Tentamen i Optik FFY091 - tisdag 30:e maj 2023, kl. 14:00-18:00

Jourhavande lärare **Erik Strandberg, tel. 072-58 57 577, finns på plats ca kl. 15 och 17** för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs inte så många ord!
- Gör egna rimliga antaganden och motivera dessa där det behövs.

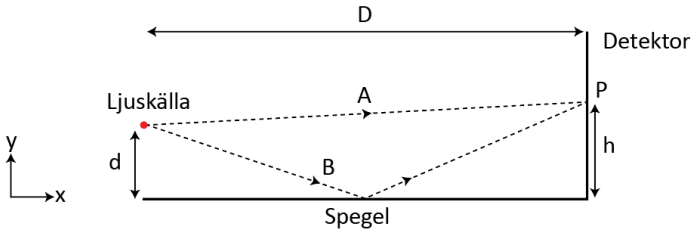
Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).
Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.
På kurshemsidan publiceras lösningsförslag dagen efter tentan, d.v.s. onsdagen den 31:a maj.

Visning/uthämtning av tenta är torsdagen den 22:a juni kl. 14.00-15.00 på Åsa Haglunds kontor, rum B437 i MC2-huset.

---

1. Spegel, spegel på väggen där (8p)

Nu är optikkursen snart slut men du har lyckats bli riktigt intresserad av interferens. Efter tentamen kommer du hem, där du faktiskt hittar en lämplig ljuskälla, med linjärt polariserad emission, och en fin fotodetektor, och börjar fundera hur du ska ställa upp det för att få till ett interferensmönster. Du kollar dig själv i spegeln och får en snilleblixt! Du kommer på att om du håller laser parallellt med och tillräckligt nära spegeln så kommer en del av ljuset gå direkt mot detektor, A, och en del att reflekteras mot spegeln innan den träffar detektorn, B.



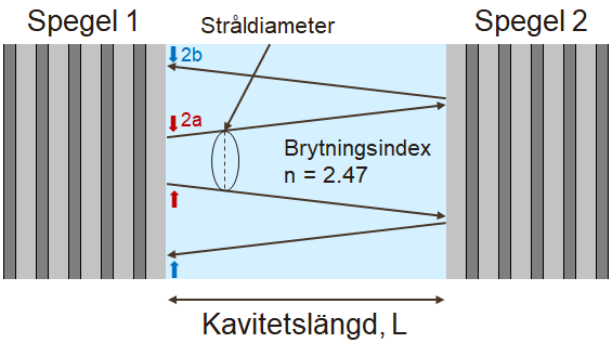
Längdskillnaden du har skapat mellan de två strålgångarna kommer kunna genera ditt önskade interferensmönster på detektorn! Denna uppställning kallas för Lloyds spegel och har använts bland annat som komplement till Youngs dubbelspalt för att påvisa vågnaturen hos ljus. Spegeln du bestämmer dig för att använda är av glas, inte metall, och du orienterar din ljuskälla så att det infallande elektriska fältet är enbart ortogonalt mot infallsplanet vid reflektion. Detta betyder att stråle B kommer ha π extra fasskift från reflektionen vid detektorn, som du behöver ta med i din beräkning!

a) Vad blir fasskillnaden mellan stråle A och B vid punkten P för den givna geometrin i bilden ovan samt ljuskällans våglängd? Anta att strålarna är paraxiella. (6p)

b) Var kommer du hitta interferens-maximumet närmst spegeln på detektorn, h, om $D = 60$ cm, $d = 1$ mm, $\lambda = 633$ nm? (2p)

2. Diffraktionsförluster i lasrar (14p)

Nedan visas ett tvärsnitt av en så kallad ytemitterande laser med cylindrisk geometri. Kaviteten består av ett homogent material (för enkelhetens skull) med brytningsindex n = 2.47. Normalt anger man vacuum-våglängden, t.ex. λ_0 = 450 nm. Det betyder att våglängden i kaviteten är $\lambda = \lambda_0/n$.



a) Nämn ett villkor som det propagerande fältet i laserkaviteten måste uppfylla efter varje rund-tur i kaviteten för att ett laserfält ska byggas upp. (1p)

b) I lasrar som använder plana speglar, t.ex. i de flesta ytemitterande lasrar, kan diffraktionsförluster vara ett problem. För att uppskatta diffraktionsförlusterna kan man tänka sig att man börjar med ett Gaussiskt startfält, $E_1(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)/\sqrt{2\pi a^2}$, precis intill den vänstra spegeln (spegel 1) som indikeras i ovan figur. Sedan låter man fältet propagera genom kaviteten och reflekteras av den högra spegeln (spegel 2) och propagera tillbaka (total sträcka 2*L). Som vi såg i HUPP1 förblir en Gaussisk stråle Gaussisk vid propagation (Gauss-bleibt-Gauss), så fältet efter propagation kan skrivas som $E_2(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)/\sqrt{2\pi b^2}$. Diffraktionsfärlusterna kan sedan beräknas genom att undersöka överlappet mellan $E_1(r)$ och $E_2(r)$ enligt

$$\eta = 1 - \frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} E_1(r)E_2(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} |E_1(r)|^2 r\, dr\, d\theta}$$

Finn ett uttryck för diffraktionsförlustera och uttryck svaret i termer av strålradien a hos startfältet och b hos fältet efter propagation (figuren ovan illustrerar strålen och dess propagation genom kaviteten). (3p)

c) Stråldiametern 2*b hos $E_2(r)$ kan uttryckas i termer av a med hjälp av en viss tumregel, vilken? Antag att vi befinner oss i fjärrfältet. (1p)

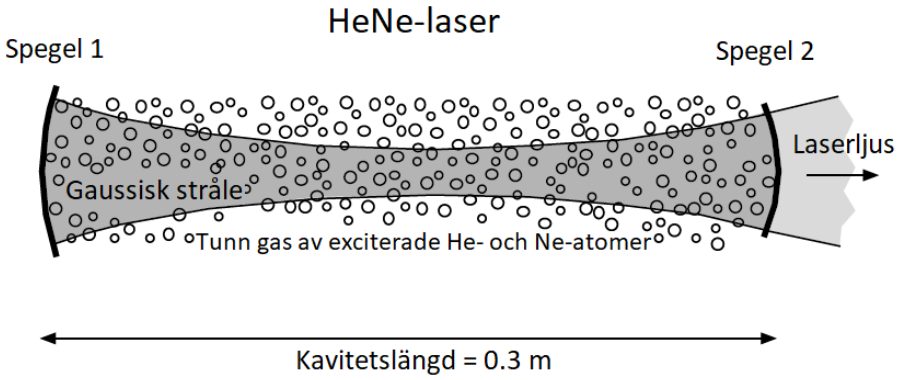
d) Beräkna diffraktionsförlusterna för en blå (λ_0 = 450 nm) ytemitterande laser, med a = 4 µm, n = 2.47 (så våglängden i kaviteten blir $\lambda = \lambda_0/n$) och den typiska kavitetslängden L_1 = 1.82 µm. Känns diffraktionsförlusterna rimliga, vad säger din magkänsla? Beräkna också fallet för samma laser, men med kavitetslängderna L_2 = 175.6 µm och L_3 = 250 µm. Skissa diffraktionsförlusterna som funktion av kavitetslängd. Är du nöjd med hur diffraktionsförlusterna ändras med ökad kavitetslängd, varför/varför inte? (4p)

e) Kan vi verkligen använda oss av tumregeln i c) för att beräkna stråldiametern 2*b hos $E_2(r)$ för de tre kavitetslängderna i d)?! När är vi i fjärrfältet? (2p)
Tips: HFM-integralen som vi använder i kursen för att uppskatta avståndet, L, till fjärrfältet kan vara svår att komma ihåg och anges nedan (notera att jag redan skrivit in den totala sträckan som vårt laserfält färdas, 2L, i HFM-integralen):

$$E_2(u,v) = \int_x \int_y E_1(x,y) exp\left(jk\frac{x^2+y^2}{2(2L)}\right) exp\left(-jk\frac{xu+yv}{(2L)}\right) dxdy$$

