rightarrow \lambda \int_a^b dy \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \psi_i(y) f(y) + g(x) = h(x) f(x)$

$\Leftrightarrow \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{h(x)} \int_a^b dy\, \psi_i(y) f(y) + \frac{g(x)}{h(x)} = f(x)$

multiplicera $\psi_j(x)$ och integrera $\int_a^b dx$

$$\Rightarrow \lambda \sum_i \underbrace{\left(\int_a^b dx\, \psi_j(x) \frac{\phi_i(x)}{h(x)}\right)}_{A_{ji}} \underbrace{\left(\int_a^b dy\, \psi_i(y) f(y)\right)}_{f_i} + \underbrace{\int_a^b dx\, \psi_j(x) \frac{g(x)}{h(x)}}_{g_j} = \underbrace{\int_a^b dx\, \psi_j(x) f(x)}_{f_j}$$

$\lambda \sum_i A_{ji} f_i + g_j = f_j$

$\Rightarrow (\lambda \hat{A} - \hat{I})\vec{f} = -\vec{g}$

$\Rightarrow$ lös matrisekv. för f_i

ekv. (2) ger då

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} + \lambda \sum_i f_i \phi_i(x)$$

$\Rightarrow$ lösningen av en integralekv. med en degenererad kärna kan reduceras till lin.alg

- Fredholms alternativ

1. Om $(\lambda\hat{A} - \hat{I})$ inte är singulär ($= \det| \; | \neq 0$), då finns det en entydig lösning för alla $g \neq 0$

2. Om $(\lambda\hat{A} - \hat{I})$ är singulär, då finns det minst en icke-trivial ($f \neq 0$) lösning till både

$$f(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy \qquad (3)$$

och

$$\tilde{f}(x) = \int K(x,y) \tilde{f}(y)\, dy \qquad (3')$$

3. Om $(\lambda\hat{A} - \hat{I})$ är singulär, då finns det en lösning till $f(x) = g(x) + \int dy\, K(x,y) f(y)$ enbart om $\int dx\, \phi(x) g(x) = 0$ för alla $\phi(x)$ som uppfyller $\phi(x) = \int dy\, K(y,x)\phi(y)$ $(= 3')$

2. Serielösningar

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, K(x,y) f(y)$$

iterera, börja med $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, K(x,y) g(y) + \lambda^2 \int_a^b dy \int_a^b dy'\, K(x,y) K(y,y') g(y') + \dots$$

= **Neumann serie**

Konvergerar för små λ och begränsade $K(x,y)$

Ett tillräckligt villkor är att $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$

$$\|K\| = \sup_u \frac{\|K\|}{\|u\|} \quad \text{där} \quad \|u\| = \left[\int dx\, |u(x)|^2\right]^{1/2}$$

men $\|K\| \le \left[\int dx\,dy\, |K(x,y)|^2\right]^{1/2}$

t.ex $\nabla^2\psi - \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\psi(r) + k^2\psi(r) = 0$ (svårt)

$\nabla^2\psi + k^2\psi(r) = 0$ (lätt)

$\Rightarrow$ skriv om

$$\nabla^2\psi + k^2\psi(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\psi(r)$$

$\Rightarrow$ lösningen ges av

$$\psi(r) = \underbrace{\psi_0(r)}_{\text{homogen lösn.}} + \frac{2m}{\hbar^2}\int d^d r'\, G_0(r,r')V(r')\psi(r')$$

: integralekv. för $\psi(r)$ [Lippman - Schwinger ekv.]

iterera:

$$\psi(r) \approx \psi_0(r) + \frac{2m}{\hbar^2}\int d^d r'\, G_0(r,r')V(r')\psi_0(r') + \ldots$$

[Born serie, Born approx.] används spridningsproblem

Schmidt - Hilbert

betrakta hermitiska kärnor $K(x,y) = K^*(y,x)$

A. Homogena ekv. $f(x) = \lambda \int dy\, K(x,y) f(y)$

* egenvärdesproblem: lösningen existerar bara för vissa $\lambda \in \mathbb{R}$
* lösningar $\{\lambda_i, u_i(x)\}$: $u_i(x) = \lambda_i \int dy\, K(x,y) u_i(y)$
* K är hermitisk $\Rightarrow \langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow \int dx\, u_i^*(x) u_j(x) = \delta_{ij}$

TEOREM: Alla funktioner $\phi(x)$ som kan skrivas som $\phi(x) = \int dy\, K(x,y)\psi(y)$ kan utvecklas som

$\phi(x) = \sum_i c_i u_i(x)$

Utvecklingskoeff. ges av

$$c_i = \int u_i^*(x)\phi(x)\,dx = \int dx \int dy\, u_i^*(x) K(x,y)\psi(y) =$$

$$= \int dx \int dy\, \psi(y) K(x,y) u_i^*(x)$$
$$= \int dy\, \psi(y)\, \lambda_i^{-1} u_i^*(y)$$
$$= \lambda_i^{-1} \int dy\, u_i^*(y) \psi(y)$$

B: Icke-homogen ekvation

$$f(x) = g(x) + \lambda \int dy\, K(x,y) f(y)$$
$$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = \lambda \int dy\, K(x,y) f(y) = \int dy\, K(x,y)[\lambda f(y)]$$
$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \sum_i c_i u_i(x) \;;\; c_i = \int dx\, u_i^*(x)[f(x) - g(x)]$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda_i} \int u_i^*(y) f(y)\, dy$$

def. $f_i = \int dx\, u_i^*(x) f(x)$

$g_i = \int dx\, u_i^*(x) g(x)$

$$\Rightarrow f_i - g_i = c_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \quad \Leftrightarrow f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} g_i$$
$$\Rightarrow c_i = \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} g_i$$
$$f(x) = g(x) + \sum_i c_i u_i(x)$$
$$= g(x) + \sum_i \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} u_i(x) \int dy\, u_i^*(y) g(y)$$
$$= g(x) + \lambda \int dy \underbrace{\left[\sum_i \frac{u_i(x) u_i^*(y)}{\lambda_i - \lambda}\right]}_{\equiv R(x,y;\lambda)} g(y)$$

resolvent, jfr. Greens funktion

$\Rightarrow$ om man kan lösa det homogena problemet kan man även lösa det icke-homogena fallet

3. Förskjutningskärna

Om $K(x,y) = K(x-y)$, då är integraltransf. ofta användbara.

t. ex 1

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy\, k(x-y) f(y)$$

$\mathcal{F}$-transform.

$$\tilde{f}(k) = \tilde{\Phi}(k) + \lambda \tilde{K}(k) \tilde{f}(k)$$

$$\Rightarrow f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{\Phi}(x)}{1-\lambda\tilde{K}(k)}\right]$$

2. $f(x) = \phi(x) + \lambda \int_0^x dy\, K(x-y) f(y)$

$\mathcal{L}$-transf.

$$F(s) = \phi(s) + \lambda K(s) F(s)$$

8/12 FÖRELÄSNING - Variationskalkyl

Funktion: $f: x \to y$ avbildning tal $\to$ tal

Funktional: $\mathcal{A}: f \to y$ avbildning funktion $\to$ tal

t. ex $I[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2$

$$I_x[f] = \int_{-\infty}^{x} dx'\, f(x') \quad : \begin{cases} \text{funktional av } f \\ \text{funktion av } x \end{cases}$$

