

Tentamen i Optik FFY091 - tisdag 3:e juni 2025, kl. 08:30-12:30

Jourhavande lärare **Zeidan Zeidan**, tel. 0720156958, finns på plats ca kl. 9.30 och 11.30 för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs inte så många ord!
- Gör egna rimliga antaganden och motivera dessa där det behövs.

Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).

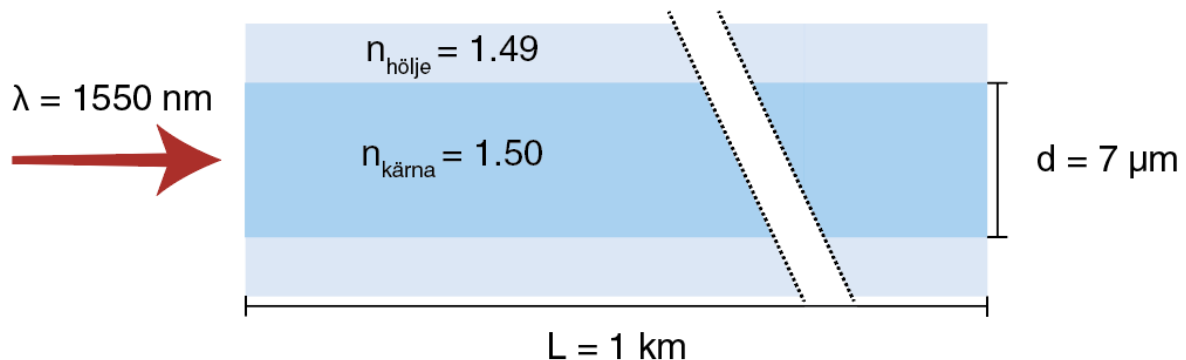
Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.

På kurshemsidan publiceras lösningsförslag senast onsdag.

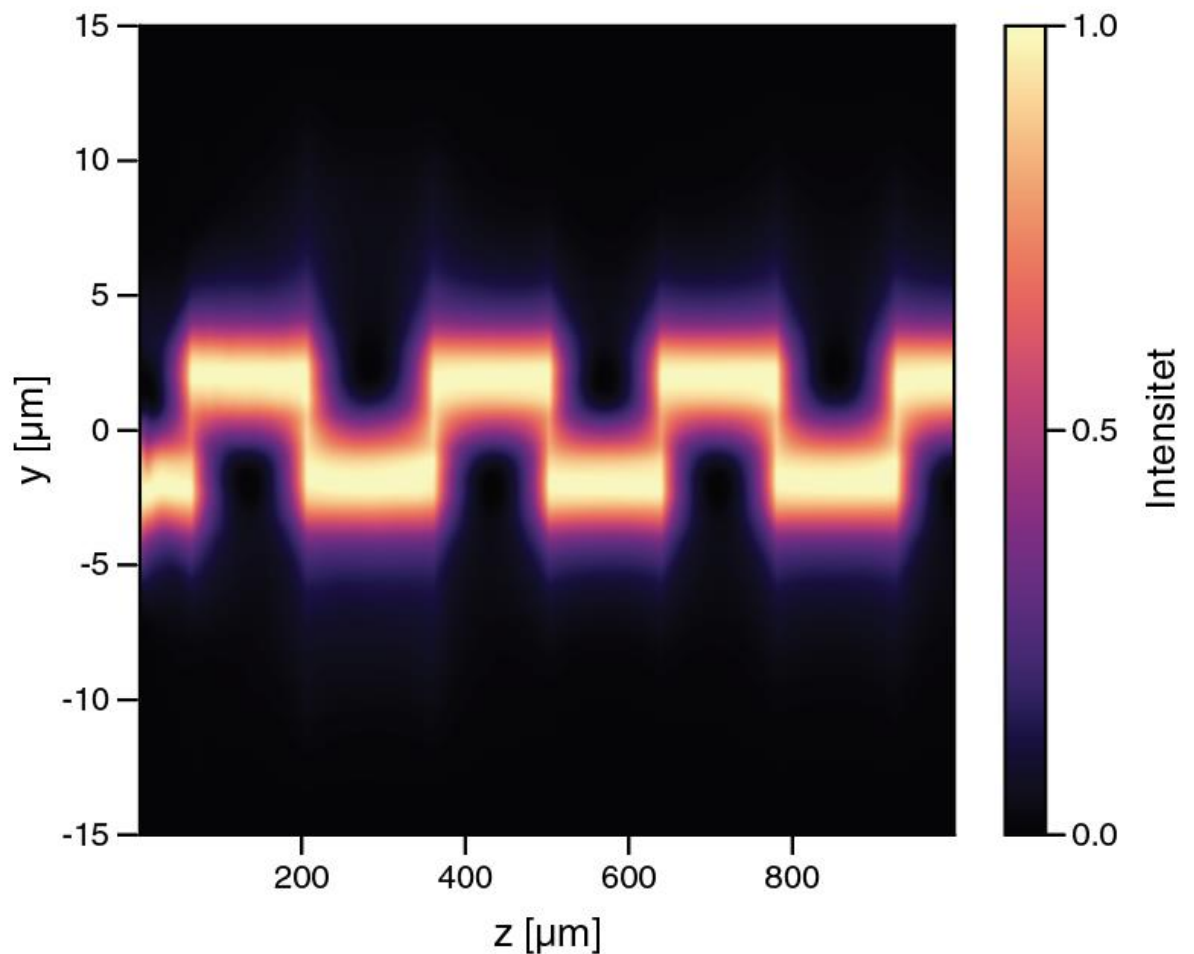
Visning/uthämtning av tenta sker i B437 på MC2 (Åsa Haglunds kontor) tisdagen den 9:e september kl. 11.30-13.00.