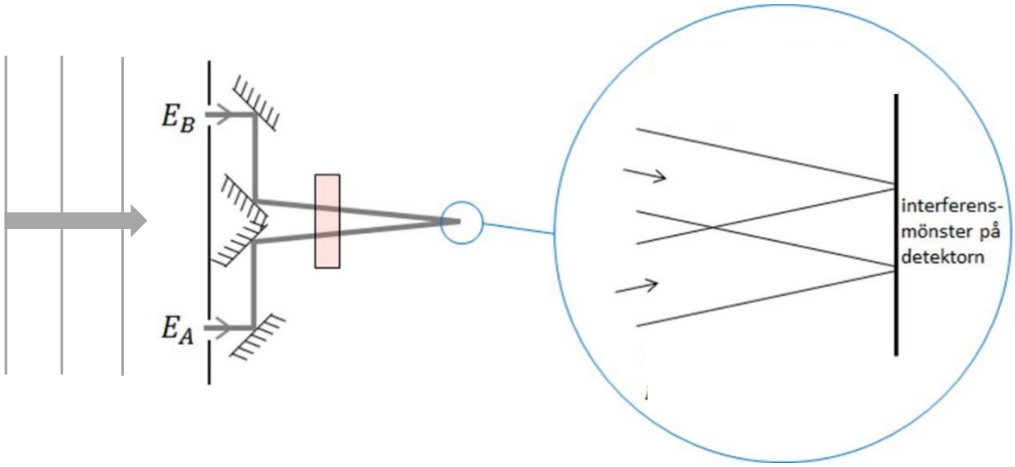
Nedan visas en skiss av en HeNe-laser med en emissionsvåglängd på λ_0 = 633 nm och n = 1 (så våglängden i kaviteten blir $\lambda = \lambda_0/n = \lambda_0$). I labb D använder vi oss av ett gäng HeNe-lasrar, vars kavitetslängd är ca. L ≈ 0.3 m (dvs mycket längre än för de ytemitterande lasrarna). Antag att laserstrålens diameter är ca 0.5 mm, så att a = 0.25 mm.

f) Kan vi använda tumregeln i c) för att beräkna stråldiametern 2*b hos $E_2(r)$ för HeNe-lasern? Vad blir diffraktionsförlusterna? Känns det som rimliga förluster? Om kavitetslängd, stråldiameter $(2 * a)$ och våglängd hålls konstant, kan du komma på något sätt att minska diffraktionsförlusterna (inga beräkningar, endast en kort motivering behövs). (3p)

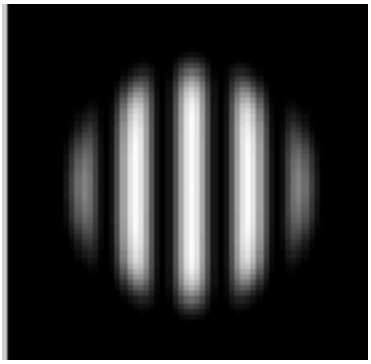


3. Koherens – hänger fälten ihop och hur? (11p)

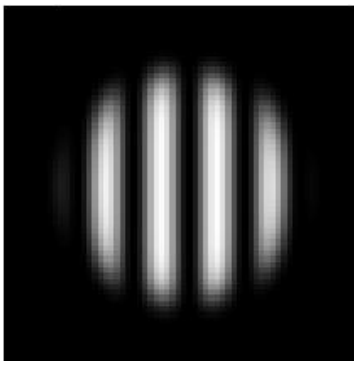
För att mäta rumskoherens ifrån t.ex. en stjärna kan man använda sig av en så kallad Michelson stellar interferometer som för samman fälten ifrån två punkter och studera interferensen på en detektor-array, som illustreras i figuren nedan.



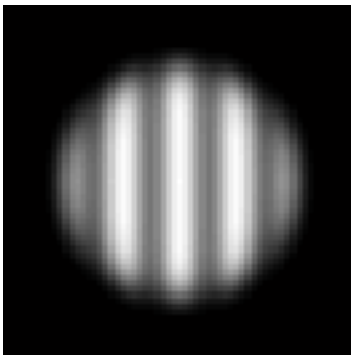
För fyra olika avstånd mellan A och B får man de fyra nedanstående interferensmönstren. Förklara vad som krävs för fasförhållande mellan E_A och E_B för att vi ska få interferensmönster a), b), c) respektive d) på detektor-arrayen. Är fälten i A och B koherenta i fall a), i fall b), i fall c) och i fall d)? Motivera dina svar.



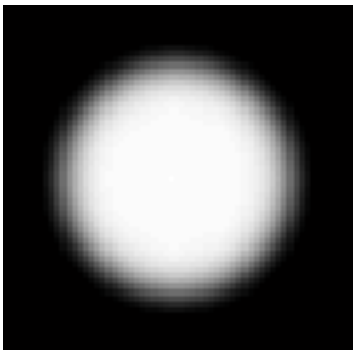
a)



b)



c)



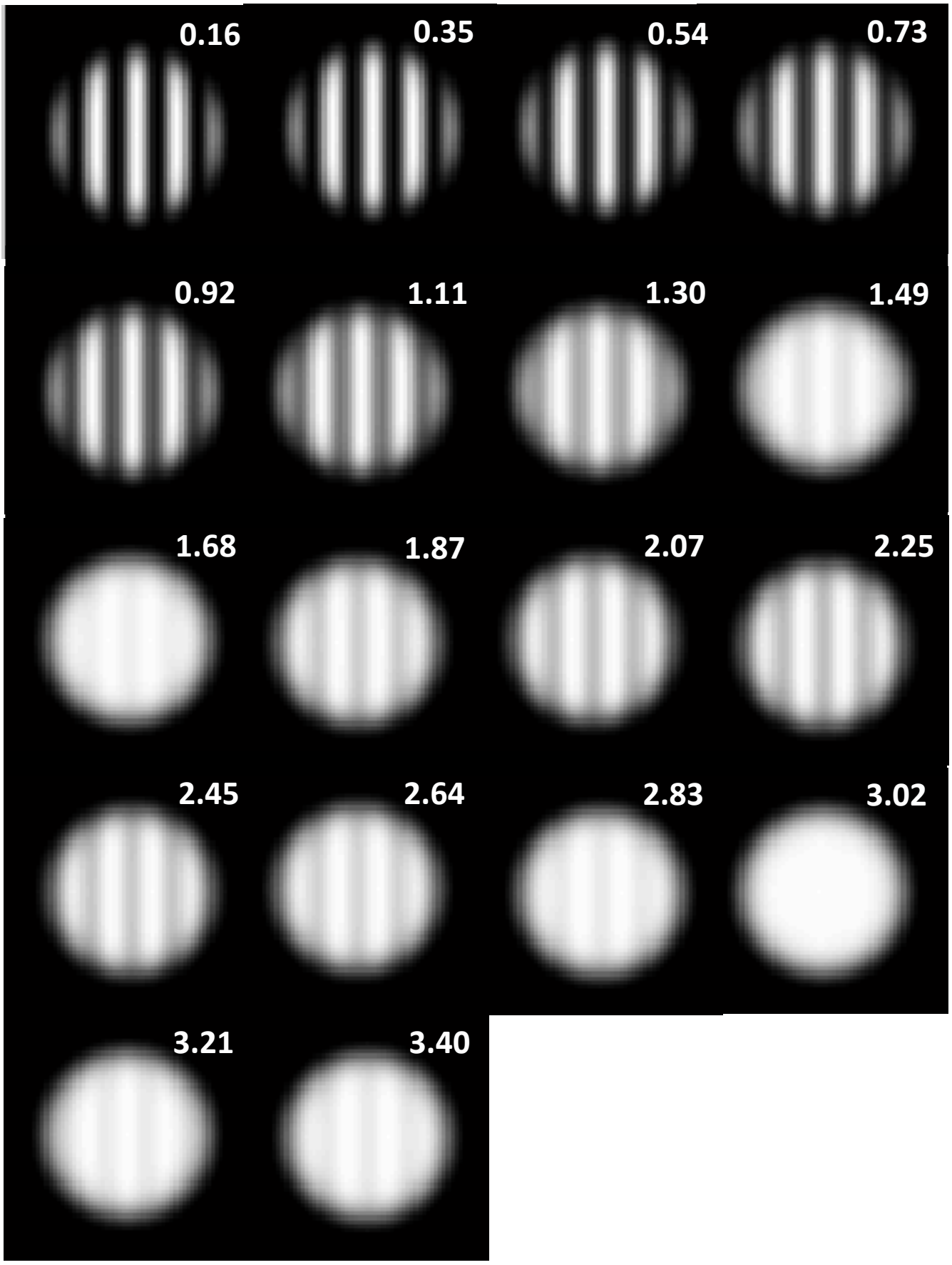
d)

(4p)

