Tentamen i Optik FFY091 - **måndag 26:e augusti 2024, kl. 14:00-18:00**

Jourhavande lärare **Johan Kohlvik, tel. 0761132977, finns på plats ca kl. 15 och 17** för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs inte så många ord!
- Gör egna rimliga antaganden och motivera dessa där det behövs.

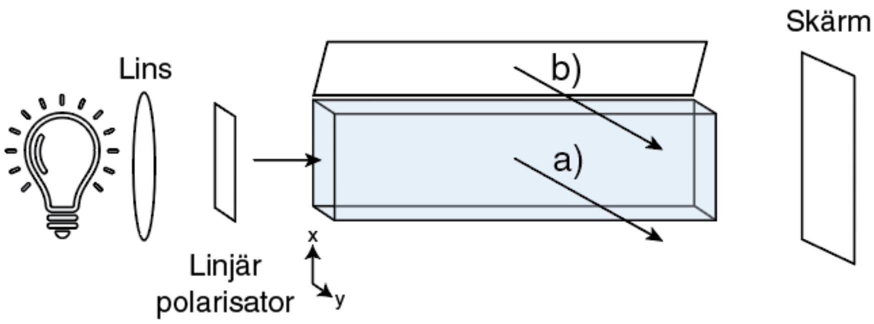
Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).
Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.
På kurshemsidan publiceras lösningsförslag senast onsdag.

Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail till Åsa Haglund, e-mail: asa.haglund@chalmers.se.

---

1. Sweet Light (11p)

Under laboration P undersökte du en tank med sockerlösning. När vitt linjärpolariserat ljus skickades genom tanken uppstod en ”regnbåge” (coolt), som du snillrikt lyckades förklara varför den uppstår med hjälp av dina kunskaper om Rayleigh-spridning och optisk aktivitet.

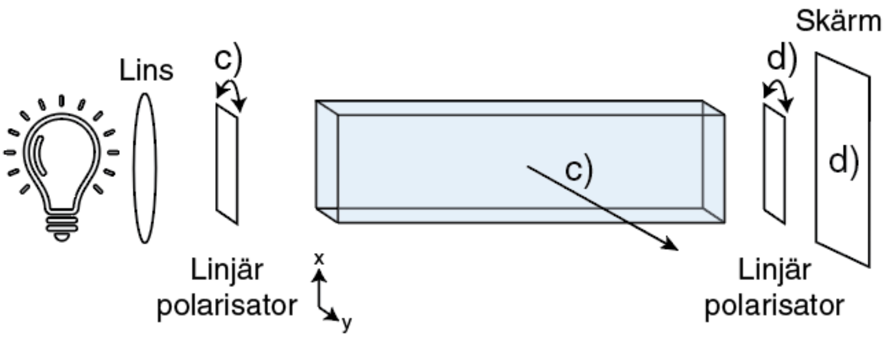


Förklara vilken färg/färger och polarisation ljuset har och varför:

a) Om du studerar ljuset som kommer från sidan av tanken. (2p)

b) Om du studerar ljuset som reflekterats från spegeln ovanför tanken. (2p)

Efter laborationen så kom du på att det hade varit spännande att även lägga till en linjärpolarisator för att polarisera ljuset som lämnar tanken (Detta gjorde vi inte under själva laborationen) och undersöka vad som händer när du roterar på de olika polarisatorerna.



c) Hur och varför förändras ”regnbågen” i tanken om du roterar på polarisatorn innan tanken? (2p)

d) Vad kommer du att se för färg på skärmen om du roterar polarisatorn efter tanken? (5p)

2. Hjälp Lars att köpa ny TV (13p)

När man köper en ny TV vill man självklart få en bra bild. Det hade exempelvis varit väldigt osköntatt se pixlarna i TV-skärmen eftersom det skapar en mycket tråkig pixelerad bild. Huruvida man ser en pixlig bild eller inte beror på avståndet till TVn, L_{TV}, samt storleken på TVns pixlar.

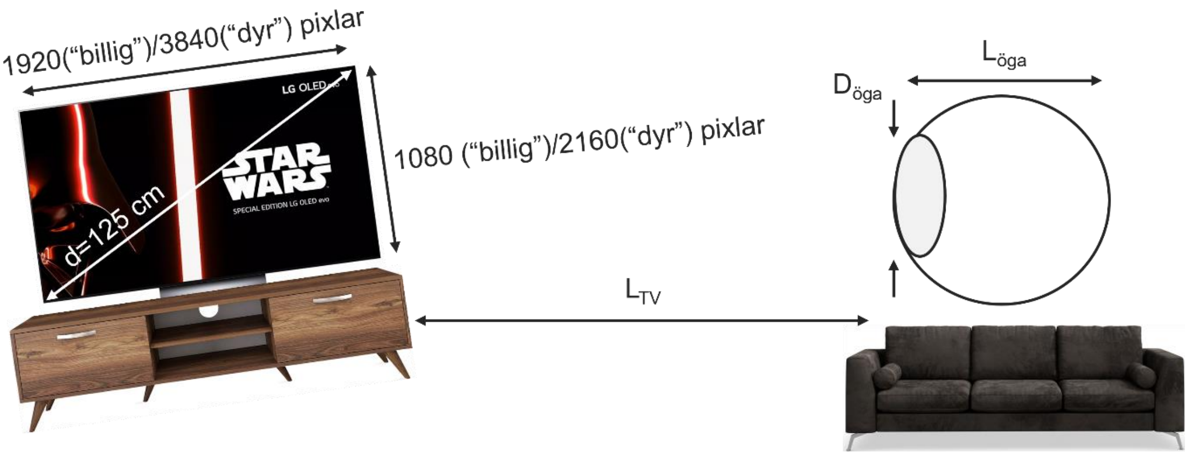
I mitt (Lars) vardagsrum är avståndet mellan soffan och TVn ca L_{TV} = 3 m, och jag har plats för en 50 tums TV (d=125 cm mätt på diagonalen). Gör det någon skillnad om jag köper en ”billig” eller ”dyr” TV, eller kan jag spara in pengar genom att köpa den ”billiga” TVn utan att uppleva en pixlig bild?