1. Stegindex-fiber (8p)

- a) I bilden visas brytningsindex-profilen för en stegindex-fiber. Hur förklarar man att en fiber vågleder ljus? Förklara kort med hjälp av både strålteori och vågteori. (2p)



- b) På nästa sida syns intensitetsfördelningen från en simulering av ljusets propagation genom fibern ovan. Vilken simuleringsteknik ni har stött på i kursen som vi har utnyttjat och varför har vi använt just den? (1p)



- c) Mönstret i intensitetsfördelningen är periodiskt varierande längs z-axel. Vad beror det på? Om det effektiva brytningsindexet för den fundamentala moden är $n_{eff} = 1.4991$, vad är det effektiva brytningsindex för den första högre ordningens mod. (5p)

2. Camera Obscura (12p)

Camera obscura (eller hålkamera) är en fotograferingsteknik som kan anses som den moderna kamerans ursprung. Det är en simpel teknik där bilden framställs genom att släppa in ljus från ett litet hål in till ett mörkt rum. Ljuset infaller mot det mörka rummets motsatta vägg på vilken bilden exponeras.

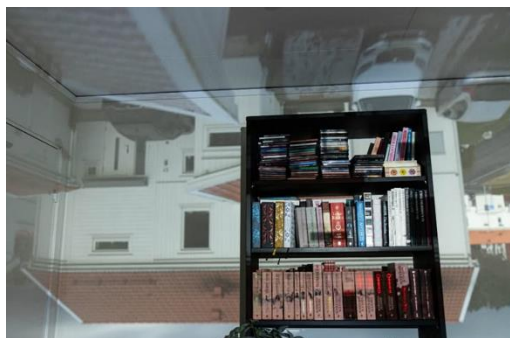
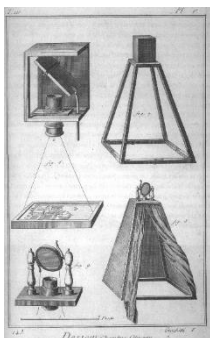
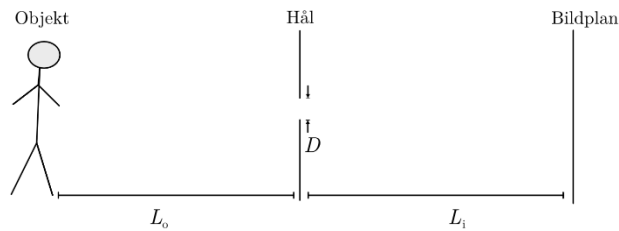


Foto: Johanna Lönnermark

Ovan ses både 1700-tals skisser på hålkameradesigner samt en projektion av ett grannhus i Kålleröd framställd genom ett litet hål i ett övertäckt fönster. Skissen nedan beskriver scenariot.

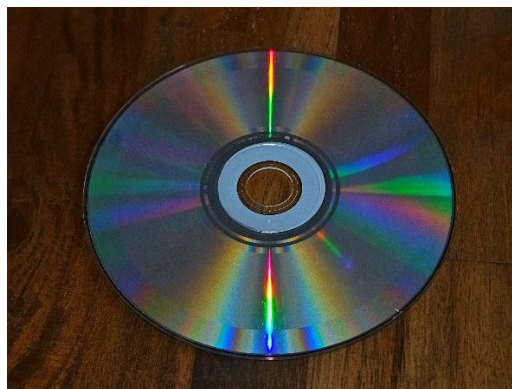


Vi ska nu grota ner oss i detta ur ett optiskt perspektiv. Använd skissen ovan och svara på följande frågor:

- Beskriv fenomenet kortfattat och motivera hur bilden uppkommer. Varför uppkommer bara bilden när fönstret är övertäckt enligt figuren ovan? (2p)
- Vad blir bildförstoringen uttryckt i parametrarna från skissen? (2p)
- Använd geometrisk för att beräkna vilken upplösning (alltså det minimala avståndet mellan två punktkällor på objektet som blir urskiljbara i bildplanet) vi uppnår givet uppställningen i skissen. (4p)
- I allmänhet ökar upplösningen när håldiametern D minskar, men vad är det den minsta håldiametern som ger ökad bildskärpa? Vilken trade-off får man leva med när man minskar D ? (4p)

3. CD-skivans storhet och fall (12p)

Under 1900-talets senare hälft utvecklades CD-skivan för lagring av musik och spel. Informationen är lagrad i form av gropar längs cirkulära spår. Den som någon gång sett en sådan märker att om man håller den under ett ljus i vinkel så ser man en regnbåge, så som i bilden nedan.