Derivata: $f(x+\delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\delta x + o(\delta x)$

Funktional derivata:

$$\mathcal{A}[f+\delta f) = \mathcal{A}[f] + \underbrace{\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f}}_{\text{vad menas med detta?}} \delta f + o(\delta f)$$

Mer försiktigt: $\mathcal{A}[f+\delta f] = \mathcal{A}[f] + \underbrace{\mathcal{L}[\delta f]}_{\text{linjär funktional av } \delta f(x)}$

Frechét - Riesz representationsteorem (1907):

"Alla linjära funktionaler kan skrivas som integraler"

$$\mathcal{L}[\delta f] = \int dx\, \underbrace{\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)}}_{\text{funktion av } x \text{, beror på } \mathcal{A} \text{ och } f} \delta f(x)$$

Vi kallar $\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)}$ funktionalderivatan av $\mathcal{A}$,

den beskriver hur $\mathcal{A}$:s värde förändras om f ändras vid position x.

Hur bestäms $\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)}$?

{Notera: alla funktioner är inte deriverbara, på samma sätt, alla funktionaler är inte deriverbara

Exempel. 1. $\mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$

$$\mathcal{A}[f+\delta f] - \mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} = 1$$

2. $\mathcal{A}_n[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [f(x)]^n$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_n[f+\delta f] - \mathcal{A}_n[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(f(x)+\delta f(x))^n - f^n(x) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, n\, [f(x)]^{n-1} \delta f(x) + o(\delta f)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{A}_n}{\delta f(x)} = n\, [f(x)]^{n-1}$$

3. $\mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x) K(x,x') f(x')$

$$\mathcal{A}[f+\delta f] - \mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \{ f(x) K(x,x') \delta f(x') +$$

$$\delta f(x) K(x,x') f(x') \} + o(\delta f) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(f(x') K(x',x) + K(x,x') f(x') \right] \delta f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[K(x,x') + K(x',x) \right] f(x')$$

4. $\mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$

$$\Rightarrow \mathcal{A}[f+\delta f] - \mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial x} + o(\delta f) \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta f(x) \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta f(x) \right] + o(\delta f)$$

$$= 2 \Big|_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \delta f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \delta f(x)$$

- substitutionstermen $= 0$ om $\mathcal{A}[f]$ är finit ($\frac{\partial f}{\partial x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$) oftast även $\delta f(x) = 0$ vid integrationsgränserna (i de flesta fysikaliska problem) $\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} = -2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

5. $\mathcal{A}_{x_0}[f] = f(x_0) \Rightarrow \mathcal{A}_{x_0}[f+\delta f] - \mathcal{A}_{x_0}[f] = \delta f(x_0)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0)\, \delta f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0) \quad \text{jfr } \frac{dx}{dx} = 1$$

6. Kedjeregeln:

$\mathcal{A}[B_y[f]]$

$\quad \hookrightarrow$ [funktional av f, funktion av y]

$$\Rightarrow \mathcal{A}[B_y[f+\delta f]] - \mathcal{A}[B_y[f]] = \mathcal{A}\Big[B_y[f] + \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta B_y}{\delta f(x)} \delta f(x) + o(\delta f)\Big]$$

$$- \mathcal{A}[B_y[f]] = \mathcal{A}[B_y[f]] + \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta B_y} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta B_y}{\delta f(x)} \delta f(x) -$$

$$\mathcal{A}[B_y[f]] + o(\delta f) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\Big[\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta B_y} \frac{\delta B_y}{\delta f(x)}\Big]}_{\frac{\delta \mathcal{A}[B_y[f]]}{\delta f(x)}} \delta f(x) \qquad \Big\{\text{jfr: } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\Big\}$$

t.ex. $\mathcal{A}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (f(x))^2$

$$B_y[f] = f'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} = 2f(x), \quad \frac{\delta B_y}{\delta f} = -\delta'(x-y)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta f(x)}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} dx \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2\Big] = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, (2B_y[f])(-\delta'(x-y)) =$$

$$= -2\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f'(y)\, \delta'(x-y) = -2f''(x)$$

Variationskalkyl:

Vilken funktion $f(x)$ ger det minsta värdet till funktionalen $\mathcal{A}[f]$?

Jfr. funktioner: om $f(x)$ har ett minimum vid $x = x_0$, då $f'(x_0) = 0$

Funktionaler: om $\mathcal{A}[f]$ har ett minimum vid $f(x)$, då $\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} = 0$

Många fysikaliska problem kan formuleras som variationsproblem t.ex

Hamiltons princip = princip av minsta verkan

en partikel följer en bana $\vec{r}(t)$ som minimerar verkan $S = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(t, \vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t))$ där $L = T - V$ är Lagrange funktionen

↳ pot. energi

↳ kinetisk energi

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}(t)} \delta \vec{r}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}(t)} \delta \dot{\vec{r}}(t) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}(t)} \delta \vec{r}(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}(t)} \delta \vec{r}(t) \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}(t)} \right) \delta \vec{r}(t) \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}(t)} \right\} \delta \vec{r}(t) + \left[\Big|_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}(t)} \delta \vec{r}(t) \right]$$

- subst. termen är oftast $= 0$ t.ex om banan börjar och slutar vid bestämda platser så att $\delta \vec{r}(t = \pm\infty) = 0$ [mer om detta sista föreläsningen]

$\delta S = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial r_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} = 0 \qquad \alpha = x, y, z$$

(Euler-)Lagrange ekv.

t.ex fri partikel: $V=0$

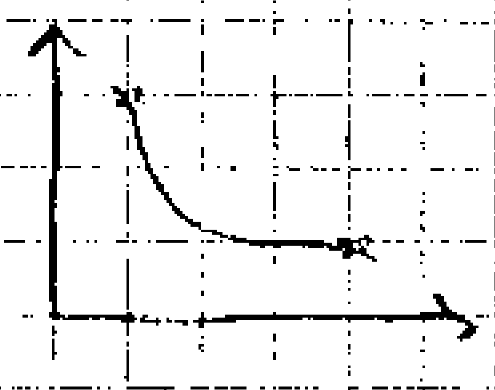
$$T=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$$

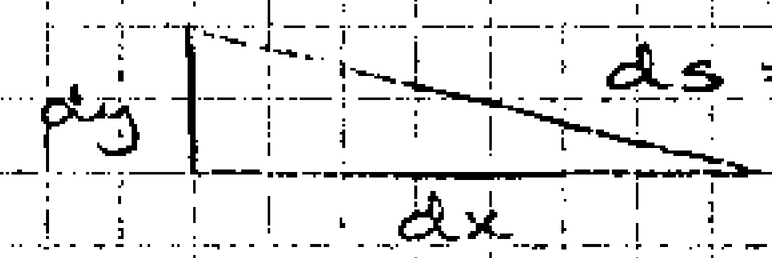
$$\Rightarrow L=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$$

EL-ekv. $0-\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}})=0$

$\Leftrightarrow m\dot{\vec{r}}=\vec{P}$ rörelsemängden bevarad.