- ”Billig” TV: Full-HD 1920 x 1080 (horisontell x vertikal) kvadratiska pixlar

- ”Dyr” TV: Fancy Ultra-HD (4k) QLED 3840 x 2160 (horisontell x vertikal) kvadratiska pixlar

Ledning:

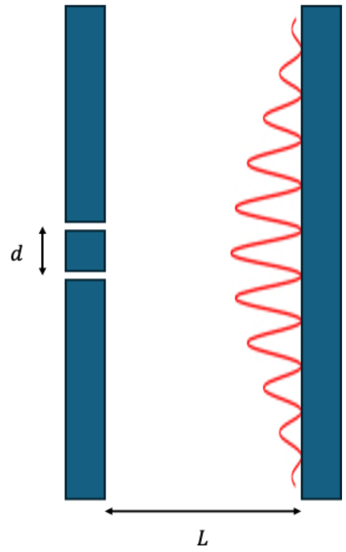
- Hur långt ifrån TVn måste du vara för att inte kunna upplösa pixlarna på din näthinna (dvs en ”bra” bild utan synliga pixlar)?
- Vad är det maximala avståndet mellan två närliggande pixlar?
- Typiska värden: $D_{öga}$ = 3 mm, $L_{öga}$ = 20 mm, λ = 500 nm (grönt ljus, mitten på det synliga spektrumet).



3. Klassisk optik möter kvant (12p)

Om man vill förstå den moderna verkligheten i detalj måste man sätta på sina kvantglasögon.

a) Youngs dubbelspaltsexperimentet påvisar ljusets märkliga våg-partikel-dualitet. Kvantmekaniken kan användas för att förklara det märkliga beteende som fotoner eller materia påvisar i experimentet, men det räcker med klassisk vågteori för att kunna beskriva interferensmönstret som uppstår. Ljus med medelvåglängden $\lambda = 550$ nm och linjebredden $\Delta\lambda = 10$ nm belyses mot två spaltar. Avståndet mellan spalterna är $d = 0{,}5$ mm och spaltbredden är mycket liten (mycket mindre än våglängden på ljuset). En skärm är placerad på ett avstånd $L = 1$ m bakom spalterna. Beräkna hur många ljusa interferensfransar man högst kan se på skärmen (glöm inte centralfransen) och avståndet mellan fransarna. (6p)

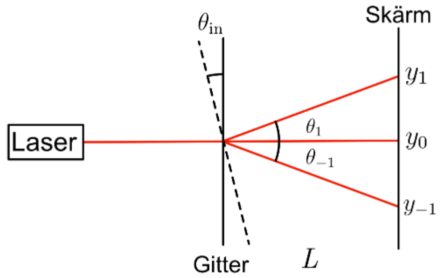


b) Beskriv kort hur Youngs dubbelspaltsexperiment fungerar och varför det blir en ljus frans i mitten av skärmen och sedan ljusa och mörka fransar när man rör sig bort ifrån centrum av skärmen. Uppstår fortfarande interferensmönstret ifall vi genom spalterna skickar en foton eller elektron åt gången (men flera gånger)? (6p)

4. Gitterklurigheter (12p)

I en av uppgifterna i Labb D användes ett gitter för att beräkna våglängden på en okänd laser. I en labbuppställning är det enkelt att olika typer av fel letar sig in resultatet. Ett av dessa uppkommer då lasern inte infaller ortogonalt mot gittret.

Antag att du har en HeNe-laser med $\lambda = 633$ nm vars ljus lyser ortogonalt på en skärm. Ett binärt transmissionsgitter har en period $\Lambda = 1\ \mu$m och placeras initialt parallellt mot skärmen på ett avstånd $L = 3$ dm.



a) Beräkna var på skärmen som 0:te och 1:a ordningens diffraktionsordningar träffar. Alltså beräkna y_0, y_1 och y_{-1} (se figur). (3p)

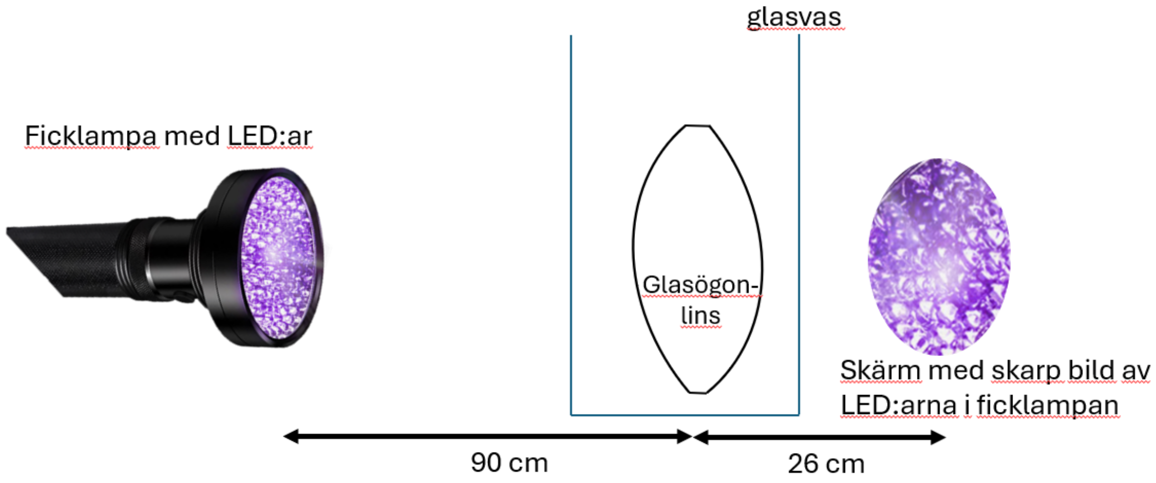
b) Vi roterar nu gittret motsols med en vinkel $\theta_{\text{in}} = 10°$ enligt figuren (lasern får alltså infallsvinkeln θ_{in} mot gittret). Beräkna vad som händer med y_0, y_1 och y_{-1}. (6p)

c) Antag nu att laserns våglängd är okänd och att du vill beräkna denna med hjälp av gittret. Antag också att du inte lägger märke till att gittret är roterat som i föregående uppgift. Använd y_0, y_1 och y_{-1} från föregående uppgift för att hitta vilket fel du hade fått i denna mätning. (3p)

