Tentamen i Optik FFY091 - måndag 22:e augusti 2022, kl. 14:00-18:00

Jourhavande lärare **Lars Persson, tel. 0720-454454, finns på plats ca kl. 15 och 17** för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs inte så många ord!
- Gör egna rimliga antaganden och motivera dessa där det behövs.

Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).
Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.
På kurshemsidan publiceras lösningsförslag senast tisdag 23:e augusti.

Visning/uthämtning av tenta sker torsdag 15:e september kl. 13.00-14.00 på Åsa Haglunds kontor B437 i MC2-huset.

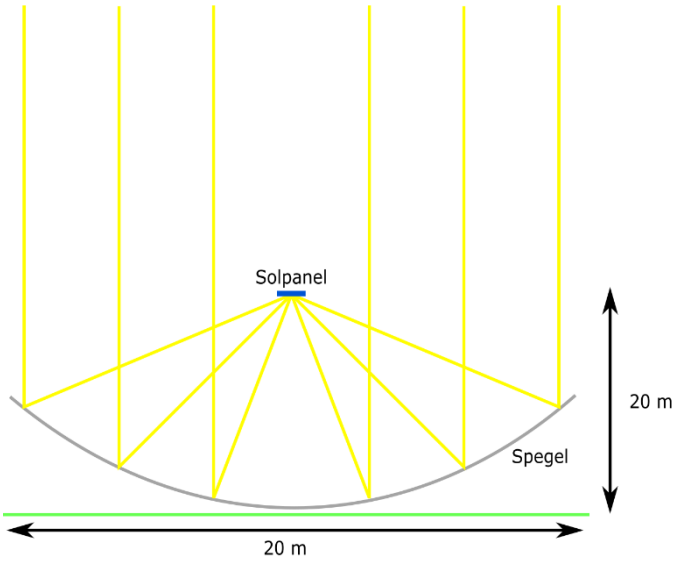
---

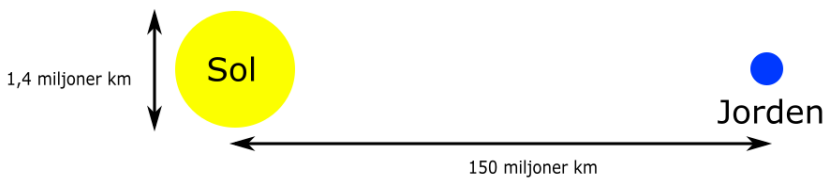
1. Solpaneler! (18p)

Jens äger en åker på skånska slätten som han planerar omvandla till en solenergi-park! Han har kollat upp priset på solpaneler som ligger runt 2600 kr/m^2. Jens är förstås intresserad av att hålla kostnaderna nere där det är möjligt och funderar på om han inte kan komma undan till lägre kostnad om man exempelvis använder speglar till att fokusera ned ljuset till en mindre yta och således inte behöva lika många kvadratmeter solpanel. Priset för spegel per m^2 ligger på runt 1000 kr.

a) I sin första koncept-idé ställer Jens upp följande uppställning:

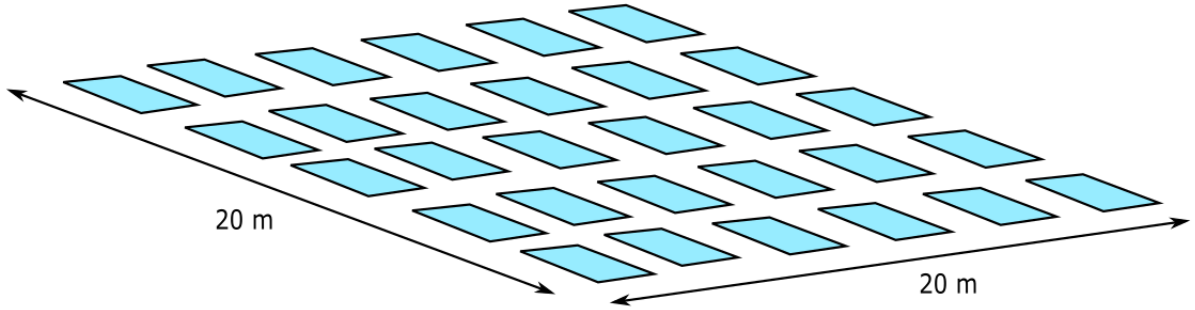
En stor parabolisk spegel fokuserar det inkommande solljuset på en mindre solpanel som är vänd mot spegeln. Under ideala förhållanden, hur stor solpanelsarea behövs för att ta tillvara på all solenergi som fångas upp av spegeln? Du kan försumma att solpanelen blockerar en del av det inkommande ljuset mot spegeln. Nämn 4 praktiska problem med det presenterade konceptet.