- Förklara detta fenomen. (3p)
- I bilden belyses skivan med en ficklampa rakt ovanifrån och på ett långt avstånd. Kortet är taget snett ovanifrån på ett avstånd av 33 cm. Skivans radie är 6.0 cm. Beräkna avståndet mellan de cirkulära spåren i skivan. (3p)

Hint: Ekvationen $\sin(\theta) - A \sin(\theta - \phi) = 0$ löses enklast genom att testa olika värden på θ med miniräknaren. Du behöver inte mer än 2 värdesiffror.

- c) Nästa generations cirkulära informationslagringssystem var DVD:n. Bilden nedan är också tagen på 33 cm avstånd, men CD-skivan har ersatts med en DVD-skiva. Spåren i en DVD ligger hälften så långt ifrån varandra som på en CD. I vilken vinkel kommer det röda / blåa ljuset spridas? (3p)

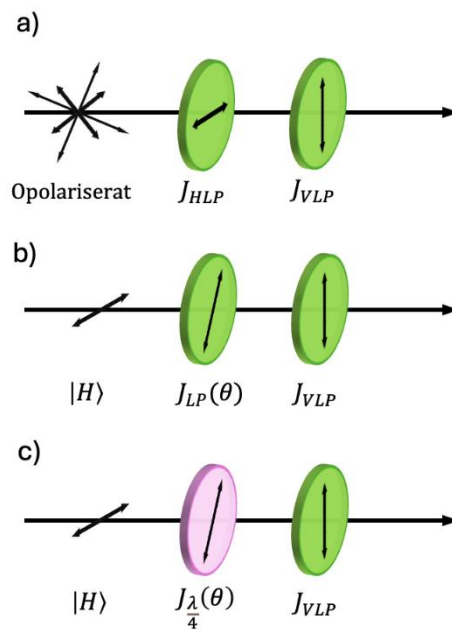


- d) CD-skivan avläses med en infraröd laser med en våglängd på 780 nm. En DVD skiva avläses med en röd laser med en våglängd på 650 nm. Efter DVD:n kom den så kallade Blue-ray formatet vilken, som namnet antyder, läses av med en blå/violett laser med en våglängd på 405 nm. Motivera med en ekvation varför en kortare våglängd gör att man kan lagra ännu mer data på samma yta. (3p)

4. Polarisation och Jonesmatriser (12p)

De optiska fenomenen vi undersöker i Labb-P kan beskrivas med hjälp av Jonesmatriser och vektorer. Matriserna beskriver olika optiska element och vektorerna representerar polariserat ljus.

- Visa med hjälp av Jonesmatriser att två korsade polarisatorer, se figur a), inte släpper igenom något ljus. (1p)
- Nu föreställer vi oss att horisontellt polariserat ljus faller in mot en linjärpolarisator med transmissionsaxel med vinkeln θ mot x-axeln som sedan faller in mot en linjärpolarisator med vertikal transmissionsaxel, se figur b). Vad är resulterande Jonesvektor? (3p)
- Visa att vinkeln $\theta = \frac{\pi}{4}$ ger max intensitet för uppställningen i figur b) och beräkna vad denna intensitet är. (2p)
- Nu föreställer vi oss att horisontellt polariserat ljus faller in mot en kvartsvågsplatta med optiska axeln med vinkeln θ mot x-axeln som sedan faller in mot en linjärpolarisator med vertikal transmissionsaxel, se figur c). Vad är resulterande Jonesvektor? (3p)
- Visa att vinkeln $\theta = \frac{\pi}{4}$ ger max intensitet för uppställningen i figur c) och beräkna vad denna intensitet är. (2p)
- Hur fungerar en kvartsvågsplatta? (1p)



Jonesvektorer och matriser som kan vara till hjälp:

Horisontellt polariserat ljus: $|H\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vertikalt polariserat ljus: $|V\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vänstercirkulärt ljus: $|\swarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Högercirkulärt ljus: $|\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Linjärpolarisator med horisontell transmissionsaxel:

$$J_{HLP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Linjärpolarisator med vertikal transmissionsaxel:

$$J_{VLP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linjärpolarisator med transmissionsaxel med vinkeln θ från x-axeln:

$$J_{LP}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Kvartsvågspatta med ordinära axeln med vinkeln θ från x-axeln:

$$J_{\frac{\lambda}{4}}(\theta) = e^{-\frac{i\pi}{4}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i\sin^2(\theta) & (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) + i\cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Tips: Intensitet av ljuset från en Jonesvektor beräknas genom att ta summan av kvadraterna av absolutvärdena för de två komponenterna i vektorn.