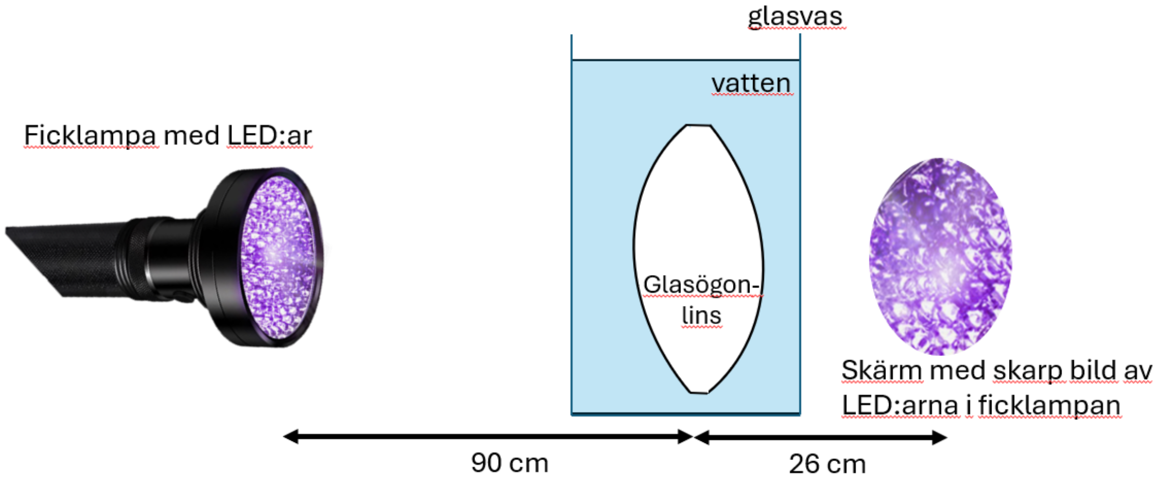
5. Blir Åsa lurad av optikaffärens säljare? (12p)

Åsa har nu nått den erfarna åldern att hon måste köpa läsglasögon. I optikaffären försöker en av säljarna övertyga henne att hon ska betala 3000 kronor extra för att få det bästa glaset i glasögonen, nämligen den finaste glaskvaliteten som har ett lägre brytningsindex och därmed ger en tunnare lins som väger mindre. Bra för en ovan näsa! ”Är detta sant eller är det bara ett säljknep?” funderar Åsa. Med den optikkunskap Åsa har samlat på sig under åren så sätter hon snabbt upp ett litet experiment i butiken för att testa säljarens påstående.

För att bestämma brytningsindexet på linsen lägger hon glasögonen i en glasvas med plan botten. Hon lyser på den ena glasögonlinsen med en ficklampa (som självklart består av ett antal LED:ar). När hon håller ficklampan 90 cm framför linsen, så får hon en bild av LED:arna på avståndet 26 cm efter linsen:



Sedan häller hon vatten i glasskålen så att det täcker linsen. Med ficklampan fortfarande $90\ cm$ framför linsen får hon nu en skarp bild av LED:arna på avståndet $63\ cm$ efter linsen:



a) Med hjälp av Åsas experiment, beräkna lins-materialets brytningsindex. Är det sant att detta är lägre än brytningsindex i det vanliga (billiga) glaset som används i glasögonlinser $n \approx 1.5$? (10p)

b) Är det sant om linsmaterialet har ett lägre brytningsindex kan man använda en tunnare lins för att åstadkomma en förutbestämd fokallängd? Motivera ditt svar. (2p)

Ledning:
- Antag att glasskålens botten är jämntjock – då kan du bortse från den.
- Välj ett lämpligt in- och ut-plan, och betrakta det som finns mellan dessa plan som en TOK.
- Vilka fokallängder har de två TOK:arna för att vi ska få skarpa avbildningar på de uppmätta avstånden?
- Vilken fasmodulering, $\varphi(r) = -\cdots + const$, måste en TOK ha för att fungera som en lins med en viss fokallängd?
- Teckna denna fasmodulering fysiskt genom att gå från in- till ut-plan med TOK-modellen, $\varphi(r) = \cdots + \cdots + \cdots$.

Lösningsförslag tenta i Optik FFY091, 26:e augusti 2024

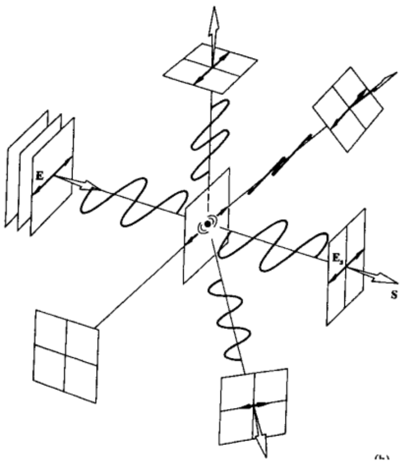
1. Sweet light

Som nämnt under laborationen (i uppgiftstexten) så uppstår regnbågen i sockertanken pga. Rayleigh-spridning och optisk aktivitet.

Rayleigh-spridning sker när de spridande partiklarna är små, relativt våglängden. Spridningen uppkommer då ljuset får partiklarna att oscillera, i riktning av polarisationen hos ljuset. Med små partiklar så approximeras Rayleigh-spridningen mycket väl av oscillerande dipoler, som vi stötte på i el-fältkursen.

Så Rayleigh-spridning ger att ljus framför allt sprids ortogonalt mot det exciterande ljusets polarisation och polarisationen hos som det ljust som sprids ortogonalt i sin tur ortogonalt mot spridningsplanet, se figur från labb-pm nedan.

Så om vi studerar ljuset som kommer direkt från sidan av tanken, så vet vi alltså att ljuset framför allt har spridits mot oss från partiklar som oscillerar i x-led tanken och det sprida ljuset ska vara polariserat i x-led (Vilket vi dubbelkollade under labben).



Figur 12. Rayleighspridning mot en molekyl. Observera att 90°-spritt ljus är helt polariserat med polarisationsriktning vinkelrätt mot spridningsplanet. Figurer från Hecht (1987).