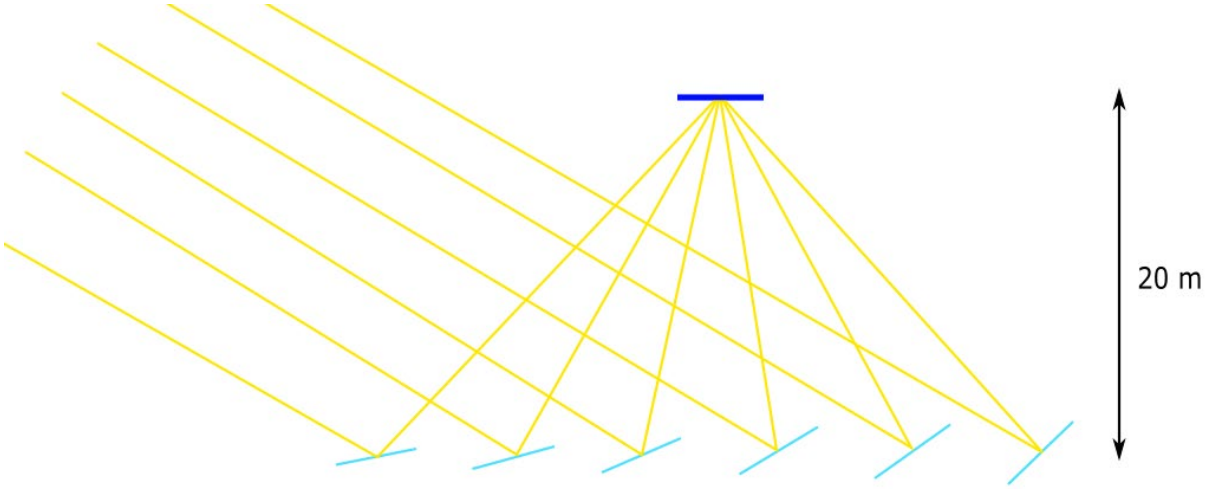


a. (8p)

b) Efter att ha hört om nedläggningen av en närliggande nöjespark köpte Jens upp samtliga speglar från dess spegelhus till ett billigt pris. Det var 30 speglar, alla platta av storleken 2x3 m^2. Jens monterar upp dem på riktbara plattformar så att varje enskild spegel kan vridas fritt med två frihetsgrader. De placeras i en matris enligt följande:

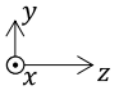


Under antagandet att varje spegel är orienterad så att den speglar solen till solpanelen (se nedan bild där solpanelen är vänd mot speglarna) hur stor behöver solpanelen vara i detta fall för att allt solljus som reflekteras i speglarna skall fångas upp av solpanelen? (7p)