ex. Hitta den kurva $y(x)$ som minimerar tiden det tar en punktmassa att flytta sig från (x_1,y_1) till (x_2,y_2) under påverkan av gravitation [brachistochrone problem]





$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+(y'(x))^2}$$

farten: $mg(y_1-y)=\frac{1}{2}mv^2$

$$v=\sqrt{2g(y_1-y)}$$

restid $$T=\int_{x_1}^{x_2}\frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y_1-y}}dx$$

Euler-Lagrange:

$$0=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{1-(y')^2}}{\sqrt{y_1-y}}\right]-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y_1-y}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{(y_1-y)^{3/2}}-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{y_1-y}}\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}\right]=$$

$$=(y_1-y)^{-3/2}\left[1+y^2\right]^{-3/2}\left\{\frac{1}{2}(1+y'^2)^2-\frac{1}{2}(y')^2(1-y'^2)-(y_1-y)y''(1+y'^2)\right.$$

$$\left.+(y_1-y)(y')^2y''\right\}$$

$$0=\frac{1}{2}(1+(y')^2-(y_1-y)y''$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y_1-y}y'=\frac{2y''}{1+y'^2}y'$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dx}\ln(y_1-y) = \frac{d}{dx}\ln[1+(y')^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y_1-y) + \ln(1+y'^2) = C$$

$$(y_1-y)(1+y'^2) = e^c$$

$$y' = \pm\left[\frac{e^c}{y_1-y} - 1\right]^{-1/2}$$

$$dx = \pm\frac{dy}{\sqrt{\frac{e^c}{y_1-y}-1}}$$

$$\int_{x_1}^{x} dx = \pm\int_{y_1}^{y} d\tilde{y}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{e^c}{y_1-\tilde{y}}-1}}$$

sätt $e^c = a \quad y_1 - y = z$

$$\Rightarrow x - x_1 = \mp\int_0^{y_1-y} dz\,\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a-z}}$$

sätt $z = a\sin^2\varphi$

$$\Rightarrow x - x_1 = \mp\left[\arcsin\sqrt{\frac{y_1-y}{a}} - \sqrt{\frac{y_1-y}{a}}\sqrt{1-\frac{y_1-y}{a}}\right]$$

def. $a/2 - (y_1-y) = \frac{a}{2}\cos\theta$: banan börjar $\theta = 0$

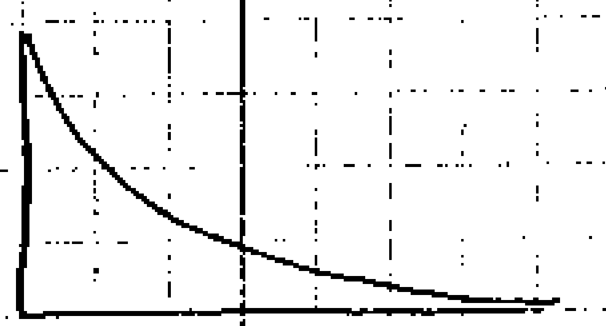
$$x - x_1 = \pm\frac{a}{2}\,\theta - \sin\theta$$

banan slutar

$$x_2 - x_1 = \pm\frac{a}{2}(\theta_2 - \sin\theta_2)$$

$$y_2 - y = -\frac{a}{2}(1-\cos\theta_2)$$

$$\Rightarrow a, \theta_2$$



cycloid

RÄKNEÖVNING

60 van der Pol

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \underbrace{\varepsilon[1-y^2]\dot{y}}_{\text{icke linjär dämpning}} = 0$$

$\varepsilon \gtrsim 0$, liten $\rightarrow$ störningsräkning

Flerskalsanalys: $y(t) = Y_0(t,\tau) + \varepsilon Y_1(t,\tau)$

$$\tau = \varepsilon t$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\partial Y_0}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_1}{\partial t}\right] + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial Y_1}{\partial \tau}}_{\approx 0}$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left[2\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2}\right] + O(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_0 + \varepsilon\left[\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_1 + 2\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} - [1 - Y_0^2]\frac{\partial Y_0}{\partial t}\right] = O(t^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^0 : \; Y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{i\omega_0 t} + A^*(\tau)e^{-i\omega_0 t}$$

$$\varepsilon^1 : \; \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_1 = -2\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + [1 - Y_0^2]\frac{\partial Y_0}{\partial t} =$$

$$= -2i\omega_0 A'(\tau)e^{i\omega_0 t} + 2i\omega_0 A^{*\prime}(\tau)e^{-i\omega_0 t} +$$

$$i\omega_0\left[A(\tau)e^{i\omega_0 t} - A^*(\tau)e^{-i\omega_0 t}\right]\left[1 - (A(\tau)e^{i\omega_0 t} + A^*(\tau)e^{-i\omega_0 t})^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_1 = i\omega_0 e^{i\omega_0 t}\left[-2A' + A - 2A^2A^* + A^2A^*\right] -$$

$$- i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}\left[-2A^{*\prime} + A^* - 2A^{*2}A + A^{*2}A\right] +$$

$$+ i\omega_0 e^{3i\omega_0 t}\left[-A^3\right] - i\omega_0 e^{-3i\omega_0 t}\left[-A^{*3}\right]$$

ingen sekulär störning på högersidan

$$\Rightarrow \text{kräv} \begin{cases} -2A' + A - A^2A^* = 0 \\ 2A^{*\prime} - A^* + A^{*2}A = 0 \end{cases}$$

Sätt $A(\tau) = R(\tau)e^{i\theta(\tau)}$

$$A'(\tau) = (R' + iR\theta')e^{i\theta(\tau)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2R' - i2R\theta' + R - R^3 = 0 \\ 2R' - i2R\theta' - R + R^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta' = 0 \\ 2R' + R + R^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \frac{dR}{d\tau} = \frac{R - R^3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R - R^3} = \frac{1}{2}d\tau$$

$$\Leftrightarrow dR\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\frac{1}{R-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{R+1}\right] = \frac{1}{2}d\tau$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{|R|}{\sqrt{|R^2-1|}}\right] = \frac{1}{2}(\tau-\tau_0)$$

$$\frac{R^2}{|R^2-1|} = e^{(\tau-\tau_0)}$$

två fall

i) $|R|>1$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{R^2-1} = e^{\tau-\tau_0} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{1-e^{-(\tau-\tau_0)}}$$

ii) $|R|<1$

$$\frac{R^2}{1-R^2} = e^{\tau-\tau_0} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{1+e^{-(\tau-\tau_0)}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{1 \pm e^{-(\tau-\tau_0)}}}$$

$$\Rightarrow y_0(t,\tau) = \frac{2}{\sqrt{1 \pm e^{-(\tau-\tau_0)}}}\cos(\omega_0 t + \theta_0]$$

Randvillkor:
$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{2}{\sqrt{1\pm e^{\tau_0}}}\cos\theta_0 \\ \dot{y}(0) = -\dfrac{2\omega_0}{\sqrt{1\pm e^{\tau_0}}}\sin\theta_0 \end{cases} + (O(\tau))$$

$$\Rightarrow y_+(t) = \frac{2}{\sqrt{1+e^{(\tau_+-\tau)}}}\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$y_-(t) = \frac{2}{\sqrt{1-e^{(\tau_--\tau)}}}\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