Dubblavinkeln formler:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

5. En Valborgs-halo (gloria) (15p)

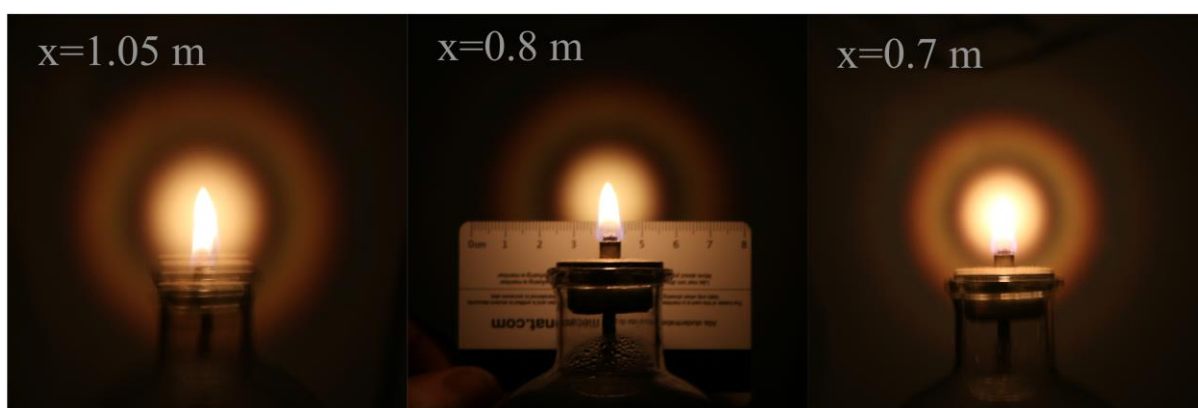
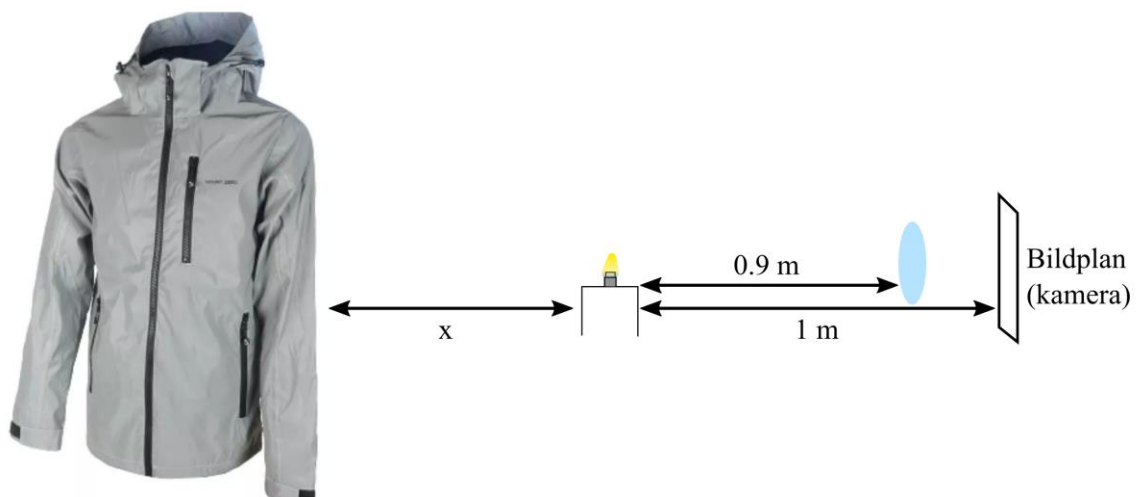
En Valborgsmässoafton uppmärksammar Rasmus Larsson, en gammal optiklärare, ett intressant optiskt fenomen, då en eldslåga observeras i förgrunden av en reflexjacka:

Reflexjackan av märket "Mount Zero" utnyttjar ett så kallat "reflextyg" med ett skikt av små sfäriska glaspärlor som verkar som retroreflektorer.

- a) Ge en utförlig kvalitativ förklaring till det optiska fenomenet, gärna med hjälp av illustrativa figurer, där kopplingen till reflexjackan, uppkomsten av ringar och regnbågstendenser klagörs. (6p)

Till hjälp visas tre fotografier tagna i en jacka-ljus-kamera konfiguration enligt nedan illustration (där kameralinsen var fokuserad så att en "relativt" skarp bild av ljuslågan erhöles i bildplanet).





- b) Med hjälp av fotografierna och illustrationen, uppskatta storleken på glaspärlorna i reflexjackan. (6p)
- c) På vilket avstånd "x" bör jackan hängas för att 3 ringar skall rymmas inom storleken av ett kårkort (8 cm) placerat vid lågan? (3p)

Lösningsförslag tenta i Optik FFY091, 3:e juni 2025

1. Stegindex-fiber

- a) Strålteori – Total intern reflektion. En stråle med tillräcklig brant vinkeln mot z-axeln kommer att totalt reflekteras mot övergången från kärna, med högre brytningsindex, till höljet, med ett lägre brytningsindex.
Vågteori – Moder. Sätter man sig ner och löser Maxwells ekvationer över fiberns geometri kommer man att hitta lösningar som behåller den elektromagnetiska energin i fiberns kärna, vilket vi kallar för fiberns moder, vilka vågleder ljuset.
- b) Vi har använt Beam Propagation Method (BPM). Då fiberns brytningsindex är inhomogent så kan vi inte använda PAS. Principiellt hade vi kunnat utnyttja HFM metoden, men det hade tagit oss mycket längre tid att beräkna.
- c) Multimod interferens! Fibern är tillräckligt stor för att vågleda flera moder. Att mönstret periodiskt varierar kommer från att den fundamentala moden interfererar med en högre ordningens mod.
Från HUPP5 och Ö5 så vet vi att på grund av att moderna har olika stor spatial utbredning, vilket gör att de kommer att "känna" olika effektiva brytningsindex, vilket medför att de kommer ha olika fashastighet då de propagerar genom fibern

$$\Delta\phi_{(0,0)} = k_0 n_{eff(0,0)} \Delta z, \quad \Delta\phi_{(0,1)} = k_0 n_{eff(0,1)} \Delta z.$$