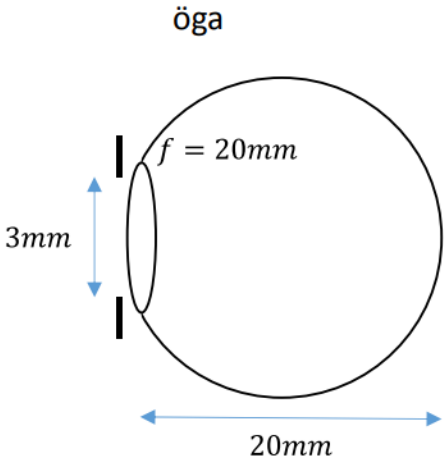


c) Efter att ha installerat alla speglar och en solpanel på 2x3 m^2 enligt ovan figur förbaskar sig Jens över kostnaden för det avancerade sol-trackingsystemet och de elektriska motorerna för varje spegel. Totalt har han bara sparat in några ynka tusenlappar gentemot sin bror Jöns som på sin åker valde att rakt av installera 30 st 2x3 m^2 solpaneler rätt på marken. Till råga på allt verkar Jöns anläggning producera mer energi än Jens! Soliga dagar är skillnaden i producerad kWh försumbar men under molniga dagar ser Jöns att hans anläggning inte ens producerar samma mängd wattimmar som **en** av Jöns paneler! Förklara varför. (Antag att molntäcket är homogent under en ”molnig” dag). (3p)

2. Fältstudie (12p)



$E(x, y, z)$



Ett öga (se ovan) med bästa möjliga synskärpa är inställt på långt avstånd och träffas då av ett koherent fält. Detta kan beskrivas på komplex form och för en specifik våglängd inom det synliga området (d.v.s. ljus) med en viss utbredelseriktning blir uttryckets

$$E(x, y, z) = E(y, z) = 1500000e^{j(3.1\cdot10^6 y + 1.1\cdot10^7 z + \pi/8)}\ V/m$$

(enligt kursens konvention) när det utbreder sig i luft framför ögat, där koordinaterna y och z ska anges i meter.

a) Ange vilken färg ljuset har. (3p)

Följande tre frågor gäller det belysta området på näthinnan. Ange

b) … formen (bedöm enbart, med några få ords motivering, om intensitetsfördelningen på näthinnan är gaussisk, bildar ett Airy-mönster, eller följer någon annan funktion som inte närmare behöver specificeras) (3p)
c) … ungefärliga storleken (längdskala) (3p)
d) … och (centrum) positionen. (3p)

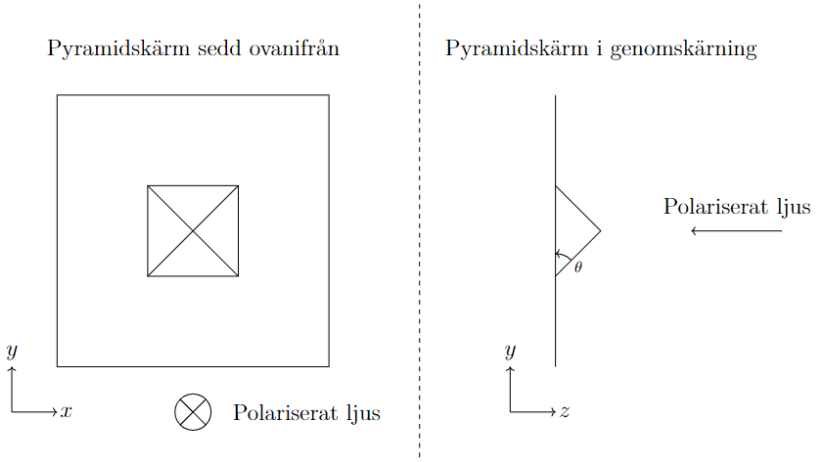
3. Diffraktion och gitter (12p)

I laboration D undersökte vi diffraktiva element och fick se att för gitter och även för små aperturer ger inte stråloptiken en adekvat beskrivning av ljusets propagation. Denna uppgift handlar om just denna typ av spridning.