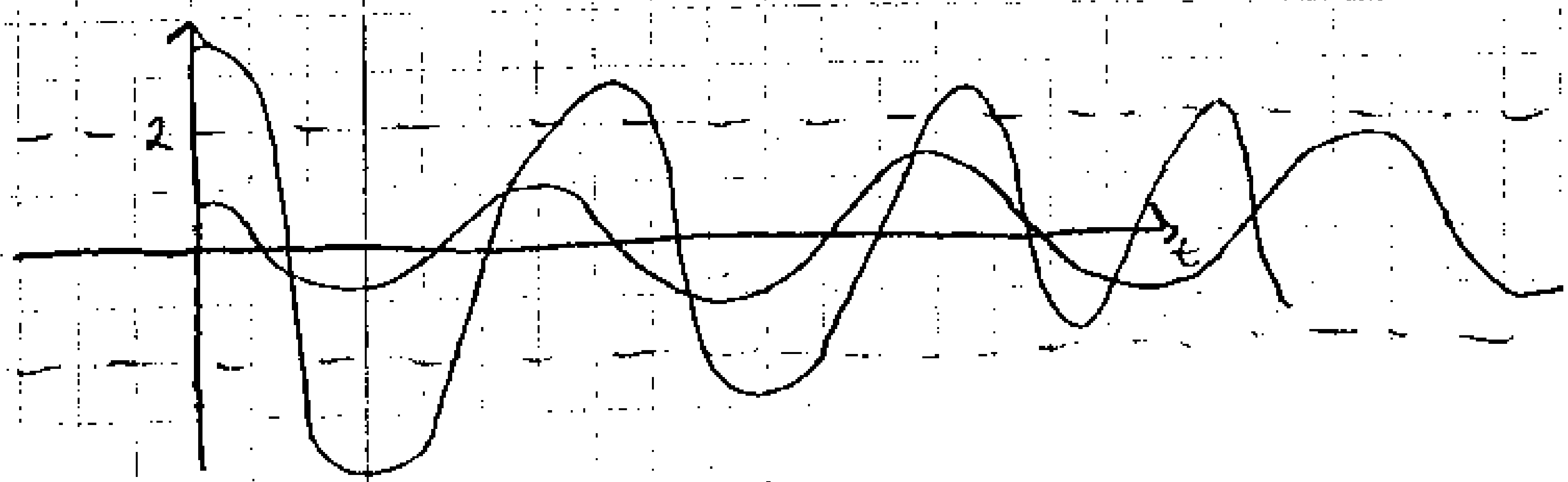
$$\tau_\pm = \ln\left[\mp\left(1 - \frac{4}{\omega_0^2 y^2(0) + \dot{y}^2(0)}\right)\right]$$

$$\theta = \arctan(\omega y(0) - \dot{y}(0))$$

amplituder $y_+ \le 2$

$y_- \ge 2$

amplitud vid $t \to +\infty = 2$



dämpningsterm

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon[1 - y^2]\dot{y}$$

<u>49</u> $$f(x) = x^3 + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} dy \cos^2\left(\frac{x-y}{4}\right) f(y)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos^2(a-b) = \cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \sin a \cos b \sin b + \sin^2 a \sin^2 b$$

$\Rightarrow$ degenererad kärna $K(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(x)\psi_i(y)$

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) & \psi_1(y) = \cos^2\left(\frac{y}{4}\right) \\ \phi_2(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right) & \psi_2(y) = 2\cos\left(\frac{y}{4}\right)\sin\left(\frac{y}{4}\right) \\ \phi_3(x) = \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) & \psi_3(y) = \sin^2\left(\frac{y}{4}\right) \end{cases}$$

multiplicera med $\psi_j(x)$ och integrera

def: $f_j = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \psi_j(x) f(x)$

$$g_j = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \psi_j(x) x^3 \Rightarrow g_1 = g_3 = 0 \quad g_2 = 24(\pi^2 - 8)$$

$$\Rightarrow f_1 = 0 + \lambda \Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2\frac{x}{4} \cos^2\frac{x}{4}}_{2+\frac{3}{4}\pi}\Big] \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dy \cos^2\left(\frac{y}{4}\right) f(y)}_{=f_1} +$$

$$+ \lambda \Big[\int_{-\pi}^{\pi} dx \underbrace{\cos^2\frac{x}{4} \cos\frac{x}{4} \sin\frac{x}{4}}_{\text{udda} \Rightarrow = 0}\Big] f_2 +$$

$$+ \lambda \Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2\frac{x}{4} \sin^2\frac{x}{4}}_{\frac{\pi}{4}}\Big] f_3$$

$$f_2 = 24(\pi^2 - 8) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} dx\, 2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) f_2$$

$$f_3 = 0 + \lambda\left[\frac{\pi}{4} f_1 + \left(-2 + \frac{3\pi}{4}\right) f_3\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda\left(2 + \frac{3\pi}{4}\right) & 0 & -\lambda\frac{\pi}{4} \\ 0 & 1 - \lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{\pi\lambda}{4} & 0 & 1 - \lambda\left(-2 + \frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24(\pi^2 - 8) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_2 = \dfrac{48(-8+\pi^2)}{2-\lambda\pi} & \lambda \neq \dfrac{2}{\pi} \\ f_1 = f_3 = 0 & \text{om } \lambda \overset{\text{inte}}{=} \lambda_\pm = \dfrac{3\pi \pm \sqrt{64+\pi^2}}{2(\pi^2-8)} \end{cases}$$

där $\lambda_\pm$ bestämdes av villkoret

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda(2+\frac{3\pi}{4}) & -\frac{\lambda\pi}{4} \\ -\frac{\lambda\pi}{4} & 1-\lambda(-2+\frac{3\pi}{4}) \end{vmatrix} = 0$$

specialfall:

1) om $\lambda = \frac{2}{\pi}$: ingen lösning

2) om $\lambda = \lambda_+$ eller $\lambda = \lambda_-$

$$f_2 = \frac{48(-8+\pi^2)}{2-\lambda\pi}$$

$$f_3 = \frac{4}{\pi\lambda}\left[1-\lambda\left(2+\frac{3\pi}{4}\right)\right]f_1$$

f_1 = fri parameter

15/12 FÖRELÄSNING - naturliga randvillkor
tillräckliga villkor i variationsproblem

□ mer om variation

$$\min J = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x)\, dx$$

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'(x) \right\} = \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y(x)\right) + \int_{x_0}^{x_1} dx \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x)$$

$\Rightarrow$ ett nödvändigt (men inte tillräckligt) villkor för ett extremum EL: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$
(Euler-Lagrange)

om de tillåtna funktionerna $y(x)$ har fixta randvillkor $y(x_0) = y_0$ och $y(x_1) = y_1$, då $\delta y(x_0) = 0 = \delta y(x_1)$ $\Rightarrow$ subst. termen $= 0$

- om randvärden av $y(x)$ inte är bestämda måste en extremallösning även uppfylla villkoret $-\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0} \delta y(x_0) + \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} \delta y(x_1) = 0$

$\Rightarrow$ måste ha $\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} = 0$