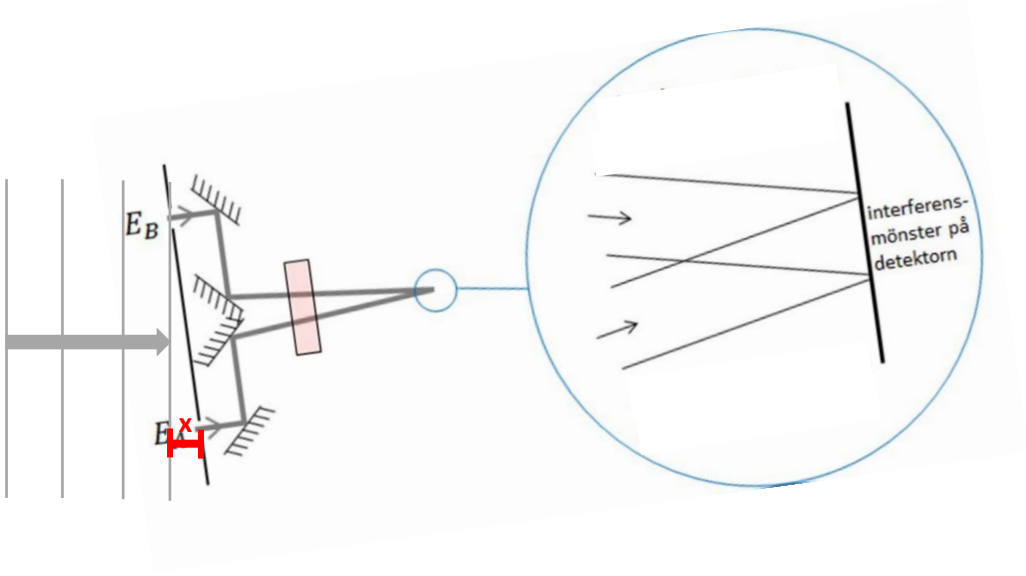
e) Vad händer med interferensmönstret i a) om vi lägger på en fas på π för fältet som går in i arm B? (1p)

f) Om vi hade kunnat följa intensitetsvariationen i tiden i uppgift d), d.v.s. anta att vi har en otroligt snabb detektor-array, hur hade interferensmönstret då sett ut? (1p)

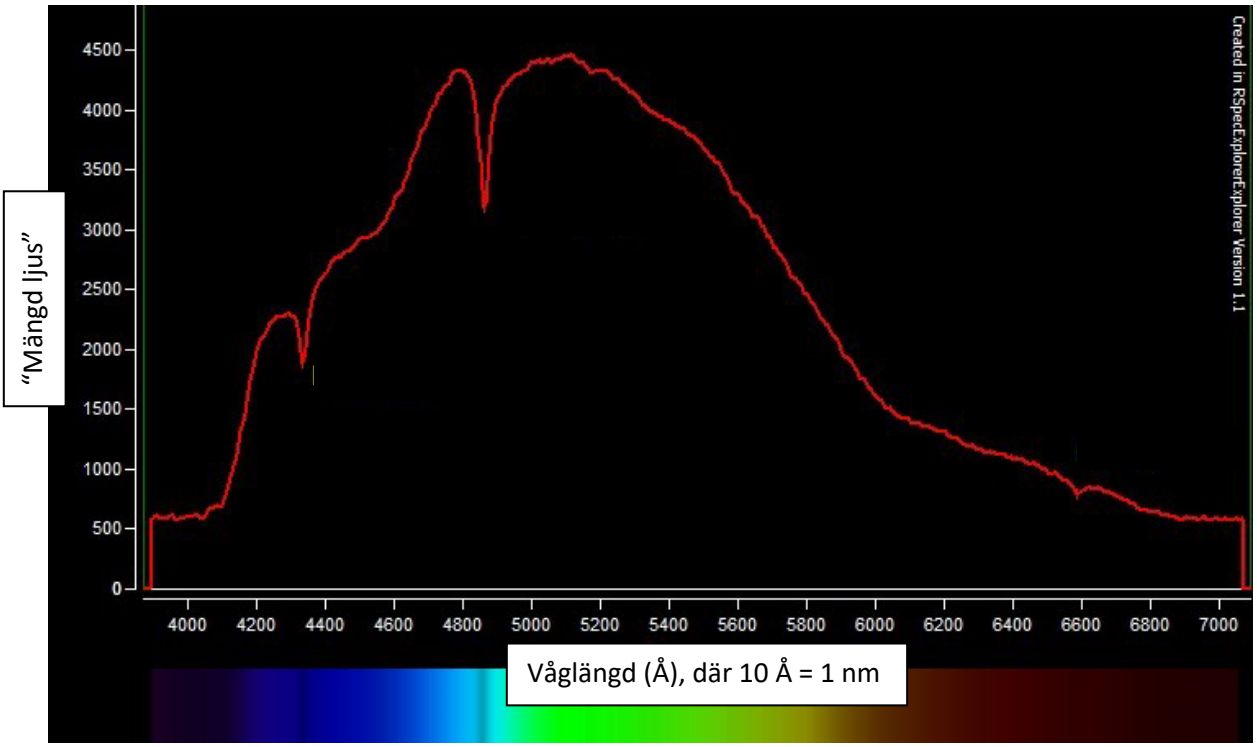
g) För att mäta upp den rumsliga koherenslängden så gör man mätningar av interferensmönstret för olika avstånd mellan A och B. Vad är den ungefärliga koherenslängden ifrån nedanstående mätning? Siffran i det övre högra hörnet av varje interferensbild indikerar avståndet mellan A och B mätt i meter. (2p)


0.16
0.35
0.54
0.73
0.92
1.11
1.30
1.49
1.68
1.87
2.07
2.25
2.45
2.64
2.83
3.02
3.21
3.40

h) En icke-perfekt upplinjering av interferometern, se figur nedan, leder till att de plana vågorna infaller snett mot ingång A och B och en fasfront träffar därmed inte A och B samtidigt. Sträckan x i figuren får inte vara för stor (d.v.s. interferometern måste peka ganska exakt rakt mot stjärnan) för då leder detta till utsuddning av interferensmönstret på detektor-arrayen. Varför försvinner interferensmönstret (suddas ut) när x är för stort? Ge en storleksuppskattning på hur stor sträckan, x, maximalt får vara för att man ska få ett interferensmönster på detektorarrayen. Information som kan vara till nytta, eller inte, följer nedan. Notera att denna stjärna inte behöver vara den samma som den som gav upphov till interferensmönstren i deluppgift g). (3p)



Sjtärnans spektrum

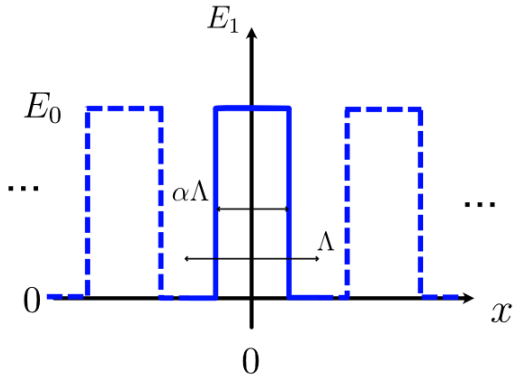


Stjärnan befinner sig på ett avstånd av 0.64 ljusår (1 ljusår = $9.5 \cdot 10^{15}$ m) ifrån jorden och dess diameter är 1.7 x solens diameter (solens diameter = $1.4 \cdot 10^{6}$ km).

4. Härled gitterekvationen med HFM (12p)

Kursens första tumregel lyder *"Fjärrfältet av ett fält E är dess fouriertransform"*. Efter att ha pluggat både Optik och Fouriermatte känner studenten Liam sig lite kaxig och bestämmer sig därmed för att försöka härleda gitterekvationen genom att använda propagationsmetoderna han lärt sig i kursen.

Han börjar med att undersöka ett amplitudsmodulerande gitter med period Λ och duty-cycle bestämd av parametern $\alpha \in (0,1)$. Då infallsfältet är plant med fältstyrka E_0 ser fältet direkt efter gittret (E_1) ut på följande vis:



Med sina kunskaper från Fourieranalysen vet Liam nu att han kan utveckla denna funktion på följande sätt:

$$E_1(x) = E_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi\alpha)}{m} \cos\left(\frac{2\pi m x}{\Lambda} \right) \right]. \quad (1)$$

Detta uttryck tycker Liam om, för att han kommer ihåg att det är enkelt att fouriertransformera konstanter och cosinufunktioner!

Slutligen vill Liam propagera detta fält som antas ha våglängd λ till fjärrfältet som sker efter en sträcka *L*. Propagationsavstånd *L* brukas kunna ses som stora, så Liam antar det och använder HFM under fraunhoferapproximationen för att komma fram till uttrycket för fjärrfältet (E_2):

$$E_2(x) = \frac{E_0}{C} \left[\pi\delta(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi\alpha)}{m} \left(\delta\left(x + Lm\lambda/\Lambda\right) + \delta\left(x - Lm\lambda/\Lambda\right) \right) \right]. \quad (2)$$

Här är $\delta(x)$ är deltafunktioner och *C* är en förfaktor som han inte bryr sig om i detta skede.