I HUPP5 så såg vi att fundamental moden har minst utbredning och kommer att känna det högsta möjliga effektiva indexet, $n_{eff(0,0)} > n_{eff(0,1)}$, och kommer alltså att öka sin fas snabbare än den högre ordningens mod, där fasskillnaden, $\Delta\phi_{(0,0)} - \Delta\phi_{(0,1)}$, mellan moderna kommer att bestämma hur interferensen i intensitetsfördelningen. När vi har propagerat en sträcka så att fasskillnaden har varierat 2π så borde vi ha samma typ av interferens. Från intensitetsfördelningen så mäter jag upp att interferensen är periodisk med

$$\Delta z_{2\pi} \approx 162 \mu m$$

Och

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{(0,0)} - \Delta\phi_{(0,1)} &= k_0 n_{eff(0,0)} \Delta z_{2\pi} - k_0 n_{eff(0,1)} \Delta z_{2\pi} \\ &\rightarrow \Delta z_{2\pi} = \frac{2\pi}{k_0 (n_{eff(0,0)} - n_{eff(0,1)})} \\ &\rightarrow \Delta z_{2\pi} = \frac{\lambda_0}{(n_{eff(0,0)} - n_{eff(0,1)})} \approx 162 \mu m. \end{aligned}$$

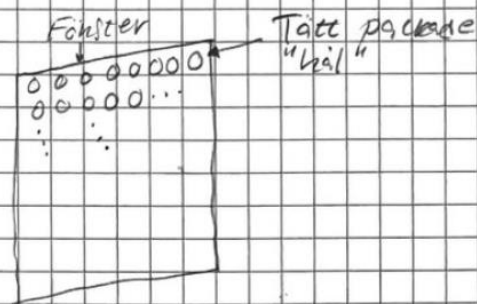
Från vilket vi kan lösa det effektiva brytningsindexet för den högre moden

$$n_{eff(0,1)} = n_{eff(0,0)} - \frac{\lambda_0}{\Delta z_{2\pi}} = 1.4991 - 0.0095 = 1.4896$$

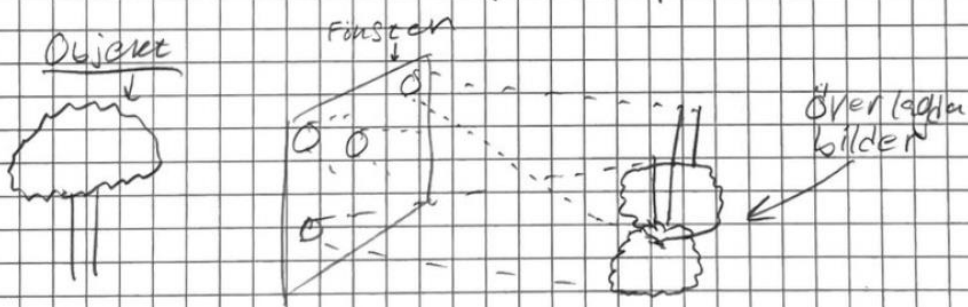
2. Camera obscura

Camera Obscura

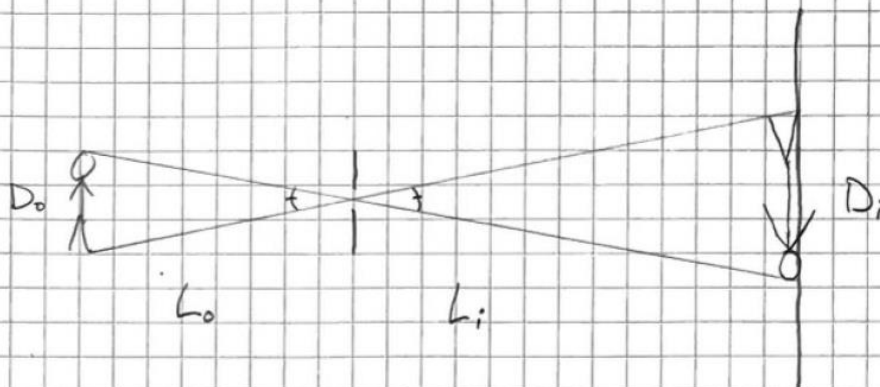
- a) Enklast att tänka är att betrakta ett fönster som en array med små "hål" som kan ses som hål till en hålkamera



Varje "hål" projicerar sin egen bild av bakgrunden på väggen mitt emot. Dock har alla projektioner små förskjutningar mot varandra så att den sammantagna summan av alla håls bilder helt saknar strukturen från varje individuell bild.