Naturliga randvillkor (... vilket förklarar varför subst. termen $= 0$ för Sturm-Liouville problemet)

□ Om tillräckliga villkor:

- specifikationer

starkt minimum: $A[y_0] \leq A[y]$ för alla $y(x)$ så att $\max_x |y(x) - y_0(x)| < \delta$ för något $\delta > 0$ {typiskt betraktа kontinuerliga $y_0(x)$}

svagt minimum: $A[y_0] < A[y]$ för alla $y(x)$ s.a $\max_x |y(x) - y_0(x)| < \delta$ och $\max_x |y'(x) - y'_0(x)| < \delta$ för något $\delta > 0$

{typiskt $y_0(x)$ och $y'(x)$ kontinuerliga}

Om $y_0(x)$ är ett starkt minimum, då är det också ett svagt minimum

$\Rightarrow$ svaga minima är lättare att hitta

Typiskt är vi intresserade av svaga minima

- tillräckligt villkor för starka minima är svårare att hitta än tillräckliga villkor för svaga minima

$\Rightarrow$ fokusera på svaga minima

Andra variationen:

$$\delta^2 S = \delta^2 \int_{t_0}^{t_1} dt\, F(y, \dot{y}, t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\delta y(t)]^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}} \delta y(t) \delta \dot{y}(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} [\delta \dot{y}(t)]^2 \right]$$

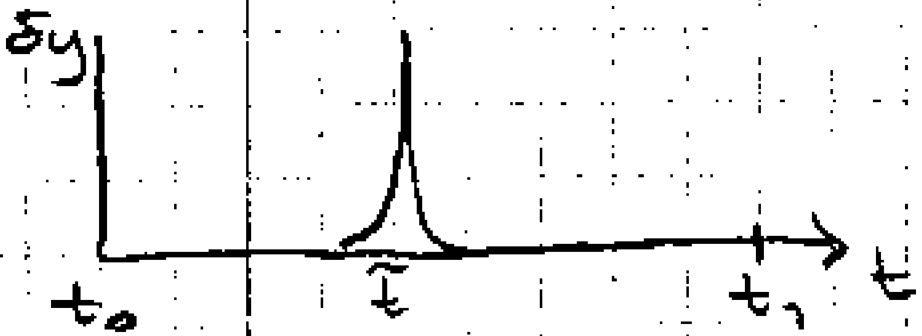
$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \Big\{ \underbrace{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}} \right]}_{Q(t)} (\delta y(t))^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}}_{P(t)} [\delta \dot{y}(t)]^2 \Big\}$$

$$\Rightarrow \delta^2 S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \left[Q(t) [\delta y(t)]^2 + P(t) [\delta \dot{y}(t)]^2 \right]$$

om $\delta^2 S > 0 \Rightarrow$ ett minimum

$\Rightarrow$ OK minst om $P(t) > 0$ och $Q(t) > 0$ för $\forall t \in [t_0, t]$; är detta nödvändigt?

- om $P(\tilde{t}) < 0$, välj



$$\Rightarrow \begin{cases} \int Q(t) [\delta y(t)]^2 \approx 0 \\ \int P(t) [\delta \dot{y}(t)]^2 \ll 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ måste ha $P(t) > 0 \ \forall t$

- det visar sig att $Q(t) > 0 \ \forall t \in [t_0, t)$ inte är nödvändigt:

Välj $w(t)$ s.a

$$Q \cdot \delta y^2 + P \delta \dot{y}^2 + \frac{d}{dt}[w (\delta y)^2]$$

är en kvadrat, sista termen ändrar inte integralens värde: $\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt}[w \delta y^2] = \Big|_{t_0}^{t_1} w \delta y^2 = 0$

ty $\delta y(t_1) = \delta y(t_0) = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[w\,\delta y^2\right] = w'\,\delta y^2 + 2w\,\delta y\,\delta\dot{y} \Rightarrow$$

$$P\,\delta\dot{y}^2 + Q\,\delta y^2 + w'\,\delta y^2 + 2w\,\delta y\,\delta\dot{y} = P\left(\delta\dot{y} + C(t)\,\delta y\right)^2$$

om $\begin{cases} P\cdot C^2(t) = Q + w' \\ P\cdot 2C(t) = 2w \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(t) = w(t)/P(t) \\ \dfrac{w^2(t)}{P(t)} = Q(t) + w'(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ diff elevation för $w(t)$

$$\left[w(t)\right]^2 = P(t)\left[Q(t) + w'(t)\right]$$

(Riccati elevation]

$\Rightarrow$ om vi kan lösa elevationen för $w(t)$

och om $P(t) > 0$, då $\delta^2 S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,P(t)\left[\delta\dot{y}(t) + \right.$

$$\left. + \frac{w(t)}{P(t)}\,\delta y(t)\right]^2 \geq 0$$

och vi har hittat ett minimum

Lösning av Riccati elev.

sätt $\quad w(t) = -P(t)\dfrac{u'(t)}{u(t)}$

$$\Rightarrow \quad w' = -P'\frac{u'}{u} - P\frac{u''u - (u')^2}{u^2}$$

$$\Rightarrow \quad P^2\frac{(u')^2}{u^2} = P\left(Q - P'\frac{u'}{u} - P\frac{u''u - (u')^2}{u^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$-Pu'' - P'u' + Qu = 0$$

$$\Leftrightarrow u(t)Q(t) - \frac{d}{dt}\left(P(t)u'(t)\right) = 0$$

$\therefore$ identisk med EL för variationsproblemet

$$\frac{1}{2}\int dt\left[P(t)\dot{u}^2 + Q(t)u^2\right]$$

välj $\quad u(t_0) = 0\,,\quad u'(t_0) \neq 0$

t.ex $\quad u'(t_0) = 1$

$\Rightarrow$ $w(t)$ är bestämd; svårigheter kan uppstå om $u(t) = 0$ för någon $t \in]t_0, t[$ eftersom $w(t) \sim \frac{1}{u(t)}$; en punkt $t_2 \in]t_0, t_1[$ kallas en konjugerad plt till t_0 om $u(t_0) = 0$ och $u(t_2) = 0$

- Tillräckligt villkor för ett svagt minimum

1) $y(t)$ uppfyller EL ekvationen

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$$

2) $P(t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}\partial \dot{y}} > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

3) det finns ingen punkt som är konjugerad till t_0 inom intervallen $]t_0, t_1[$