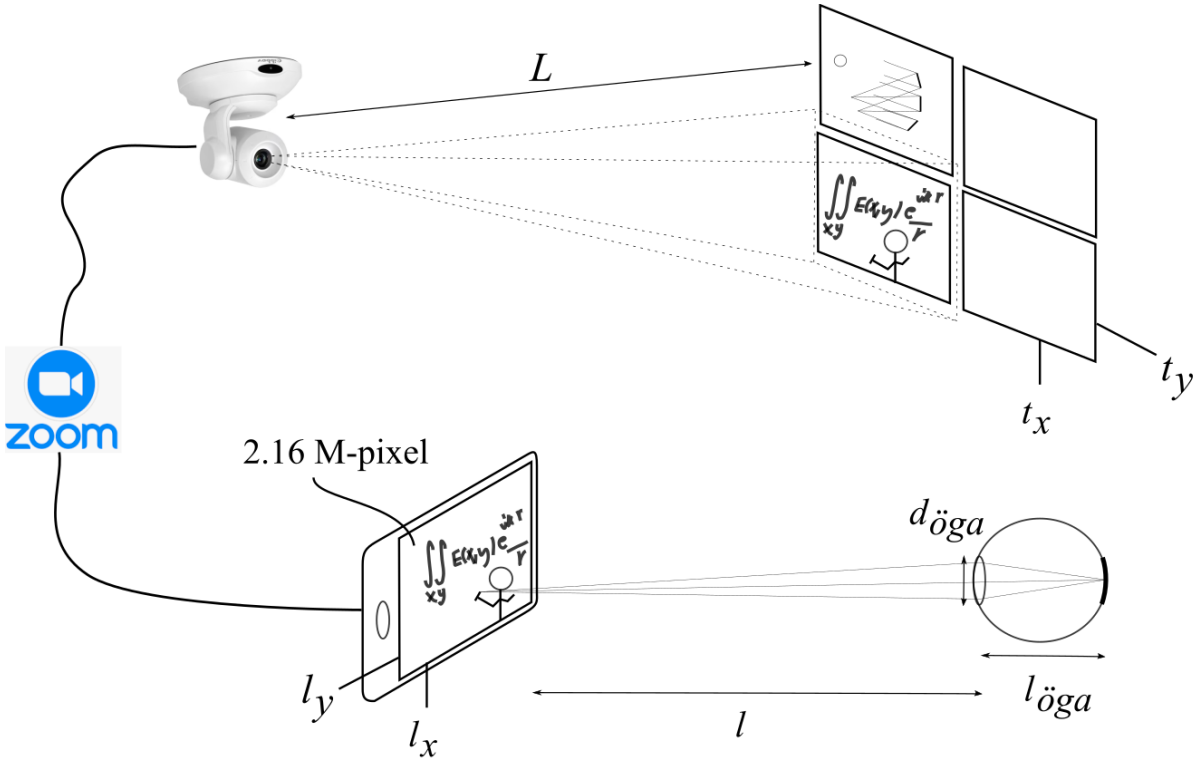
a) Antag att gittret har 50% duty-cycle ($\alpha = 0.5$). Plotta ett kvalitativt diagram av amplituden av Liams beräknade fjärrfält där du inkluderar diffraktionsordningar upp till $m = 3$. Vilka ordningar släcks ut med detta val av α? (3p)

b) Med hjälp av ekvation (2) ovan, härled ett uttryck för $\sin(\theta_m)$ där θ_m är diffraktionsvinklarna. Jämför sedan med gitterekvationen. Stämmer de överens? Om inte, varför? Under vilka förhållanden är de ekvivalenta? (6p)

c) Genom att studera uttrycken (1) och (2) inser Liam att ett gitter som endast är amplitudsmodulerande alltid har en 0:te ordningens diffraktionsordning. Varför? Ge ett exempel på ett fält E_1 som inte hade genererat en 0:te ordningens diffraktion och hur man kan uppnå ett sådant fält. (3p)

5. Zoom (15p)

Det är pandemi och du sitter för närvarande och deltar på en online-räkneövning i optik via Zoom. Av onämnda skäl var du tvungen att koppla upp dig på din smartphone för att följa räkneövningen som hålls i den numera hybridanpassade föreläsningssalen FB! Situationen är som i nedan bild:



En PTZ-kamera med inställbar optisk zoom avbildar räkneövningsledare + svarta tavlor på en CMOS pixel array där intensiteten samplas och digitaliseras. Därefter transmitteras information om den digitala bilden över internet till alla deltagare via Zoom. Därefter visas bilden i din smartphone som du observerar på ett avstånd där du kan se så bra som möjligt som ändå är någorlunda bekvämt.

Flera aspekter av situationen kommer spela in i hur väl du kommer att kunna se vad räkneövningsledaren skriver på tavlan. Du kan anta paraxiell propagation.

a) Din smartphone mäter $l_x = 15$ cm i höjd och $l_y = 6.5$ cm i bredd med en 2.16 M-pixel-display. I avseendet att bättre kunna se vad som visas på din smartphone, är det någon vits att ha fler pixlar i dess display för den givna storleken? Anta att ögats längd $l_{öga}$ = 2 cm, ögats linsöppning $d_{öga}$ = 4 mm, och att det kortaste avståndet du kan se skarpt på är 15 cm. (2p)

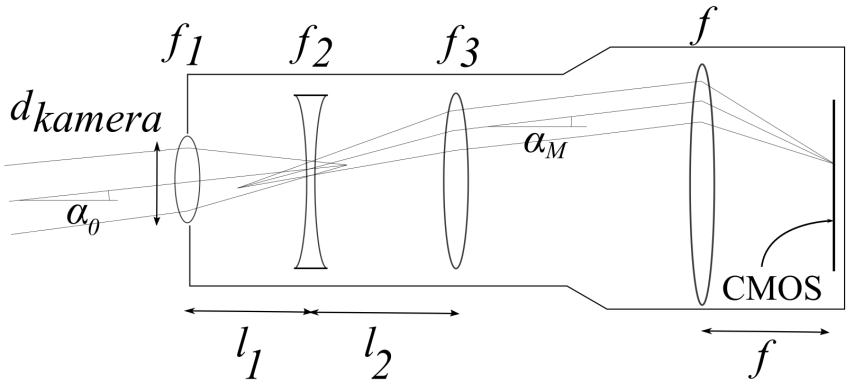
b) Hur stor bör texten $\iint_{x,y} E(x,y)\frac{e^{jkr}}{r}dxdy$ på displayen vara för att du skall kunna urskilja den? Redogör för hur du bedömer detta. (tips: bestäm hur liten den minsta bokstaven får vara innan du har svårigheter att urskilja den) (2p)

PTZ-kameran består av det afokala zoom-objektiv (linser 1-3) i bilden nedan (med $f_3 = f_1,\ f_2 = -f_1/4,\ d_{kamera} = 1$ cm), vars linser kan förflyttas i relation till varandra för att dynamiskt ändra vinkelförstoringen $M = -\frac{\alpha_M}{\alpha_0}$. Alltså, före lins f_1 och mellan lins f_3 och lins f är strålarna från tavlan parallella. För en given förstoring M gäller följande relationer:

$$l_1 = f_1 + f_2 + \frac{f_1 f_2}{f_3 M}$$

$$l_2 = f_3 + f_2 + \frac{f_3 f_2 M}{f_1}$$

Slutligen används en fokuserande lins ($f = 2$ cm) till att skapa avbildningen på en CMOS-detektor-array, vars höjd är 5 mm. Den digitala bilden som samplas i detektorn består av 1920 x 1080 (bredd x höjd) pixlar. Tavlans storlek är $t_x = 3$ m, $t_y = 1.5$ m.



c) Räkneövningsledaren har ställt in zoomen på PTZ-kameran precis så att en enda tavlas höjd får plats i bilden. Kameran sitter på ett avstånd $L = 12$ m från tavlorna. Bedöm storleken på den minsta detaljen på tavlan som kan urskiljas i den digitala bilden kameran skapar (alltså minsta detaljen i objektplanet). (6p)

d) Baserat på dina resonemang i de tidigare deluppgifterna, hur stort bör $\iint_{x,y} E(x,y)\frac{e^{jkr}}{r}dxdy$ skrivas på tavlan för att du skall kunna se vad det står på bilden som visas i din smarphone? (Antag att den digitala bilden kameran skapar är densamma som den som visas på din smartphone-display). (3p)

e) Helst vill räkneövningsledaren få med så många uttryck som möjligt samtidigt i bild för att studenterna enklare skall kunna följa lösningsgången. Hade situationen varit bättre om istället räkneövningsledaren ställt in zoomen så att två tavlor (i vertikalled) visas i bild samtidigt? (1p)

f) När du går in i inställningarna i zoom-appen på din telefon ser du att upplösningen är begränsad till som mest 720p. Ursprungsbildens upplösning på 1080p har alltså blivit reducerad via zoom-appens streaming-tjänst! Vad är den begränsande komponenten i det totala systemet nu? Skulle du nu rekommendera räkneövningsledaren att visa två eller enbart en tavla i bild samtidigt? (1p)