Den optiska aktiviteten hos sockerlösningen kommer att rotera polarisationsplanet hos ljuset som propagerar genom tanken, vilket i sin tur alltså roterar oscillationsriktningen hos partiklarna längst tanken. Viktigt för experimentet är den optiska aktiviteten också är våglängdsberoende, alltså rotationen av polarisationsplanet är olika för olika våglängder.

Okej! Så "regnbågen" uppstår när vi tittar från sidan av tanken. Då ser vi Rayleigh-spritt ljus från partiklar som oscillerar i y-led, vilket kommer att ske vid olika platser längst tanken för olika färger då den optiska aktiviteten är våglängdsberoende. Nu är vi beredda att svara på frågorna:

a) Färg: Vi kommer att se en regnbåge som förklarat ovan!

Polarisation: Linjär polariserat i x-led då det spridda ljuset är från dipoler som oscillerar i x-led.

b) Färg: En ”regnbåge” som är förskjuten jämfört med den vi ser från sidan av tanken då vi nu kollar på det spridda ljuset från partiklar som oscillerar i y-led.
Polarisation: Opolariserat, spegeln bevarar inte polarisationen. Ljuset som lämnar tanken är polariserat i y-led (vilket man också får poäng för) men efter reflektion mot spegeln så kommer polarisationen att vara slumpmässig igen.

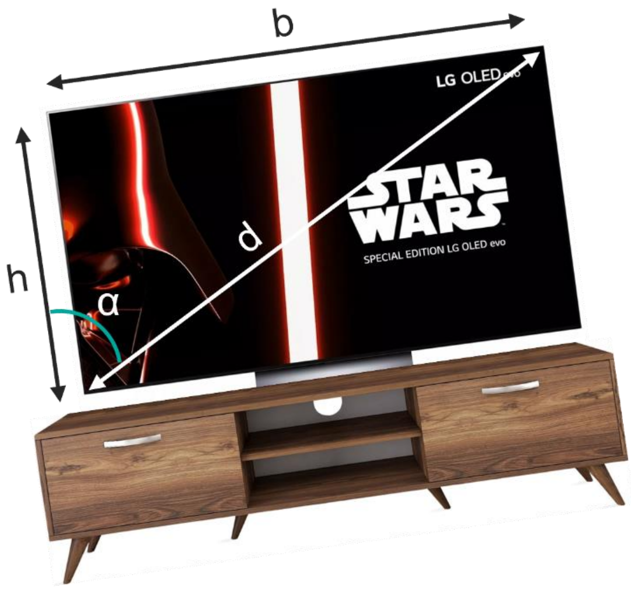
c) Om vi roterar linjärpolarisatorn innan tanken så kommer vi att ändra det initiala polarisationsplanet som det vita ljuset har som träffar tanken. När vi roterar på polarisatorn så kommer vi alltså skifta positionen av regnbågen i tanken.

d) Ljuset som lämnar tanken innehåller alla olika färger och kommer se vitt ut på skärmen utan linjär-polarisatorn. Men alla färgerna kommer att ha olika polarisationsplan då de har roterats olika mycket genom socker tanken. Polarisatorn efter tanken kommer alltså att filtrera bort alla de färger som inte matchar det planet som polarisatorn släpper igenom. Om vi roterar polarisatorn så kommer vi alltså att se de olika färgerna från regnbågen på skärmen!

2. Hjälp Lars att köpa ny TV (10 p)

Valda parametrar:
$D_{öga}$ = 3 mm, $L_{öga}$ = 20 mm (behövs egentligen inte), λ = 500 nm (grönt ljus, mitten på det synliga spektrumet).

Om två närliggande pixlar i TV:n avbildas på näthinnan långt ifrån varandra så att deras spot inte signifikant överlappar kan vi urskilja pixlarna och TV bilden blir ”pixlig”. Om istället två närliggande pixlar avbildas tillräckligt nära varandra på näthinnan så att deras spot överlappar signifikant kan vi inte upplösa de två närliggande pixlarna och bilden blir en mjuk övergång från pixel-till-pixel. I detta fall kan vi inte se pixlarna i skärmen och upplever en utmärkt bild.



För att räkna ut hur stor en pixel blir på näthinnan i ögat måste vi först klura ut hur stor en pixel är. Med beteckningar i figuren nedan kan man t.ex. först beräkna sidlängden på TV:n

$$h = d \sin \alpha$$

Där vinkeln fås av pixelförhållandet. För full HD: 1920x1080 (eller Ultra-HD: 3840 x 2160)

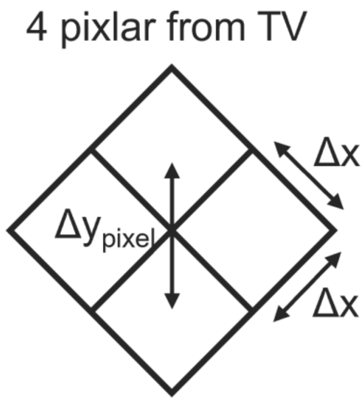
$$\tan \alpha = \frac{1080}{1920} \left(eller \ = \frac{2160}{3840} \right)$$