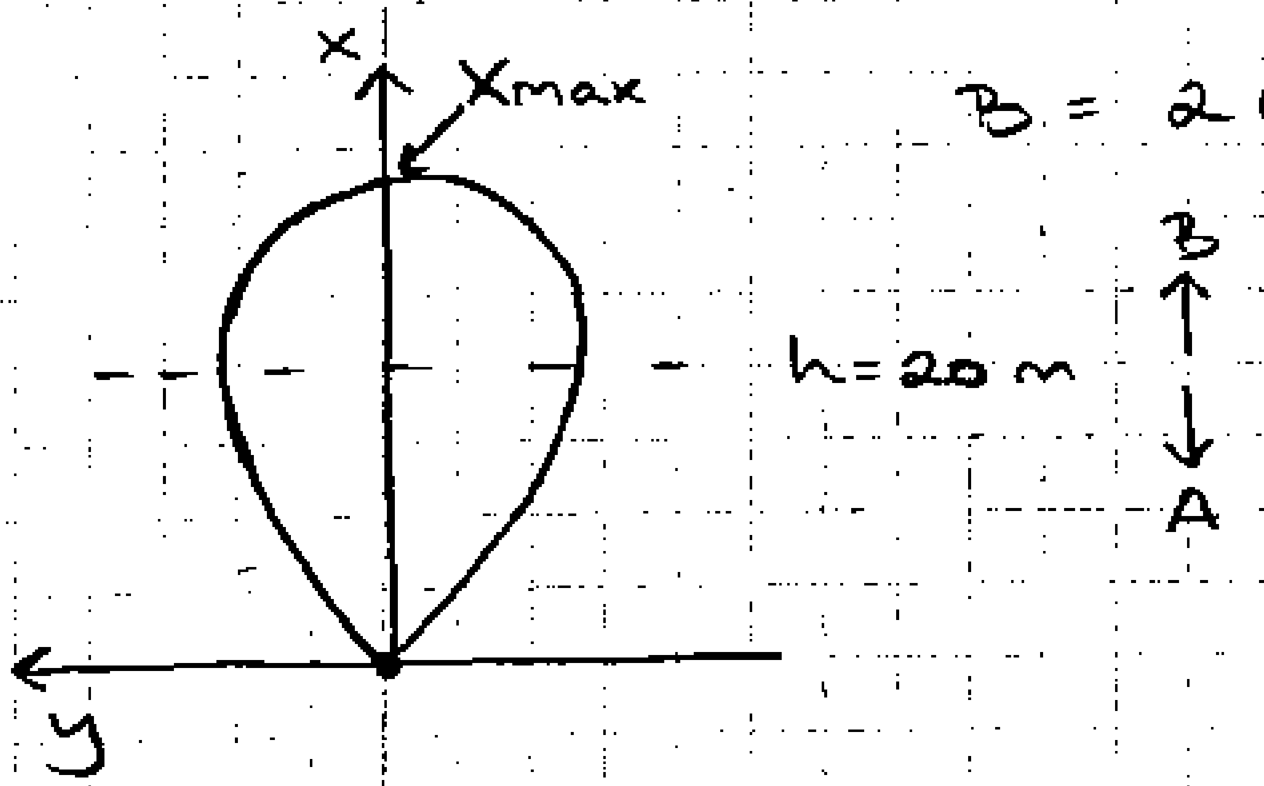
15/12 RÄKNEÖVNING

70. apple tree at the origin $(0,0)$

fencing $L = 100\,m$

value $A = 1\,000$ SEK/m^2 $x < 20\,m$

$B = 2\,000$ SEK/m^2 $x > 20\,m$



task. maximize value inside fence

parameterization:

1) low price $y = y_1(x) \Rightarrow \$_1 = 2A\int_0^h dx\, y_1(x)$

2) high price x_{max} unknown

set $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ $t = 0, \ldots, 1$

$$\Rightarrow \quad \$_2 = 2B\int_0^1 dt\, x_2'(t)\, y_2(t)$$

constraint:

$$L = 100\,m = 2\left[\int_0^h dx \sqrt{1+(y_1'(x))^2} + \int_0^1 dt \sqrt{[x_2'(t)]^2 + [y_2'(t)]^2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}(x_2, y_2, y_1)$$

$$\Rightarrow \max \quad \$ - \lambda\mathcal{L} = 2\int_0^h dx \left[Ay(x) - \lambda\sqrt{1+(y_1'(x))^2}\right] +$$

$$+ 2\int_0^1 dt \left[Bx_2'(t)\, y_2(t) - \lambda\sqrt{(x_2'(t))^2 + (y_2'(t))^2}\right]$$

$\Rightarrow$ EL eqs.

$$y_1(x): \quad A + \lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1'}{\sqrt{1+(y_1')^2}}\right] = 0 \qquad (i)$$

$$x_2(t): \quad 0 - \frac{d}{dx}\left[By_2(t) - \lambda\frac{x_2'}{\sqrt{(x_2')^2+(y_2')^2}}\right] = 0 \qquad (ii)$$

$$y_2(t): \quad Bx_2'(t) + \lambda\frac{d}{dt}\left[\frac{y_2'}{\sqrt{(x_2')^2+(y_2')^2}}\right] = 0 \qquad (iii)$$

$$i) \Rightarrow \quad \lambda\frac{y_1'}{\sqrt{1+(y_1')^2}} = -Ax + \tilde{C}_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2\frac{(y_1')^2}{1+(y_1')^2} = (Ax - \tilde{C}_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1' = \underset{(-)}{(+)}\sqrt{\frac{\frac{1}{\lambda^2}(Ax-\tilde{C}_1)^2}{1-\frac{1}{\lambda^2}(Ax-\tilde{C}_1)^2}}$$

$$y_1 = \frac{\lambda}{A}\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}(Ax-\tilde{C}_1)^2} + D_1$$

$$\Rightarrow \quad (y_1 - D_1)^2 = \left(\frac{\lambda}{A}\right)^2\left[1 - \frac{1}{\lambda^2}(Ax-\tilde{C}_1)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{\tilde{C}_1}{A}\right)^2 + (y_1 - D_1)^2 = \left(\frac{\lambda}{A}\right)^2$$

circular arc with radius $R_1 = \lambda/A$

$$ii) \quad By_2 - \lambda\frac{x_2'}{\sqrt{(x_2')^2+(y_2')^2}} = \tilde{C}_2$$

$$\Rightarrow \quad (By_2 - \tilde{C}_2)^2 = \lambda^2\frac{(x_2')^2}{(x_2')^2+(y_2')^2}$$

$$= \lambda^2 \frac{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}{\left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)\right)^2} \quad \left\{ \text{mult. med } \left(\frac{dt}{dy_2}\right)^2 \text{ överallt} \right\}$$

$$= \lambda^2 \frac{\left(\frac{dx_2}{dy_2}\right)^2}{\left(\frac{dx_2}{dy_2}\right)^2 + 1}$$

cf above $A \to B$

$x \to y_2$

$\tilde{C}_1 \to \tilde{C}_2$

$y \to x_2$

$$\Rightarrow \left(y_2 - \frac{\tilde{C}_2}{B}\right)^2 + (x_2 - D_2)^2 = \left(\frac{\lambda}{B}\right)^2$$

circular arc with radius $R_2 = \frac{\lambda}{B}$

iii) $\Rightarrow \quad Bx_2(t) + \lambda \frac{y_2'}{\sqrt{(x_2')^2 + (y_2')^2}} = \tilde{C}_3$