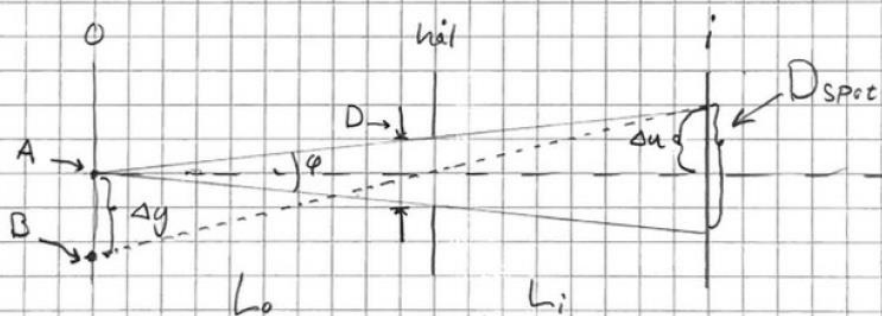
b) Bildförstoringen härrör från geometrisk optik



Kongruenta triangler:

$$\frac{D_i}{L_i} = \frac{D_o}{L_o} \Leftrightarrow \frac{D_i}{D_o} = \boxed{M = \frac{L_i}{L_o}}$$

c) För att få skärpan betraktar vi bilden av en punktkälla (A) på objektet:



$$\varphi = 2 \arctan \frac{D}{2L_o} \stackrel{\text{Parax.}}{\approx} \frac{D}{L_o}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{\text{spot}} &= (L_o + L_i) \tan(\varphi) \stackrel{\text{Parax.}}{\approx} (L_o + L_i) \frac{D}{L_o} \\ &= \left(1 + \frac{L_i}{L_o}\right) D \\ &= (1 + M) D \end{aligned}$$

För att punktkällan B (ett avstånd Δy från A) ska vara urskiljbar från A kräver vi att dess avbildning hamnar ett avstånd $\Delta u \geq \frac{D_{\text{spot}}}{2}$ från bilden av A. Alltså:

$$\Delta u \geq \frac{D_{\text{spot}}}{2}$$

$$\Delta u = M \Delta y$$

$$\Rightarrow M \Delta y \geq (1 + M) \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y \geq (1 + M^{-1}) \frac{D}{2}$$

Vi ser att för att öka upplösningen (minska Δy) kan vi antingen öka förstoringen (om denna inte redan $M \gg 1$) eller minska hålstorleken D .

d) * Förstoringen $M = \frac{L_i}{L_o}$ är ofta liten för käl-
kameror så man ofta avbildar något stort
och lånejt bort på en kärn nära insläpps-
hålet. Därför kan M vara svår att justera.

* Att minska kilets storlek är enklare men
kommer med trade-offen att ljuseffekten
som släpps igenom kilet skalar som D^2 .
Vi får alltså exponera våra bilder längre om
vi vill ha skarpa bilder.

Vi såg tidigare att $D_{\text{spot}} = (1+M)D$. Dock vet
vi att vi inte kan ha en minsta spotsize mindre
än

$$D_{\text{min}} = c \frac{\lambda L_i}{D} \quad (c \approx 2,44)$$

minsta spotsize

Minsta kilets storleken som ger en förbättrad skärpa
ges alltså av:

$$\begin{aligned} D_{\text{spot}} &= D_{\text{min}} \\ \Leftrightarrow (1+M)D &= c \frac{\lambda L_i}{D} \\ \Leftrightarrow D &= \sqrt{\frac{c \lambda L_i}{1+M}} \end{aligned}$$

Då $M \ll 1$, $\lambda = 540 \text{ nm}$, $L_i = 1 \text{ m}$ får vi

$$D \approx 1 \text{ mm}$$

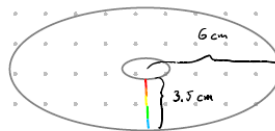
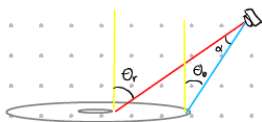
3. CD-skivans storhet och fall

a) Fenomenet uppstår eftersom de jämt fördelade spårerna agerar som en reflexionsgitter. Då olika våglängder sprids i olika vinklar ser vi olika färger när vi tittar på olika delar av skivan.

b) Vi använder oss av gitterekvationen

$$\Lambda \sin \theta = m\lambda$$

Denna måste gälla för både det röda ljuset nära skivans mitt och det blåa vid skivans yttre kant.



$$\text{Vinkelsumman i triangel} = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - (90^\circ + \theta_b) - (90^\circ - \theta_r) = \theta_r - \theta_b$$

$$\text{Vi kan också mäta } \alpha \text{ direkt i bilden: } \alpha \approx \arctan \frac{3.5 \text{ cm}}{3.3 \text{ cm}} \approx 6.05^\circ$$

Därmed får vi ekvationerna

$$\theta_r - \theta_b \approx 6.05^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda \sin \theta_r &= 650 \text{ nm} \\ \Lambda \sin \theta_b &= 490 \text{ nm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sin \theta_r = \frac{650}{\Lambda} \quad \sin \theta_b = \frac{490}{\Lambda} \sin [\theta_r - 6.05^\circ]$$