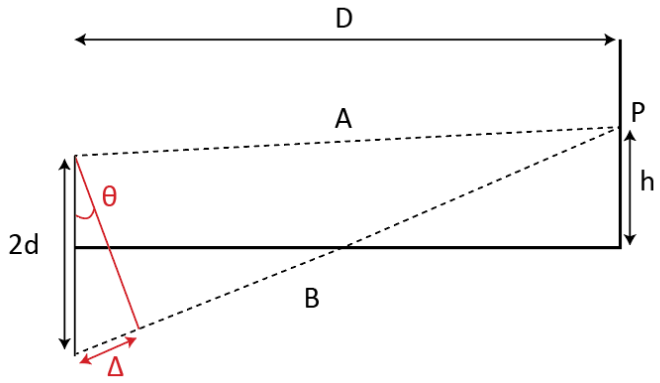
Lösningsförslag tenta i Optik FFY091 30:e maj 2023

1. Spegel, spegel på väggen där

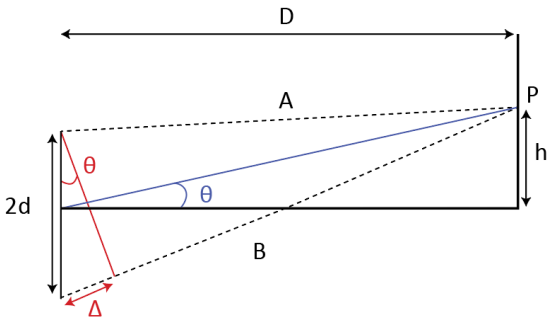
a) Fasen som en strålarna har lyckats ackumulera när de når detektorn, P, får vi genom propagationslängden multiplicerat med storleken av ljuskällans vågvektor, $\varphi = \mathrm{kl}$. Fasskillnanden vid detektorn kommer alltså att vara skillnaden i propagationslängd för strålgångarna multiplicerat med vågvektorn

$$\varphi_b - \varphi_a = \mathrm{k}(l_b - l_a) = \frac{2\pi n}{\lambda}\Delta\,.$$

Eftersom vi har våglängd och brytningsindex så behöver vi bara hitta längdskillnaden Δ. Vi kan ”fälla” ut den reflekterade strålen, B.



Längdskillanden är alltså $\Delta = 2\mathrm{d}\sin\theta$. Det sista vi behöver göra är alltså att uttrycka, θ, med den givna geometrin, vilket vi kan göra genom att konstruera en till triangel mellan spegeln och detektorn, P.



$$\tan\theta = \frac{h}{D}$$

Eftersom vi antar paraxiella strålar kan vi förenkla uttrycken

$$\tan\theta \approx \theta = \frac{h}{D}$$

$$\Delta = 2\mathrm{d}\sin\theta \approx 2d\theta$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{2dh}{D}.$$

Sista detaljen vi behöver lägga till är att strålen som reflekteras i spegeln kommer att plocka upp π extra fas från reflektionen i spegeln. Totalt blir alltså fasskillnaden vid detektorn, P:

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{2\pi n}{\lambda}\frac{2dh}{D} + \pi = \frac{4\pi ndh}{\lambda D} + \pi.$$

b) Vi kommer att ha ett maximum då vi har konstruktiv interferens vid detektorn. Vilket fås när strålarna är i fas med varandra

$$\varphi_b - \varphi_a = 2\pi m.$$

Om vi stoppar in det i uttrycket från uppgift a och löser för h

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{4\pi ndh}{\lambda D} + \pi = 2\pi m \rightarrow h = \frac{\lambda D}{2dn}(m - \tfrac{1}{2}).$$

Interferens-maximumet närmst spegeln får vi alltså för $m = 1$

$$h_{m=1} = \frac{\lambda D}{4dn} = 9.495 \cdot 10^{-5} \approx 95\ \mu m$$

2. Diffraktionsförluster i lasrar

a) Generellt: för att ett laserfält ska byggas upp måste det propagerande fältet i kaviteten repetera sig själv efter varje rund-tur. Detta innebär att förlusterna som fältet upplever efter en rund-tur i kaviteten måste kompenseras av ”gainet”, dvs den stimulerade emissionen från gain-materialet in i den propagerande moden. Dessutom måste kavitetslängden designas så att fasen på fältet repeteras efter varje rund-tur för att undvika destruktiv interferens, annars byggs inget startfält upp! Det sistnämnda har enbart nämnts flyktigt under labb D. Det räcker med att ange en sak.

b) Med de två Gaussiska strålprofilerna, $E_1(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)/\sqrt{2\pi a^2}$ och $E_2(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)/\sqrt{2\pi b^2}$ kan vi beräkna diffraktionsförlusterna

$$\eta = 1 - \frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} E_1(r)E_2(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} |E_1(r)|^2 r\, dr\, d\theta} = 1 - \frac{2\pi\int_{r=0}^{\infty} E_1(r)E_2(r)\, r\, dr}{2\pi\int_{r=0}^{\infty} |E_1(r)|^2 r\, dr}$$

Uttrycket i täljaren beräknas:

$$2\pi\int_{r=0}^{\infty} E_1(r)E_2(r)\, r\, dr = \frac{2\pi}{2\pi ab}\int_{r=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right) r\, dr =$$

$$\frac{1}{ab}\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)/\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{1}{ab}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{ab}{a^2+b^2}$$

Uttrycket i nämnaren beräknas:

$$2\pi\int_{r=0}^{\infty}|E_1(r)|^2 r\, dr = \frac{2\pi}{2\pi a^2}\int_{r=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) r\, dr = \frac{1}{a^2}\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)/\left(\frac{2}{a^2}\right)\right]_{r=0}^{\infty} = \frac{1}{a^2}\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Sätter vi in dessa två uttryck i uttrycket för diffraktionsförlusterna får vi

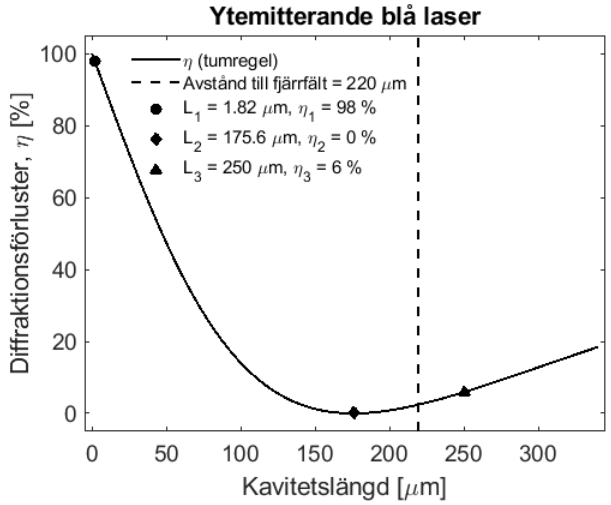
$$\eta = 1 - \frac{2\pi \int_{r=0}^{\infty} E_1(r)E_2(r)\, r\, dr}{2\pi \int_{r=0}^{\infty} |E_1(r)|^2 r\, dr} = 1 - \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$$

c) Det är förstås tumregeln för minsta spotsize! Radien, b, på den Gaussiska strålen kan uttryckas i termer av den initiala strålradien, a:

$$2b = konstant * \frac{\lambda}{2a} 2L \rightarrow b = \ konstant * \frac{\lambda}{2a} L$$

Notera att jag använder 2L ovan eftersom strålen propagerar fram-och-tillbaka genom kaviteten under en rund-tur!

d) I grafen nedan visas de beräknade diffraktionsförlusterna. Usssch hh, så här tänkte jag inte alls att



grafen borde se ut! Vår magkänsla säger oss att diffraktionsförlusterna borde öka när kavitetslängden ökar eftersom strålen borde breda ut sig mer och minska överlappet med startfältet. Man kanske börjar undra om vi ens kan använda oss av tumregeln för minsta spotsize för små kaviteter. Tumregeln anger ju hur spotsizen ändras i fjärrfältet! Alternativt, antar att alla HF-källorna i startfältet är perfekt fokuserade. Men detta kan vi ju knappast anta eftersom vi inte har någon lins i kaviteten som fokuserar strålen! Ett annat tecken på att kurvan verkar ”artificiell” är att funktionen

$$\eta = \ 1 - \frac{2ab}{a^2+b^2} = 1 - \frac{C\lambda L}{a^2 + (C\lambda L/(2a))^2}$$

har ett nollställe för L ≠ 0! Här är C-konstanten i tumregeln som jag antar är C=1 i grafen ovan. Det låter tokigt att man kan öka kavitetslängden, och helt plötsligt så har man ett perfekt överlapp mellan den initiala strålen och strålen efter propagation! För att hitta nollstället definierar jag parametern $z = \ a^2/(C\lambda L)$, vilket låter oss skriva om ovan uttryck (notera att $\lambda=\lambda_0/n$):

$$\eta = 1 - \frac{1}{\frac{a^2}{C\lambda L} + \frac{C\lambda L}{4a^2}} = 1 - \frac{4z}{4z^2+1}$$