Eftersom pixlarna är kvadratiska fås sidlängden på en pixel av

$$\Delta x = \frac{h}{1080} \left(eller = \frac{h}{2160} \right)$$

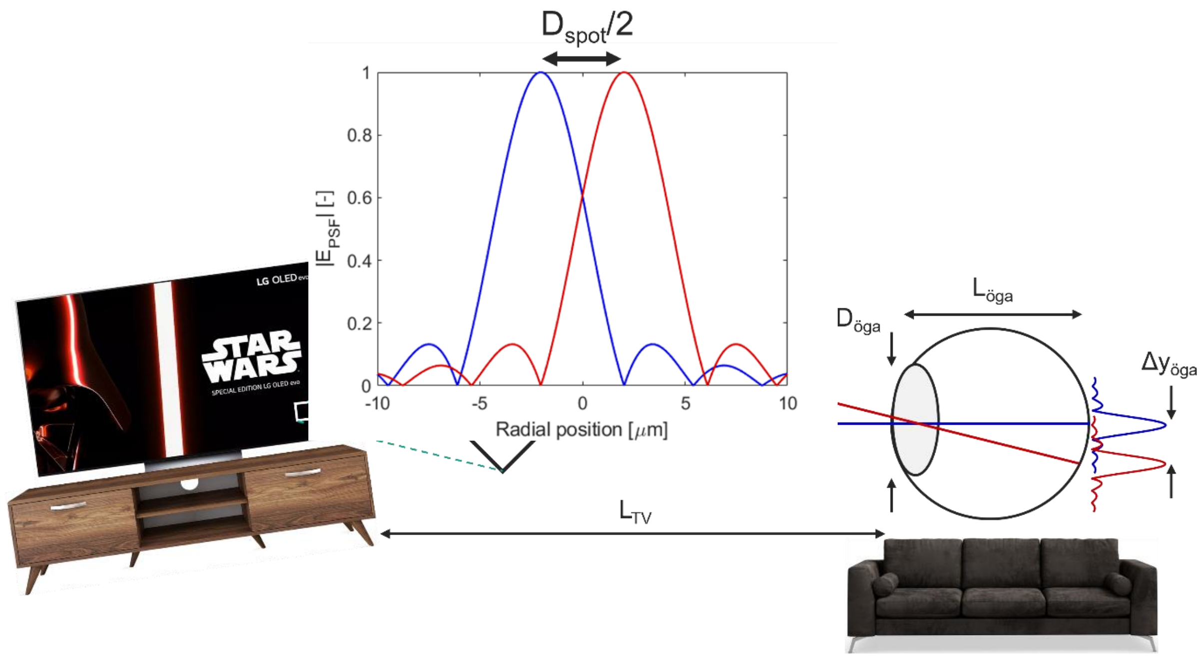
Det längsta avståndet mellan två närliggande pixlar blir som figuren visar

$$\Delta y_{pixel} = 2\sqrt{\Delta x}$$



Vi använder nu Rayleighs upplösningsvillkor som säger att vi inte kan upplösa två objekt om avbildningen på näthinnan ligger närmare än $D_{spot}/2$, där D_{spot} är spot sizen som fås av tumregeln

$$D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda}{D_{öga}} L_{öga}$$



Med geometrisk optik får avståndet från två närliggande pixlar på näthinnan, $\Delta y_{öga}$, som alltså måste vara mindre än $D_{spot}/2$ för att vi inte ska kunna urskilja de två pixlarna

$$\Delta y_{öga} = \frac{\Delta y_{pixel}}{L_{TV}} L_{öga} \leq \frac{D_{spot}}{2} = \frac{2.44}{2} \frac{\lambda}{D_{öga}} L_{öga}$$

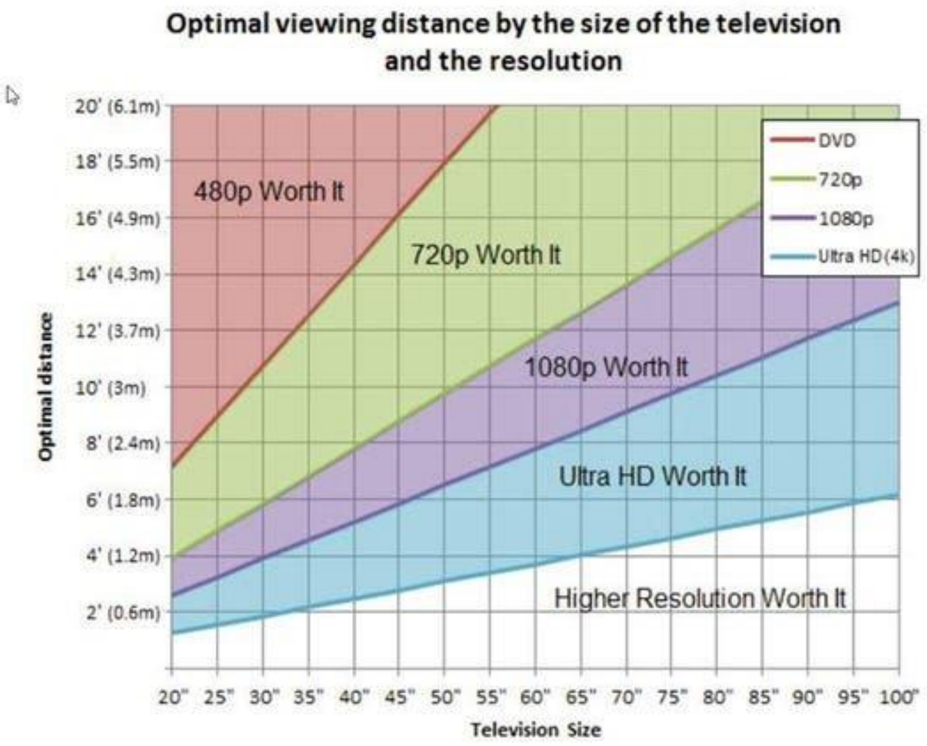
Vi löser ut L_{TV}, dvs hur långt vi måste vara från TVn man behöver befinna sig för att inte kunna upplösa två närliggande pixlar:

$$L_{TV} \geq \frac{\Delta y_{pixel} D_{öga}}{1.22\lambda}$$

<u>För den ”Billiga” TVn:</u> Full-HD 1920 x 1080 fås att $L_{TV} \geq 4$ m, vilket är längre än avståndet mellan soffan och där jag ska placera TVn! Detta innebär att det finns viss risk att bilden kommer upplevas vara ”pixlig”.

<u>För den ”Dyra” TVn:</u> Fancy Ultra-HD (4k) QLED 3840 x 2160 fås att $L_{TV} \geq 2$ m, vilket kortare än avståndet mellan soffan och där jag ska placera TVn! Detta innebär att jag med god marginal inte behöver oroa mig för att se en ”pixlig” bild. Detta är faktiskt min nuvarande TV. Och mycket riktigt så ser jag inga pixlar. Ungefär på 1 m avstånd från TVn kan jag definitivt se pixlar, men någonstans mellan 1-2 m blir de ”osynliga”, i alla fall för mina ögon.