Denna ekvation kan lösas numeriskt med miniräknaren

θ_r	$\sin \theta_r - \frac{490}{650} \sin [\theta_r - 6.05^\circ]$
45°	-0.12
30°	-0.03
20°	+0.02
24°	-0.002
23.5°	+0.0009

good enough

$$\text{Med } \theta_r \approx 23.5^\circ \text{ får vi } \Lambda = \frac{650 \text{ nm}}{\sin 23.5^\circ} \approx 1.6 \mu\text{m}$$

c) I en DVD har vi alltså $\Lambda = 0.8 \mu\text{m}$

Återigen använder vi gitterekvationen och får nu

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) = \arcsin\left(\frac{650 \text{ nm}}{0.8 \mu\text{m}}\right) = 54.3^\circ$$

$$\theta_b = \arcsin\left(\frac{490 \text{ nm}}{0.8 \mu\text{m}}\right) = 37.8^\circ$$

Två saker att notera:

1. Vinkeln för första maximum är vid en betydligt högre vinkel. Det ser vi på att fotografen verkar behöva sänka kameran för att fånga regnbågen.

2. $\theta_r - \theta_b = 16.5^\circ$ vilket innebär att regnbågen är mycket bredare, vilket syns på att fotografen endast lyckats fånga grönt och lite blått och inte hela regnbågen.

d). Blått ljus kan fokuseras till en mindre punkt.
Storleken på fokus ges ungefär av

$$D_{\text{spot}} \approx \frac{\lambda}{D_{\text{lin}}}$$

Gränsar där det finns blir mycket plac. i lösaren så kan en 50% kortare våglängd fokuseras på en 50% mindre feature och därmed bör vi kunna läsa in dubbel så mycket information.

4. Polarisation och Jonesmatriser

a) $J_{VLP} J_{HLP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dvs oavsett infallande ljus får vi alltid ut noll intensitet.

b) $J_{VLP} J_{LP}(\theta) |H\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix}$

c) Genom att skriva om $\sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$ ser vi att max är för $\theta = \frac{\pi}{4}$ och max intensitet

$$\text{är då } \left| \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

d) $J_{VLP} J_{\frac{\lambda}{4}}(\theta) |H\rangle = e^{\frac{i\pi}{4}} \begin{bmatrix} 0 \\ (1-i) \sin(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix}$

e) På samma sätt som i deluppgift c) får vi att max är för $\theta = \frac{\pi}{4}$ och max intensitet är då

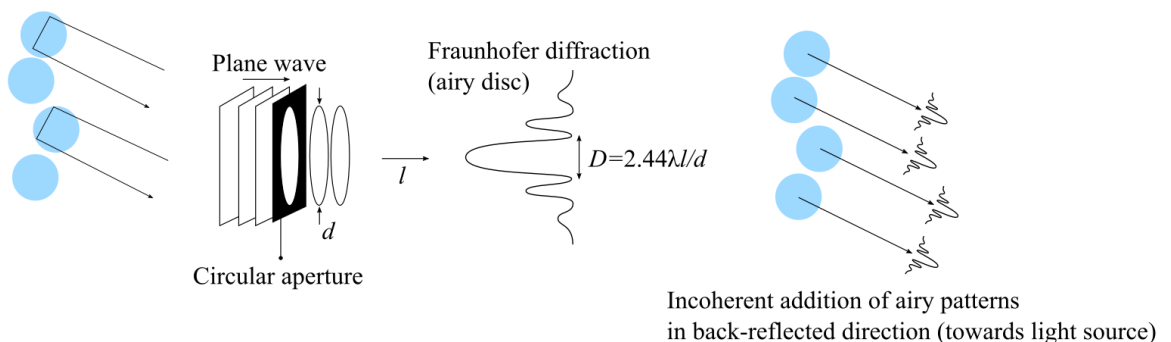
$$\left| e^{\frac{i\pi}{4}} (1-i) \sin(\theta) \cos(\theta) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

f) Se labb-PM.

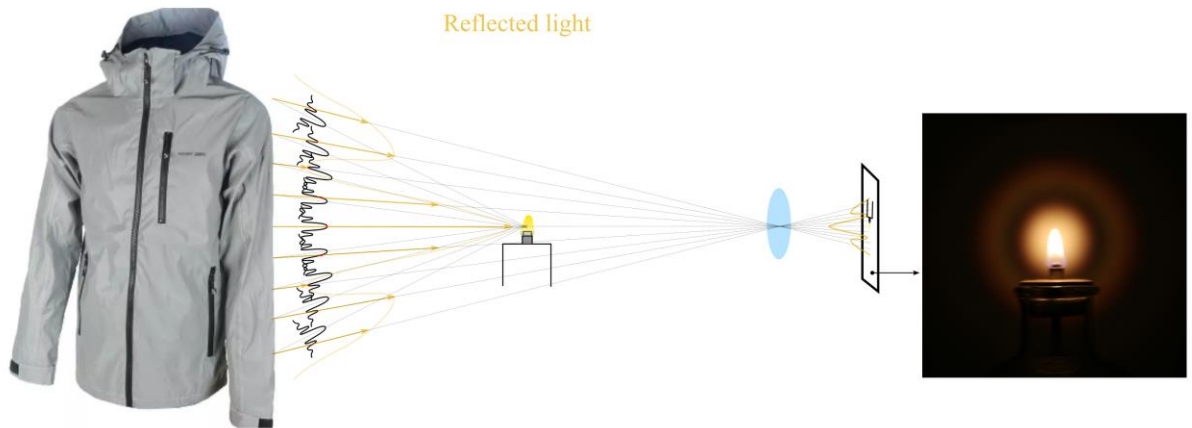
5. En Valborgs-halo (gloria)