Nollstället kan sedan beräknas:

$$\frac{d\eta}{dz} = 0 - 4\left(\frac{1}{4z^2+1} - \frac{8z^2}{(4z^2+1)^2}\right) = 0 \rightarrow (4z^2+1) - 8z^2 = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2} = \frac{a^2}{C\lambda L} \rightarrow L = \ \frac{2a^2}{C\lambda} = 175.6\ \mu m \rightarrow \ \eta(L = 175.6\ \mu m) = 0!!!$$

e) En annan tumregel lyder: ”Fjärrfältet är fouriertransformen av E_1”. Den erhålls genom att betrakta HFM-integralen

$$E_2(u,v) = \int_x \int_y E_1(x,y) exp\left(jk\frac{x^2+y^2}{2(2L)}\right) exp\left(-jk\frac{xu+yv}{(2L)}\right) dxdy$$

Om L är så stor att $exp\left(jk\frac{x^2+y^2}{2(2L)}\right) \approx 1$ blir $E_2(u,v)$ helt enkelt fouriertransformen av $E_1(x,y)$.
Villkoret för att vara i fjärrfält beror på hur stor fasskilland, δ, man kan tillåta:

$$exp\left(jk\frac{x^2+y^2}{2(2L)}\right) = exp\left(jk\frac{a^2}{2(2L)}\right) \approx 1 \approx \exp(j\delta)$$

Eftersom x och y anger utbredningen i startfältet, så fås den ”maximala” fasen då radien $x^2+y^2 = a^2$ (=radiella utbredningen av strålen i startplanet). Vi kan välja något godtyckligt δ, som är mycket mindre än 2π (2π är ju den största möjliga fasen). I kursen har vi ofta antagit att δ < 2π/10, så om

$$k\frac{a^2}{2(2L)} < \frac{2\pi}{10} \rightarrow L > \; k\frac{a^2}{4(2\pi/10)} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}\frac{a^2}{4(2\pi/10)} = 2.5n\frac{a^2}{\lambda_0}$$

så kan vi använda oss av tumregeln för att hitta stråldiametern efter propagation. För den blå ytemitterande laserns i uppgift d) får vi att fjärrfältet nås då

$$L \approx 2.5n\frac{a^2}{\lambda_0} = 220\ um$$

Vid denna kavitetslängd (och för längre kaviteter) ser vi ur grafen i d) att diffraktionsförlusterna beter sig mer rimligt, dvs η ökar då L ökar (nästan linjärt)! Vi inser också att vi inte kan uppskatta diffraktionsförlusterna i realistiska ytemitterande lasrar som har en kavitetslängd på ≈ 1.8 um (ofta kortare)… Man kan dock få approximationer för strålbredden som fungerar bättre för små kaviteter genom att tillämpa Fresnelapproximationen, vilket resulterar i (för en Gaussisk stråle)

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 L^2}{\pi^2 a^4}}$$

Detta kan man läsa mer om i masterkursen ”Lasers & Photonics”.

f) Vi kollar om det är ok att använda tumregeln med hjälp av uttrycket i e), dvs ifall vi är i fjärrfältet:

$$L > \frac{2\pi n}{\lambda_0}\frac{a^2}{4(2\pi/10)} = 0.25\ m$$

Här är termen 2π/10 en fasskilland vi tycker är ”liten”, se e). Så vi kan med hyfsat gott samvete använda oss av tumregeln för fältets utbredning när det propagerar genom HeNe-lasern med en kavitetslängd på 0.3 m.
Diffraktionsförlusterna beräknas med uttrycket från b) (se figur nedan):

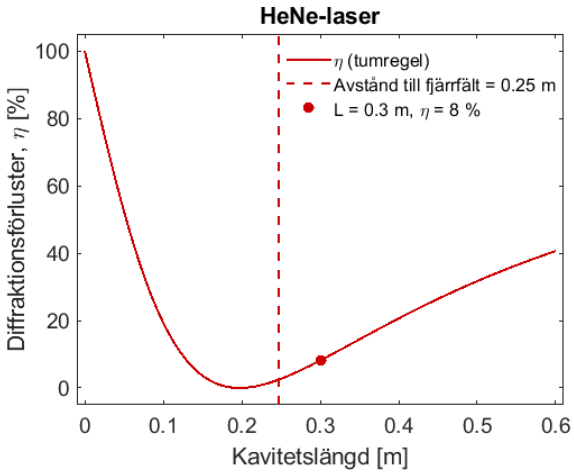
$$\eta = 1 - \frac{2ab}{a^2+b^2} = 68\ \%$$

där strålbredden efter propagation ges av tumregeln:

$$b = konstant * \frac{\lambda}{2a}L \approx \frac{\lambda}{2a}L$$

I lasrar vill man ofta hålla förlusterna så låga som möjligt. I t.ex. ytemitterande lasrar behöver man ofta ha speglar som reflekterar mer än 99 % av ljuset! Så när fältet färdas en rund-tur i kaviteten upplever det mindre än 2 % förluster p.g.a. speglarna! Sen finns det också absorptionsrelaterade förluster. Att då ha stora diffraktionsförluster på 8 % är inget önskvärt! Så hur undviker man så höga diffraktionsförluster i HeNe-lasrar? Man använder inte plana speglar! För långa kaviteter använder man istället kurvade speglar (se figuren för HeNe-lasern i uppgiftsformuleringen) som fungerar som

linser och fokuserar ljuset! På så sätt undviker man att ljuset sprids onödigt mycket vid propagation genom den mycket långa kaviteten.



3. Koherens – hänger fälten ihop och hur? (8p)

a) E_A och E_B har ett fixt fasförhållande (de är koherenta) och är i fas med varandra vilket leder till konstruktiv interferens i mitten av interferensmönstret dit vägskillnaden är den samma för ljus ifrån A respektive B. (1p)

b) E_A och E_B har ett fixt fasförhållande (de är koherenta) och är ur fas med varandra (fasskillnad = **π**) vilket leder till destruktiv interferens i mitten av interferensmönstret dit vägskillnaden är den samma för ljus ifrån A respektive B. (1p)

c) E_A och E_B har ett fasförhållande som varierar något (men inte helt slumpartat) i tiden (de är partiellt koherenta) men har en preferens till att vara fas med varandra (konstruktiv interferens i mitten av mönstret). (1p)

d) E_A och E_B har ett slumpartat fasförhållande som varierar i tiden (de är inkoherenta). (1p)

e) Detta leder till att ljus som går samma sträcka ifrån A till skärm och ifrån B till skärm (till mitten av interferensmönstret) nu kommer att ha en fasskillnad på π och därmed vara ur fas med varandra (destruktiv interferens). Interferensmönstret blir då som i b) istället, d.v.s. med ett minimum i centrum av interferensmönstret. (1p)

f) Om vi fryser tiden vid ett visst ögonblick så får vi ett tydligt interferensmönster. Vid ett annat fryst tidsögonblick har vi ett interferensmönster igen, men förskjutet i förhållande till det första. Det vi mäter är en tidsmedelsvärdesbildning över många interferensmönster, dvs interferensmönstret blir helt utsuddat. (1p)

g) Första nollstället är mellan 1,49 och 1,68 m (ränderna tycks bli som suddigast där) så den spatiella koherenslängden är ca 1.6 m. De absolut suddigaste ränderna sker vid en separation av 3.01 m, p.g.a. att den separationen mellan A och B råkade hamna väldigt nära separation för vilken koherensen är noll, men detta är inte första nollstället). (2p)

h) Ur stjärnans spektrum fås $\Delta\lambda$ = 140 nm (läses av vid halva max av ljusmängd, dvs 570-430 nm). Koherenstiden $\tau_c = 1/\Delta\nu$

där $\Delta\nu = -c\,\Delta\lambda/\lambda^2 = 3e8*140nm/(510nm)^2$ = 161 THz

➔ $L_c = c^* \tau_c = 3e8/161e12 \approx 2e\text{-}6$ m = 2 µm d.v.s. väldigt litet! (3p)

Om man vill kontrollera svaret i g) kan man göra det med den andra informationen som ger den spatiella koherenslängden. Denna kan uppskattas ifrån tumregeln (här används den exakta faktorn 1.22 framför då stjärnan är som en cirkelskiva, men det är helt ok att bara använda den generella tumregeln också om du inte vill skryta med dina optikkunskaper).

koherenslängd $l_c = 1.22 \cdot \lambda L/D_1 = 1.22 \cdot 510$ nm $\cdot$ 1.7 soldiametrar$\cdot$ 0.64 ljusår = 1.59 m vilket verkar stämma med mätningen.