På nätet kan man hitta nedan bild som visar vilken typ av TV som är bäst att köpa beroende på hur långt från TVn man ska sitta. Enligt diagrammet så är det optimala avståndet för en 50 tums Ultra-HD TV mellan 3-6 m, vilket stämmer hyfsat med beräkningarna ovan (>2 m) och med mitt ”hemexperiment” (>1.5 m).



3. Klassisk optik möter kvant

a) Ljusets koherenslängd blir $\Delta\, \mathrm{l}_c = c\ \Delta t_c = \frac{c}{\Delta \nu}$

Från $\nu = \frac{c}{\lambda}$ får vi att $\frac{\Delta \nu}{\Delta \lambda} \approx \frac{d\nu}{d\lambda} = \ -\frac{c}{\lambda^2} \Longrightarrow \Delta \nu \propto \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda$

Om koherenslängden är längre än vägskillnaden $m\lambda$ kommer vi kunna se interferensfransen dvs:

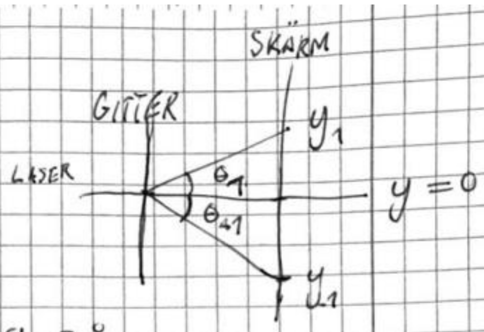
$$m\,\lambda \leq \frac{c\lambda^2}{c\,\Delta\lambda}\ \Longrightarrow m \leq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{550}{10} = 55 \text{ fransar}$$

Totalt får vi alltså $2 \times 55 + 1 = 111$ fransar!

Vinkelavståndet (små vinklar) mellan fransarna blir $\theta = sin(\theta) = \frac{\lambda}{d}$ och avståndet mellan fransarna blir $\frac{L\,\lambda}{d} = \frac{1m \times 550nm}{0{,}5mm} = 1{,}1$ mm.

b) Youngs dubbelspaltsexperimentet påvisar att ljus kan påvisa egenskaper av både partiklar och vågor. En koherent ljuskälla skickas genom två spaltar och ljuset detekteras sedan bakom skärmen. Ur ett vågperspektiv uppstår interferensmönstret då vågen som sänds ut från ena spalten interfererar med vågen från andra. I centrum på skärmen (mitten av interferensmönstret) är väglängdsskillnaden mellan ljus som går ifrån den ena och den andra spalten noll och vi få därmed konstruktiv interferens där. Rör vi oss i planet av skärmen bort ifrån centrum så kommer väglängdsskillnaden mellan de två spalterna till skärmen att ändras och vid ett visst läge är ljuset ur fas med vartannat och vi får då destruktiv interferens (mörk rand på skärmen). Skickar vi en foton i taget, kommer märkligt nog intensitetsfördelning på skärmen att fortfarande påvisa ett interferensmönster. Detta är vad experiment och kvantmekaniska beräkningar påvisar, men är lite klurigt att förklara varför det händer. Går fotonen genom båda spalterna samtidigt? Interfererar fotonen med sig själv? Klurigt!

4. Gitterklurigheter



a) $m\lambda = \Lambda \sin\theta_m$

$\theta_0 = 0°$

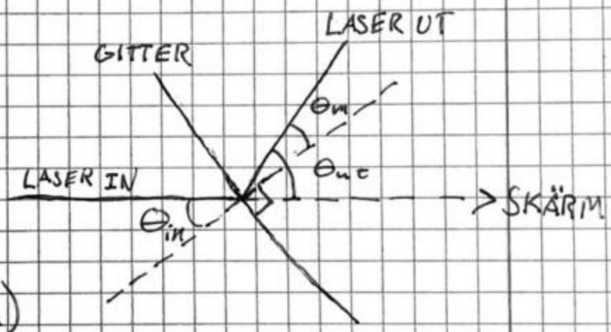
$\theta_1 = \arcsin\left[\frac{\lambda}{\Lambda}\right] \approx 39,3°$

$\theta_{-1} = \arcsin\left[-\frac{\lambda}{\Lambda}\right] \approx -39,3°$

$\Rightarrow y_0 = 0$

$y_1 = L\tan\theta_1 \approx 24,5\ \text{cm}$

$y_{-1} = L\tan\theta_{-1} \approx -24,5\ \text{cm}$



b)

Gitterekvationen:

$m\lambda = \Lambda(\sin\theta_{in} + \sin\theta_m)$

$\Rightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{\Lambda} - \sin\theta_{in}$

$\Leftrightarrow \theta_m = \arcsin\left[\frac{m\lambda}{\Lambda} - \sin\theta_{in}\right]$

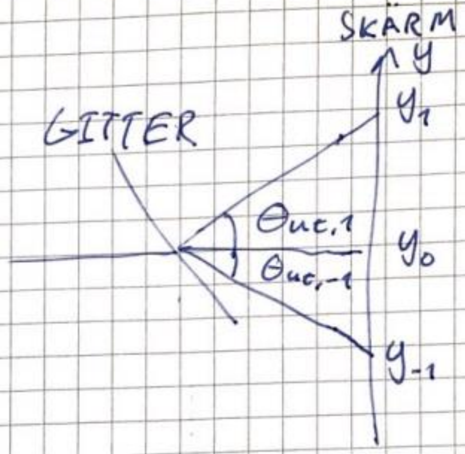
$\theta_0 = -\theta_{in} = -10°$

$\theta_1 = \arcsin\left[\frac{\lambda}{\Lambda} - \sin\theta_{in}\right] \approx 27,3°$

$\theta_{-1} = \arcsin\left[-\frac{\lambda}{\Lambda} - \sin\theta_{in}\right] \approx -53,8°$

b) forts...

$\Theta_{ut} = \Theta_{in} + \Theta_m$



$\Rightarrow \Theta_{ut,0} = 0°$

$\Theta_{ut,1} = 37,3°$

$\Theta_{ut,-1} = -43,8°$

$\Rightarrow y_0' = 0$

$y_1' = 22,9\,cm$

$y_{-1}' = -28,7\,cm$

Svar: $y_0' = y_0 \Rightarrow$ 0:e ordningen oförändrad.