Lösning:

- a) Glaspärlornas funktion som retroreflektorer gör att inkommande ljus reflekteras tillbaka mot ljuskällan (vänster i nedan bild). Dock, på grund av ljuspärlans begränsade storlek så beskär de plana vågorna likt en cirkulär disk från varje pärla och efter propagation får vi diffraction i form av ett airy-mönster från varje pärla i riktning mot ljuskällan. Airy-möstrets storlek fås från tumregeln som indikerar ett våglängdsberoende.

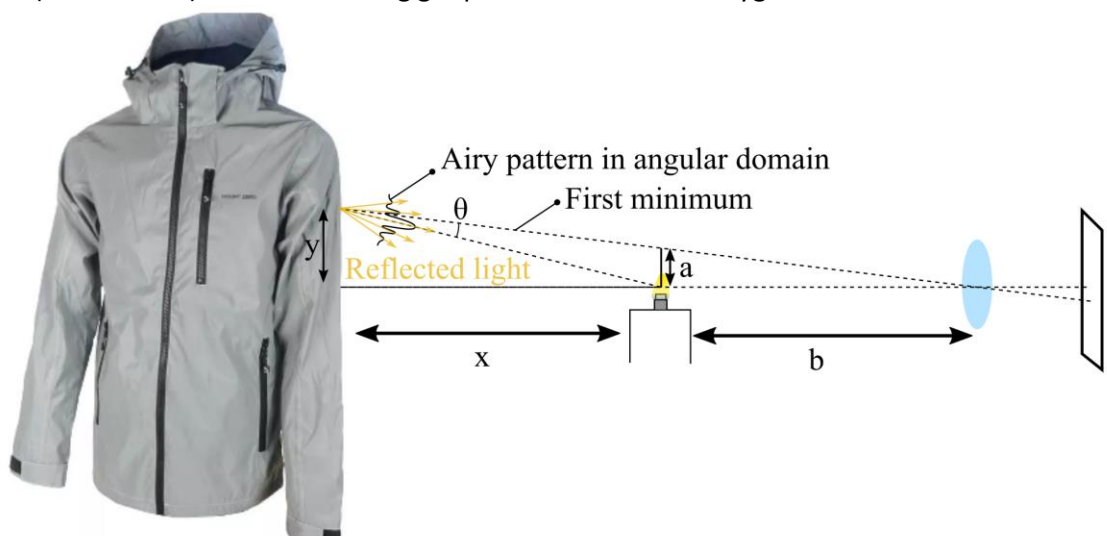


Eftersom riktningen till ljuskällan varierar utmed jackans yta så sänds airy-mönstret ut i olika riktningar som funktion av position på jackan relativt ljuset, se nedan illustration:



Gula pilar (samt röd prick i individuella airy-mönster) indikerar här styrkan i det reflekterade diffraktionsmönstret i riktningen mot kameran (det som fastnar på bild eller på näthinnan i ett öga). Med detta i beaktning ser vi att ringarna i ljusfenomenet har sitt ursprung i formen på airy-mönstret som varje pärla åsamkar. Dock är det inte en individuell pärlas diffraktionsmönster vi observerar utan det mönster som uppkommer från ljusstyrkan i det reflekterade mönstret i kamerans (ögats) riktning i varje individuell pärlreflektion över jackans utbredning. Regnbågseffekten kommer från våglängdsberoendet i diffraktionen där olika färger har minima och maxima i olika vinklar.

- b) Storleken på glaspärlorna kan beräknas från tumregeln av spot-size (eller snarare diffraktionsvinkeln från en cirkulär apertur), som med andra ord är diametern på första "mörka" ringen i diffraktionsmönstret från en pärla. Vi kan också förstå detta från nedan illustration som visar på vilket avstånd "y" längs jackan de pärlor sitter som skickar ut minst ljus mot kameran. Vinkeln $\theta = 1.22\lambda/d$ där d är pärldiametern. Vinkeln kan utläsas från tumregeln om spot-size där $D_{spot} = \theta l$, där l är propagationssträckan. θ får vi från bilden nedan som $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x+b}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, där $y = \frac{a}{b}(x + b)$. I fotot med kårkortslinjalen ($x=0.8$ m) kan vi uppskatta $a = 1.8$ cm. Med $x = 0.8$ m och $b = 0.9$ m kan vi uppskatta $d \approx 30 \mu\text{m}$ ($\lambda = 500$ nm) vilket är en rimlig glaspärlestorlek för reflexityg.



- c) Gör bakåtvänd kalkyl där du löser ut x som funktion av θ och där du stoppar in $a = 4$ cm och $\theta = 4\theta_0$ där θ_0 är den beräknade vinkeln i b).