4. Härled gitterekvationen med HFM

Härled gitterekvationen med HFM (?)

a) Med en duty-cycle på 50% ($\alpha = 1/2$) får vi följande fjärrfält

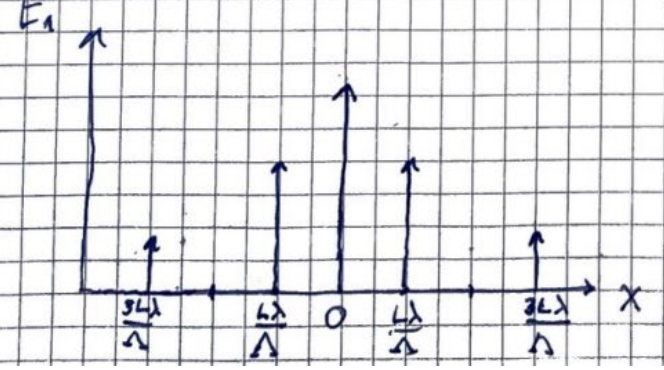
$$E_2(x) = \frac{E_0}{C}\left[\pi\,\delta(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi m/2)}{m} \times \left(\delta(x + Lm\lambda/\Lambda) + \delta(x - Lm\lambda/\Lambda)\right)\right]$$

Vår första observation är att fältet består av deltafunktioner symmetriskt utplacerade kring $x = 0$. Amplituderna är givna som

$$m = 0 \rightarrow \pi$$
$$m > 0 \rightarrow 2\frac{\sin(\pi m/2)}{m}$$

För diffraktionsordningar upp till $m = 3$ har vi alltså

m	Amplitud. (E_0/C)	
0	π	
1	2	
2	0	← utsläckning!
3	$2/3$	



Vi har att utsläckning sker för

$$\sin(m\pi/2) = 0$$

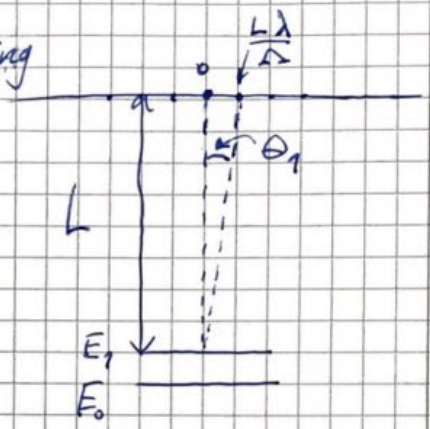
$$\Leftrightarrow m = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Alltså, jämna diffraktionsordningar släcks ut.

b) Ljuspunkt för diffraktionsordning m ligger på avstånd

$$d_m = \frac{mL\lambda}{\Lambda}$$

från 0:te ordningen.



$$\Rightarrow \tan\theta_m = \frac{m\lambda}{\Lambda}\frac{L}{L} = \frac{m\lambda}{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda/\Lambda}{\sqrt{1+\left(m\lambda/\Lambda\right)^2}} \quad \text{för } \theta_m \in (0, \pi/2) \quad (*)$$

Gitterekvationen: $\Lambda \sin\theta_m = m\lambda$. Inte samma!

(och ligam)

Om $\lambda/\Lambda << 1 \Rightarrow \sqrt{1+(m\lambda/\Lambda)^2} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow (*) \longrightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{\Lambda}$ Ok!

Vi har alltså inte härlett gitterekvationen korrekt. Detta är på grund av Fraunhofer-approximationen vi gjorde för att härleda uttrycket för E_2! Kort sagt: Gäller endast för små vinklar

c) I ekvation (1) ser vi att det finns en konstant term

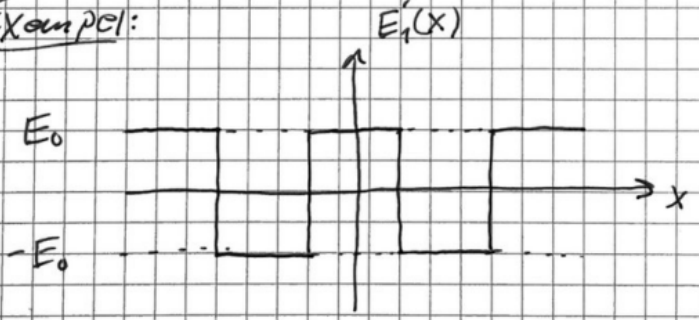
$$E_0/2$$

Fouriertransformen av denna term är proportionerlig mot $\delta(x)$ som utgör 0:te ordningens diffraktion i fjärrfältet.

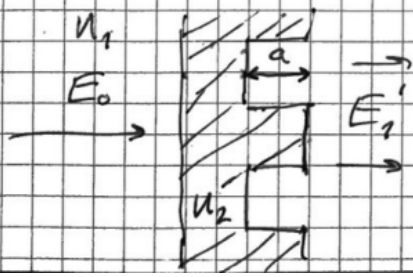
→ För att få bort 0:te ordningen måste alltså konstanttermen bort.

För att få bort konstanttermen så kan inte $E_1 > 0$ $\forall x$. Detta innebär att vi inte endast kan modulera amplituden för att uppnå utsläckt 0:a. Vi kräver alltså fasmodulering!

Exempel:



$E_1'(x)$ ovan saknar konstanttermer och därmed 0:te ordningens diffraktion. Detta kan uppnås med ett fasmodulerande gitter:



E_1' uppnås då

$$a(n_2 - n_1) = \frac{\lambda}{2}$$

5. Zoom

a) För att besvara frågan behöver vi ta reda på om det är displayens upplösning eller den optiska upplösningen som begränsar bildens skarphet. Pixelstorleken δ på displayen får vi som $\#_{pixlar} = \frac{l_x l_y}{\delta^2} \Longrightarrow \delta = \sqrt{\frac{l_x l_y}{\#_{pixlar}}} = 67\ \mu\text{m}$. Avståndet l som vi betraktar displayen från behöver vi bedöma själva. Ju närmre vi för ögat displayen desto skarpare blir bilden eftersom bilden av ett objekt på displayen växer medan PSF-en (minsta spot size) i ögat är lika stor. Kortaste avståndet jag kan skarpt se bilden i displayen bedömer jag som $l = 15$ cm innan saker blir suddigare igen vilket beror på att min ögonlins inte kan skapa kortare fokallängder. Storleken av en avbildad pixel på min näthinna får jag därmed som $d_{bild,pixel} = \delta \frac{l_{öga}}{l} \approx 9\ \mu$m, där jag antog ett värde $l_{öga} = 2$ cm. Storleken på ögats PSF (D_{spot}) får vi med tumregeln: $D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda l_{öga}}{d_{öga}} \approx 7\ \mu$m, där jag antog $d_{öga} = 4$ mm och $\lambda = 600$ nm. Vi ser att den optiska upplösningen på näthinnan är lite bättre än den effektiva upplösningen hos displayen, men det är gränsfall. Faktum är att ett avstånd på 15 cm inte är särskilt bekvämt, för att avslappnat titta på displayen föredrar jag nog 25-35 cm avstånd vilket skulle innebära att $d_{bild,pixel}$ halveras och vi är optiskt begränsade i vår upplösning. Dessutom, eftersom ljuset från displayen är bredbandigt (vitt/polykromatiskt) och mitt ögas brytningsindex våglängdsberoende, är min effektiva PSF förmodligen än större. Alltså finns ingen anledning till att ha fler pixlar på displayen och mobiltillverkaren kan nöja sig i att ha optimerat antalet pixlar!

b) Ett sätt att bedöma detta är helt enkelt att skriva en bokstav på pappret framför sig i mindre och mindre storlek tills man inte längre kan urskilja den. Ett annat sätt är att titta på texten i tenta-tesen och föra tesen längre ifrån sig tills ett avstånd $l_{otydlig}$ då texten blir otydlig. Man kan därifrån räkna ut bokstavens minsta storlek på avståndet l =15 cm via $\frac{l}{l_{otydlig}} \cdot textstorlek$. På närmsta avståndet $l = 15$ cm behöver bokstaven vara åtminstone 1 mm för att jag precis skall kunna se vad det är. Hela uttrycket är ungefär 5 gånger så hög som höjden för dess minsta bokstav. Alltså behöver texten vara minst ca 5 mm hög på displayen, gärna lite större om jag skall betrakta det från lite längre avstånd.

c) Liksom i a) behöver vi nu ta reda på om det är pixelstorleken i detektorn eller den optiska PSF-en som begränsar upplösningen. För att ta reda på hur stort ett objekt är på tavlan för att dess avbildning skall matcha upplösningen på detektorn behöver vi även veta förstoringen M, och för att ta reda på den optiska upplösningen måste vi hitta den begränsande aperturstorleken i systemet.