$y_1' < y_1 \Rightarrow$ avstånd till 0:e minskade!

$y_{-1}' < y_{-1} \Rightarrow$ —— 〃 —— ökade!

c)

Antag λ_1, λ_{-1} okända och vi använder

$\lambda_1 = \Lambda \sin \Theta_{ut,1} \approx 606\,nm$

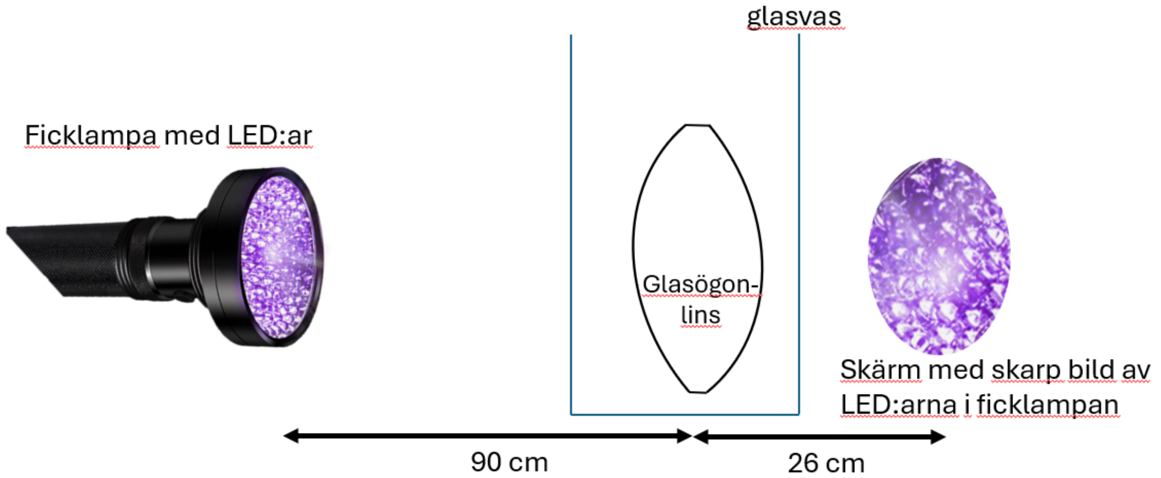
$\lambda_{-1} = -\Lambda \sin \Theta_{ut,2} \approx 692\,nm$

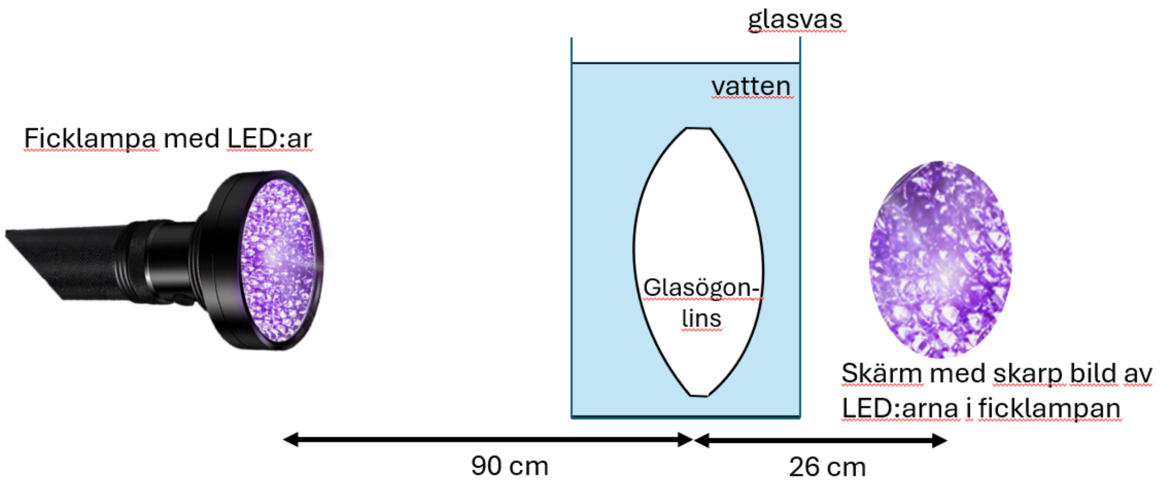
$$\begin{cases} \Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda = -27\,nm \\ \Delta\lambda_{-1} = \lambda_{-1} - \lambda = 59\,nm \end{cases}$$

5. Blir Åsa lurad av optikaffärens säljare?

a) Vi väljer in- och utplan enligt figuren nedan och betraktar det som finns mellan in- och utplanet som en TOK. Denna TOK är i båda fallen omgiven av luft (vattnet är helt och hållet en del av TOK#2 eftersom vattnet enbart förekommer mellan in- och utplanet.).

Våra formler för avbildning och för fasmoduleringen hos en lins med viss fokallängd gäller just för fallet att TOK:en är omgiven av luft. Formlerna gäller alltså för båda fallen i denna uppgift.





Vi börjar med att beräkna fokallängden för TOK #1, f_1, genom att använda Gauss linslag för avbildningen av LED-lamporna på skärmen under linsen,

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{90\ cm} + \frac{1}{26\ cm} \quad \Rightarrow \quad f_1 = 20\ cm$$

Och på samma sätt blir fokallängden f_2 för TOK #2 från dess avbildning

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{90\ cm} + \frac{1}{63\ cm} \quad \Rightarrow \quad f_2 = 37\ cm$$

Fokallängden blir längre med vatten, d.v.s. TOK:en får svagare linsverkan, eftersom vattnets brytningsindex ligger närmare glasets än vad luftens brytningsindex gör. Vi kan ju ta specialfallet att ”vattnets” brytningsindex skulle vara lika stort som glasets. Då skulle optiskt sett TOK:en vara bara en plan skiva med homogent brytningsindex – alltså ”fönsterglas” – en sådan ”lins” skulle följaktligen ha oändligt lång fokallängd.