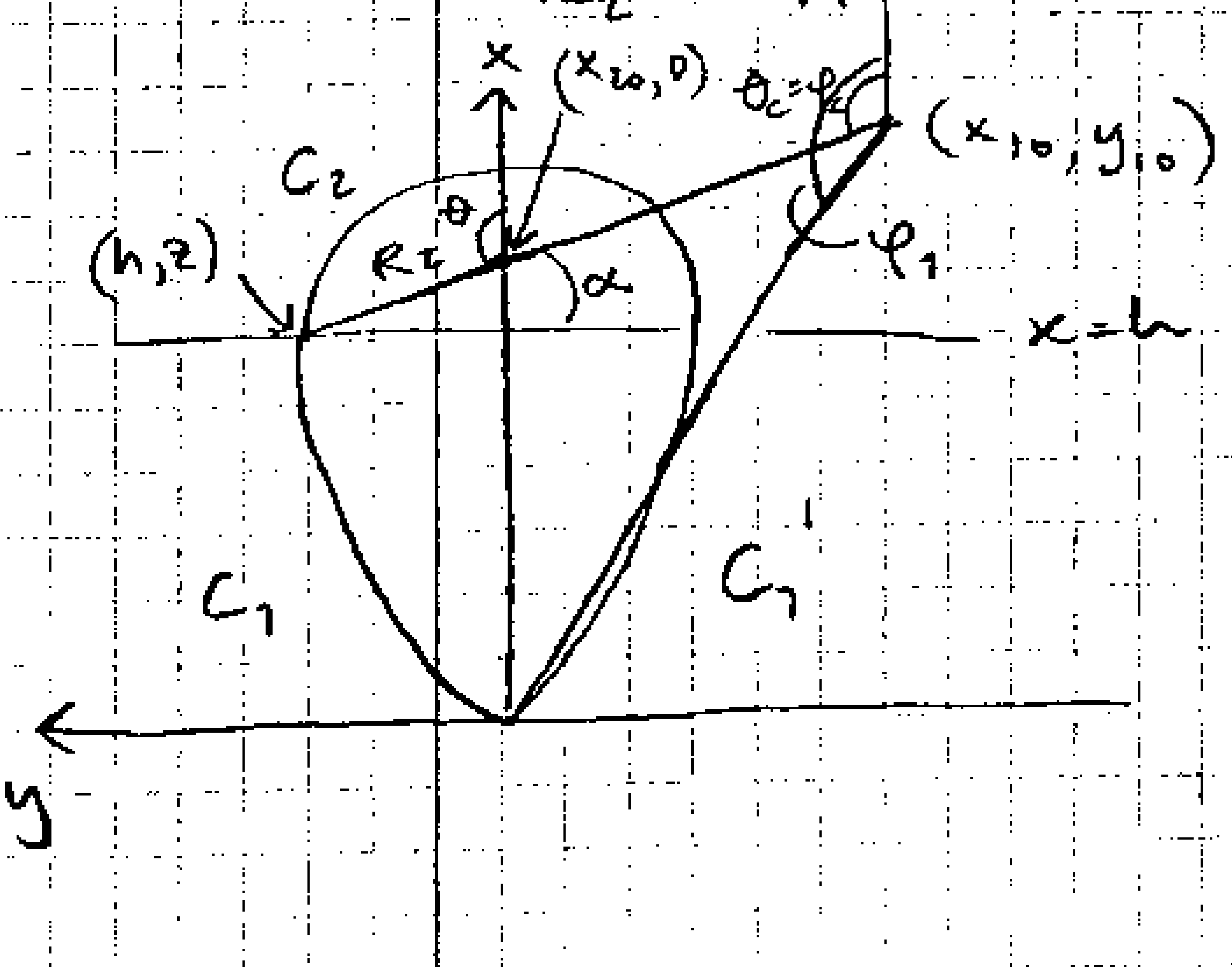
$$\Leftrightarrow \quad (Bx_2 - \tilde{C}_3)^2 = \lambda^2 \frac{(y_2')^2}{(x_2')^2 + (y_2')^2}$$

cf. ii $\quad y_2 \to x_2 \quad \tilde{C}_2 \to \tilde{C}_3 \quad x_2 \to y_2$

$\Rightarrow \left(x_2 - \frac{\tilde{C}_3}{B}\right)^2 + (y - D_3)^2 = \left(\frac{\lambda}{B}\right)^2$ as in (ii)

$\Rightarrow$ fence segments are circular arcs with radii $R_1 = \lambda / A \quad R_2 = \lambda / B$

i.e. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{B}{A}$



Boundary conditions:

1) at x_{max}, fence is parallel to y-axis

$\Rightarrow$ origin of C_2 is on x-axis

2) $(x,y)=(0,0)$ must be on C_1

3) at $x=h$ the arcs C_1 and C_2 must be continuous

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (h,z) \in C_1 \\ (h,z) \in C_2 \end{cases}$$

4) even the derivative of the fence must be continuous at $x=h$

Parameterize the arcs:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} + R_1 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} ; \quad \varphi \in [\varphi_c, \varphi_1]$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \end{pmatrix} R_2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} ; \quad \theta \in [0, \theta_c]$$

BC 4: $\frac{dx_1}{d\varphi} = -R\sin\varphi$, $\frac{dy_1}{d\varphi} = R\cos\varphi \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = -\cot\varphi$

similarity $\frac{dy_2}{dx_2} = -\cot\theta$

but $\left.\frac{dy_1}{dx_1}\right|_{\varphi=\varphi_c} = \left.\frac{dy_2}{dx_2}\right|_{\theta=\theta_c} \Rightarrow \varphi_c = \theta_c$

In figure: $\alpha + (\pi - \varphi_c) + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow \alpha = \varphi_c - \frac{\pi}{2}$

Now:

$$x_{10} = h + R_1 \sin\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{20} = h + R_2 \sin\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_{10} = -(R_1 - R_2)\cos\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)$$

origin is on C_1:

$$0 = x_{10} + R_1 \cos\varphi_1$$

$$0 = y_{10} + R_1 \sin\varphi_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -R_1\cos\varphi_1 = h + R_2 \overbrace{\sin\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)}^{-\cos\varphi_c} \\ -R_1 \sin\varphi_1 = -(R_1 - R_2)\overbrace{\cos\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)}^{=\sin\varphi_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi_1 = \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\sin\varphi_c$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi_1 = -\left[1 - \left(\frac{B-A}{B}\right)^2 \sin^2\varphi_c\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad R_1\left[\cos\varphi_c + \sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{B}\right)^2 \sin^2\varphi_c}\right] = h$$

constraint:

$$\frac{L}{2} = \theta_c R_2 + (\varphi_1 - \varphi_c)R_1 = R_1\left[\varphi_c \frac{A-B}{B} + \varphi_1\right]$$

2 equations, 2 unknown R_1, φ_c

solve for $\frac{B}{A} = 2$; $h = 20$; $L = 100$

Mathematica: $\begin{cases} R_1 = 28.46\text{m} \\ \varphi_c = 1.74 \text{ rad} \end{cases}$

Value of the land

$$\frac{1}{2A}\$_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_c)R_1^2 - R_1^2 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_c}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_c}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} h R_1 \cos\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2B}\$_2 = \frac{1}{2}\varphi_c R_2^2 + \frac{1}{2}R_2 \sin\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \$ = \$_1 + \$_2 = 1.14 \text{ Mio}$$

Föreläsning 13/12 - 2006

Variationskalkyl med tvång. (bivillkor)

Bestäm u(x) så att $I[u]$ har ett minimum med bivillkoret $J[u]=0$.