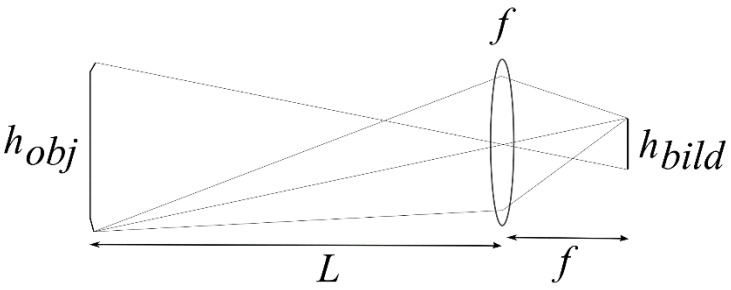
Digital upplösning:

Pixel-storleken får vi enkelt som $\delta_{kamera} = \frac{5\ mm}{1080} = 4.6\ \mu$m, vilken utgör den digitala upplösningen.

Förstoring:

För att hitta förstoringen M av det optiska systemet måste vi ta reda på hur stort område framme vid tavlorna som avbildas på CMOS-arrayen vid $M = -1$. I fallet $M = -1$ så har det

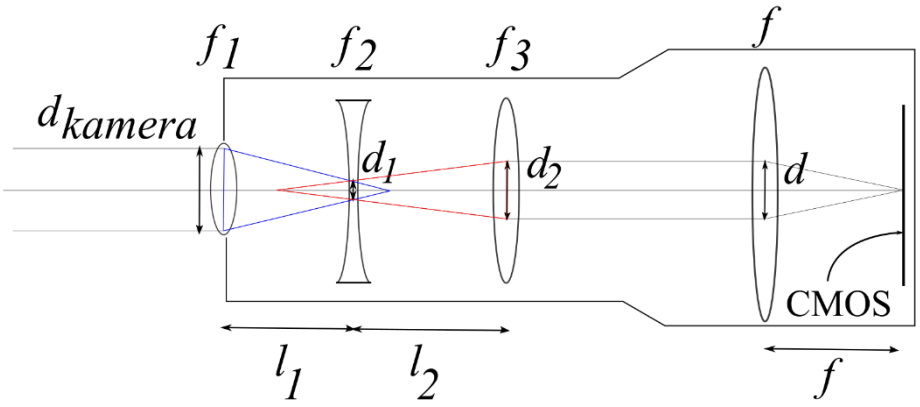
afokala zoom-systemet av linser 1-3 ingen inverkan på optiken och vårt system förenklas till



Varpå vi via likformighet har $h_{obj,tot}(M=-1)=\frac{L}{f}h_{detektor}=\frac{12\ m}{2\ cm}0.5\ cm=3$ m. Alltså vid $M=-1$ får 3 lodräta meter plats i bild, det motsvarar två tavlor, alltså måste förstoringen då enbart en tavla får plats i bild vara $M=-2$.

Effektiv aperturstorlek:

För att kunna använda tumregeln för mista spot-size och bestämma systemets optiska upplösning måste vi hitta utbredningen hos fältet (skapat av en punktkälla på tavlan) bakom den sista linsen f (minns att tumregeln enbart funkar vid propagation i homogent media). Alltså vi vill hitta d i bilden nedan:



Eftersom strålarna är parallella mellan lins f_3 och lins f har vi att $d=d_2$. Av samma skäl, att strålarna är parallella före och efter det afokala system, har vi att den horisontella utbdredningen på den blå och röda trianglen är f_1 respektive f_3. Storleken d_1 fås nu via likformighet i den blå triangeln som

$$d_1=\frac{f_1-l_1}{f_1}d_{kamera}$$

Och via den röda triangeln har vi på liknande sätt

$$d_2=\frac{f_3}{f_3-l_2}d_1$$

Med de givna relationerna:

$$f_1=f_3$$

$$l_1=f_1+f_2+\frac{f_1f_2}{f_3M}$$

$$l_2=f_3+f_2+\frac{f_3f_2M}{f_1}$$

får vi slutligen:

$$d_2 = \frac{f_3}{f_3 - l_2}\frac{f_1 - l_1}{f_1} d_{kamera} = \frac{1 + \frac{1}{M}}{1 + M} d_{kamera} = \frac{d_{kamera}}{M} \; (M \neq -1)$$

Härifrån kan vi använda tumregeln för minsta spot-size:

$D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda f}{d_{kamera}} |M| = |M| \cdot 2.9 \; \mu$m

För $M = -2$ har vi alltså en slutlig optisk upplösning 5.8 um, större än den digitala, alltså är vi optiskt begränsade i vår upplösning även här!

Minsta detaljen i detektorplanet vi kan urskilja är därmed ca 5.8 um. Dess ekvivalenta storlek på tavlan kan vi beräkna via det faktum att 1.5 lodräta meter nu avbildas på 5mm detektorarray. Alltså $h_{obj,D_{spot}} = \frac{1.5\ m}{5\ mm} 5.8 \; \mu$m = 1.8 mm. Minsta detaljen vi kan urskilja i den digitala bilden motsvarar alltås ca 2 mm på tavlan.

d) Här undrar vi om det nu är den optiska upplösningen hos ögat eller PTZ-kameran som kommer vara begränsande. Från a) hade vi att den optiska upplösningen på näthinnan var ca 10 um, det motsvarar en storlek $\frac{15\ cm}{2\ cm} \cdot 10 \; \mu$m =75 um på displayen l =21 cm bort. För att beräkna hur stor den minsta (ur detektorns perspektiv) urskiljbara detalj på tavlan blir på displayen måste vi komma ihåg att tavlans höjd på 1.5 m nu avbildas till 6.5 cm i displayen. Alltså blir denna detaljs storlek på displayen $\frac{6.5\ cm}{1.5\ m} \cdot 1.8$ mm = 76 um. Den spot size (punkt-blaffa) närvarande i den digitala bilden kommer alltså avbildas till något större/samma storlek på näthinnan än den spot-size-blaffa ditt eget öga generarar för $l < 21$ cm, alltså är det den optiska upplösningen hos kameran som är den begränsande upplösningen för $l < 21$ cm och tvärtom annars.

Från b) vet vi att på avståndet 15 cm (skarpast system) behövde uttrycket vara ca 5 mm högt för att vara läsbart. Det innebär att höjden på uttrycket behöver bestå av 5mm/52.5 um≈100 spot-sizes. Med denna logik och vetskapen om att det är den optiska upplösningen hos kameran som är begränsande fås, från svaret i c), att uttryckets storlek på tavlan måste vara minst 1.8 mm x 100=18 cm högt. För annat avstånd l följ samma lösningsgång där antingen kameran eller ditt öga är begränsande beroende på om $l < 21$ cm.

e) I denna situation har vi alltså $M = -1$ och därmed att $l_1 = l_2 = f_1$. Ljuset från lins 1 fokuseras alltså i lins 2 vilket innebär att ingen fasmodulering sker i denna lins, eftersom all energi är samlad i en punkt när ljuset propagerar genom linsen. Den röda och blå triangeln blir likformiga och $d_2 = d_{kamera}$ vilket innebär att $D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda f}{d_{kamera}} = 2.9 \; \mu$m. Den optiska upplösningen hos kameran har nu blivit hälften så stor. Alltså är det nu ditt ögas optiska upplösning som är begränsande (de digitala upplösningarna har ej ändrats). Minsta storleken på uttrycket som ögat kan se på displayen är 5 mm, vilket med $M = -1$ nu motsvarar en storlek $5\ mm \cdot \frac{3\ m}{6.5\ cm} = 23$ cm med $l = 15$ cm. Räkneövningsledaren behöver alltså skriva större här. Antalet uttryck som får plats i bild i de två olika fallen är alltså

1 tavla i bild: $\frac{1.5\ m}{18\ cm} = 8.3$ st, 2 tavlor i bild: $\frac{3\ m}{23\ cm} = 13$ st. Situationen blir alltså bättre i fallet $l < 21$ cm. I fallet $l > 21$ cm blir det ingen skillnad, lika många läsbara uttryck får plats oavsett 1 eller två tavlor.

f) Om den digitala upplösningen hos detektorn nu istället är 720p istället för 1080p fås den effektiva digitala upplösningen i detektorn som $\frac{1080}{720}\,\delta_{kamera} = 1.5\,\delta_{kamera} = 6.9\,\mu$m. Detta är större än den optiska upplösningen hos kameran i fallet $M = -2$ och alltså är nu Zoom-applikationens slakt av den digitala upplösningen den begränsande faktorn redan då och kommer vara det även i fallet då två tavlor visas. Alltså spelar det ingen roll om hen visar en eller två tavlor samtidigt, lika många läsbara uttryck får plats ändå!

Hade studenten haft en laptop istället för smartphone hade det ändå inte hjälpt situationen. Hade däremot upplösningen i Zoom varit 1080p så hade begränsningen av ögats optiska upplösning avhjälpts av den nu mycket större displayen och situationen hade varit bättre med två tavlor i bild.