Vi har sett i en härledning i kursen att en TOK med fokallängden f_1 (i luft, som gäller för våra TOKar) måste ha en fasändring mellan in- och utplan (fasmodulering) som är lika med

$$\varphi_1(r) = -k\frac{r^2}{2f_1} + const$$

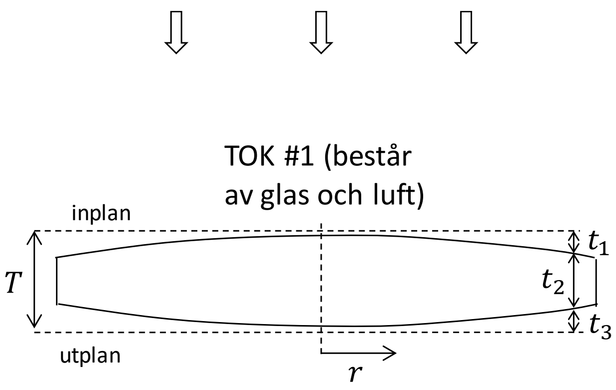
där k är fasändring per längdenhet för propagationen efter utplanet, alltså i luft, och $const$ ett godtyckligt icke- r-beroende uttryck. Här är alltså $k = k_0$. Så mer precis gäller alltså

$$\varphi_1(r) = -k_0\frac{r^2}{2f_1} + const$$

och samma sak för TOK #2,

$$\varphi_2(r) = -k_0\frac{r^2}{2f_2} + const$$

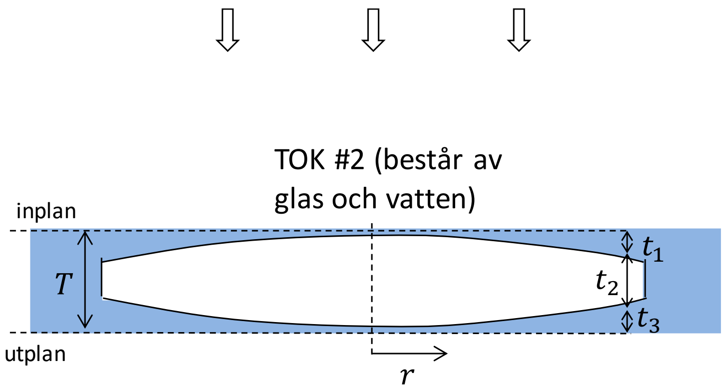
Med TOK-modellen för propagation genom en TOK kan vi beräkna hur denna fasmodulering åstadkoms av den fysiska realiseringen av TOK:en. För TOK #1 fås



$$\varphi_{1,TOK}(r) = k_0 \cdot t_1(r) + k_0 \cdot n_g \cdot t_2(r) + k_0 \cdot t_3(r)$$

där de tre termerna representerar propagation från in-plan till linsyta (i luft), mellan de två linsytorna (i glas med brytningsindex n_g), respektive från linsyta till utplan (i luft).

För TOK #2 är enda skillnaden mot TOK #1 att första och sista propagationen sker i vatten (brytningsindex n_v) istället för luft, så vi får



$$\varphi_{2,TOK}(r) = k_0 \cdot n_v \cdot t_1(r) + k_0 \cdot n_g \cdot t_2(r) + k_0 \cdot n_v \cdot t_3(r)$$

Sätter vi nu uttrycken för fasmoduleringen från TOK-modellen lika med den fasmodulering som krävs för att ge den uppmätta fokallängden hos TOK:en fås, för TOK #1,

$$\varphi_{1,TOK}(r) = \varphi_1(r) \quad \Rightarrow \quad t_1(r) + n_g \cdot t_2(r) + t_3(r) = -\frac{r^2}{2f_1} + const$$

Eftersom $t_1(r) + t_3(r) = T - t_2(r)$ fås

$$T + (n_g - 1) \cdot t_2(r) = -\frac{r^2}{2f_1} + const$$

Bakar vi in T i en ny $const$ och löser ut tjockleken $t_2(r)$ på glasmaterialet får vi

$$t_2(r) = -\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_1} + const$$

som alltså talar om hur tjockleken på glaset ska ändras med radialavståndet r. Att koefficienten för r^2 är negativ betyder att linsen ska bli tunnare mot kanten, vilket är precis vad som vi förväntar oss av en positiv lins!

Nu gör vi samma sak för TOK #2, alltså sätter uttrycken för fasmoduleringen från TOK-modellen lika med den fasmodulering som krävs för att ge den uppmätta fokallängden hos TOK:en,

$$\varphi_{2,TOK}(r) = \varphi_2(r) \quad \Rightarrow \quad n_v \cdot t_1(r) + n_g \cdot t_2(r) + n_v \cdot t_3(r) = -\frac{r^2}{2f_2} + const$$

Igen använder vi $t_1(r) + t_3(r) = T - t_2(r)$ så att

$$n_v \cdot T + (n_g - n_v) \cdot t_2(r) = -\frac{r^2}{2f_2} + const$$

och sätter in vårt uttryck för glastjockleken $t_2(r)$ som vi fann från TOK #1,

$$n_v \cdot T + (n_g - n_v) \cdot \left(-\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_1}\right) = -\frac{r^2}{2f_2} + const$$

Denna ekvation är uppfylld om koefficienterna för r^2 är samma i vänster- och högerled, d.v.s.

$$(n_g - n_v) \cdot \left(-\frac{1}{2(n_g - 1)f_1}\right) = -\frac{1}{2f_2} \quad \Rightarrow \quad (n_g - n_v)f_2 = (n_g - 1)f_1$$

Löser vi ut det eftersökta brytningsindexet för glasmaterialet, n_g, ur detta uttryck fås

$$n_g = \frac{n_v f_2 - f_1}{f_2 - f_1} = \frac{1.33 \cdot 37\ cm - 20\ cm}{37\ cm - 20\ cm} = 1.72$$

Det är högindex-material och inte lågindex som säljaren sa.

b) Nej, det motsatta är vad som gäller! Alltså: om brytningsindex är högt så åstadkommer man en bestämd fasförändring på ljuset över en kortare tjocklek. Se även ekvation ovan som beskriver hur tjockleken på linsen påverkas av dess brytningsindex.