$\Rightarrow$ Lagrange multiplikator

minimera $I_\lambda[u] = I[u] - \lambda J[u]$

välj λ så att $J[u]=0$

---

jfr. minimera $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$

med villkoret $x^3 - y + 1 = 0$

def. $f(x,y,\lambda) = x^4 - x^2 + y^2 - \lambda(x^3 - y + 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 3\lambda x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

$$y = -\frac{\lambda}{2}$$

$x = 0$ eller $x = 3\lambda \pm \frac{1}{8}\sqrt{9\lambda^2 + 32}$

välj λ så att villkoret uppfylls.

$\Rightarrow (x=0, y=1)$ eller $\begin{pmatrix} x = 3\lambda \pm \frac{1}{8}\sqrt{9\lambda^2+32} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$ + ekv. för λ

ex. $I[u] = \int_a^b dx\, F(u,u',x)$

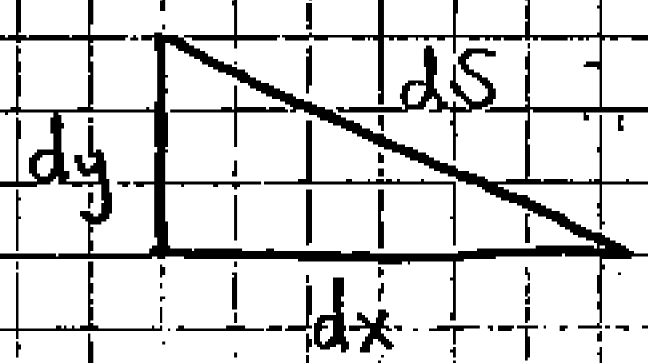
$$J[u] = \int_a^b dx\, G(u,u',x)$$

$\Longrightarrow$ minimera $I_\lambda[u] = \int_a^b dx\left[F(u,u',x) - \lambda G(u,u',x)\right]$

$\Longrightarrow u = u_\lambda(x)$

välj λ så att $J[u_\lambda] = 0$

Exempel. Bestäm den kortaste linjen $y = y(x)$ så att $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ och att arean mellan $y(x)$ och x-axeln är A.



$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\Longrightarrow dS = dx\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+(y')^2} \\ J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, y(x) - A \end{cases}$$

minimera $\int_{x_1}^{x_2} dx\left[\sqrt{1+(y')^2} - \lambda y(x)\right]$

Euler-Lagrange:

$$-\lambda - \frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = -\lambda x + C_1$$

$$\frac{(y')^2}{1+(y')^2} = \left[-\lambda x + C_1\right]^2$$

$$\Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{(\lambda x - C_1)^2}{1-(\lambda x - C_1)^2}}$$

välj '−'-tecken.

$$\Rightarrow y(x) = -\int dx \, \frac{\lambda x - c_1}{\sqrt{1-(\lambda x - c_1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda x - c_1)^2} + C_2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda y - \lambda c_2)^2 + (\lambda x - C_1^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (y - c_2)^2 + \left(x - \frac{c_1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

cirkulär båge, konstanterna c_1, c_2, λ bestäms så att $y(x_1) = y_1$

$$y(x_2) = y_2$$

$$\int^{x_2} dx \, y(x) = A$$

Relaterad till så kallade isoperimetriska problem: bestämma en sluten kurva (yta) med minsta längden (arean) så att arean (volymen) innanför kurvan är maximerad.

Betrakta nu minimeringsproblemet

$$\min_{u(x)} I[u] = \int_a^b dx \left[p(x)(u'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 \right]$$

med villkoret $\underbrace{J[u] = \int_a^b dx\, \rho(x) [u(x)]^2 = \text{konstant}}_{\text{Normalisering}}$.

Noteral: eftersom $J[u] = \text{konstant}$ är minimering av $I[u]$ ekvivalent med minimering av

$$K[u] = \frac{I[u]}{J[u]}$$

__E.L:__ $2q(x)u(x) - 2\lambda \rho(x) u(x) - \frac{d}{dx}\left[2p(x)u'(x) \right] = 0$

multiplicera med $u(x)$ och integrera $\int_a^b dx$

$$\Longrightarrow \int_a^b dx \left(q(x) - \lambda \rho(x) \right) (u(x))^2 = \int_a^b dx \frac{d}{dx}\left[p(x) u'(x) \right] u(x)$$

$\longrightarrow$

$$= \int_a^b dx \left\{ \frac{d}{dx}\left[p(x) u'(x) u(x) \right] - p(x) u'(x) u'(x) \right\}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b dx \left[p(x)(u'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 \right] = \lambda \int_a^b dx\, \rho(x)(u(x))^2$$

$$\Longrightarrow K[u] = \lambda$$

för u som uppfyller EL
och normaliseringsvillkor.

$$\left[\text{Substitutionstermen } \int_a^b dx \frac{d}{dx}[\dots] = 0 \quad \text{Nästa gång} \right]$$

EL-ekvationen ovan är ett egenvärdesproblem

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) u'(x)\right] - q(x) u(x) = -\lambda \rho(x) u(x)$$

av typen Sturm-Liouville.
Egenvärden λ_n har följande egenskaper:
(i) det finns ett minsta egenvärde.

$$\lambda_0 = \min K[u]$$

(ii) för stora n, $\lambda_n \sim n^2$

$\Longrightarrow$ det minsta värdet av $K[u]$ är identiskt med det minsta egenvärdet av ekvationen (Sturm-Liouville). $\longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Ett praktiskt sätt att uppskatta det minsta egenvärdet λ_0 är att leta efter funktioner som minimerar

$$\frac{\int_a^b dx\left[p(x)(u'(x))^2 + q(x)(u(x))^2\right]}{\int_a^b dx\, \rho(x)(u(x))^2} \quad \text{[Rayleigh kvot]}$$

t.ex. $H\Psi = E\Psi$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + C|x|^\alpha \quad \alpha > -1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'(x)\right] - \left[-C|x|^\alpha\right]\Psi(x) = -E(-\Psi(x))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \\ q(x) = -C|x|^\alpha \\ \rho(x) = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{Minimera } K[u] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\frac{\hbar^2}{2m}(u'(x))^2 + C|x|^\alpha (u(x))^2\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(u(x))^2}$$

välj Ansatz: $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\gamma x^2}$

$$u'(x) = -\gamma x\, u(x)$$

$$\Longrightarrow K[u] = \frac{\hbar^2}{4m}\gamma + C\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\gamma^{-\frac{1}{2}\alpha}$$

{andra termen: substitution
$\gamma x^2 = t \Rightarrow \int_0^\infty dt\, t^{(\cdots)} e^{-t} \sim \Gamma$-funktion.}

Välj γ så att K minimeras.

$$K'(\gamma) = \frac{\hbar^2}{4m} + C\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\alpha\right)\gamma^{-\frac{1}{2}\alpha-1}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \gamma_0 = \left[\frac{1}{\alpha C}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\right]^{-2/(\alpha+2)}$$

$$K(\gamma_0) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)\gamma$$

tex om $\alpha = 2$ (harmonisk oscillator)

$$\Longrightarrow \gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}C}\,,\quad K[\gamma_0] = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}C}$$

<u>exakt</u> $\left(C = \frac{1}{2}m\omega_0^2\right)$