a) Förklara med egna ord fenomenet diffraktion och nämn specifikt varför stråloptiken inte klarar av att beskriva de elementen vi undersökte i labben. Nämn åtminstone två fenomen som uppstår på grund av diffraktion. (4p)
b) Beskriv Huygens princip. (2p)
c) Beskriv gitterekvationen och nämn minst två saker som krävs av ett diffraktivt optiskt element för att det ska lyda gitterekvationen. (3p)
d) Vad är det som bestämmer intensiteten hos diffraktionsordningarna för ett gitter? Är det givet att intensiteten faller monotont när diffraktionsordningen ökar? Om inte förklara varför! (3p)

4. Polarisations-pyramiden (8p)

Vid labb P gjorde vi enklare polarisations-analys med hjälp av en ”pyramidskärm”. Vid laborationen så belyste vi pyramidskärmen med linjärpolariserat ljus och studerade hur sidorna på pyramiden reflekterade eller transmitterade ljuset när vi roterade axeln för polariseringen hos det infallande ljuset.



a) Vad heter fenomenet och förklara hur pyramidens olika sidor särskiljer polariseringen i det infallande ljuset? (3p)

b) Hur kommer det se ut på skärmen om vi belyser pyramiden med linjärpolariserat ljus, med fält längs x-axeln? (1p)

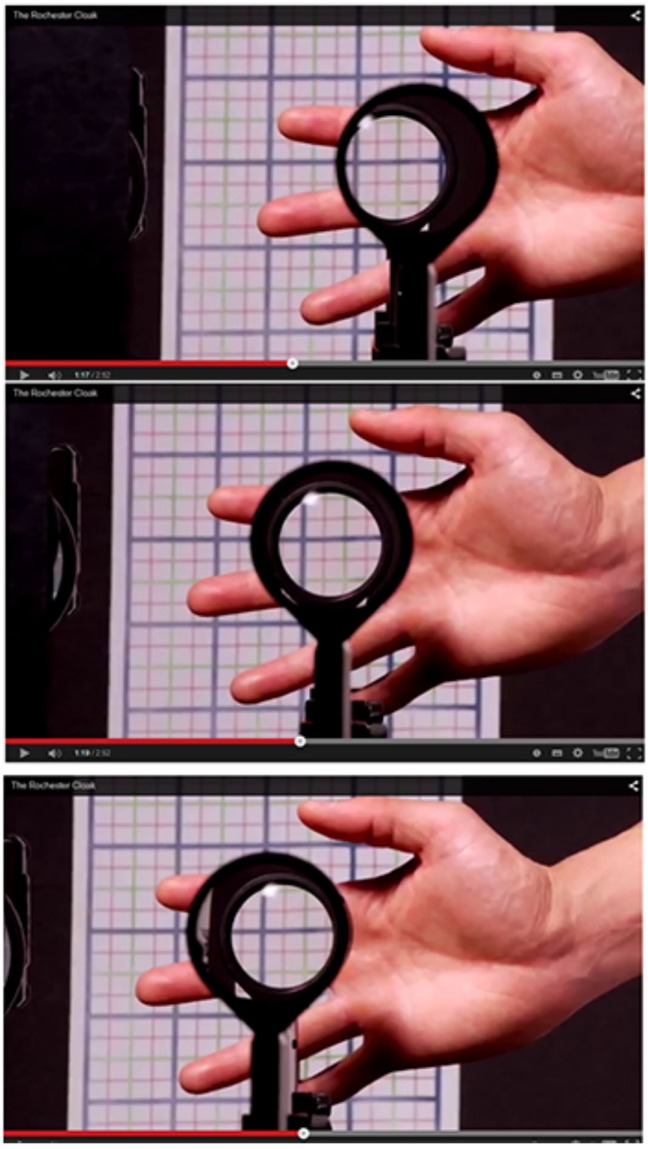
c) Vad ser vi på skärmen om polarisations-axeln på det infallande ljuset roteras med 45° grader? (1p)

d) Vad kommer att synas på skärmen om vi i stället belyser skärmen med cirkulärpolariserat ljus? Kan vi på något sätt utnyttja pyramidskärmen för att särskilja på cirkulärpolariserat och linjärpolariserat ljus? (3p)

5. Osynlighetsringen (10p)

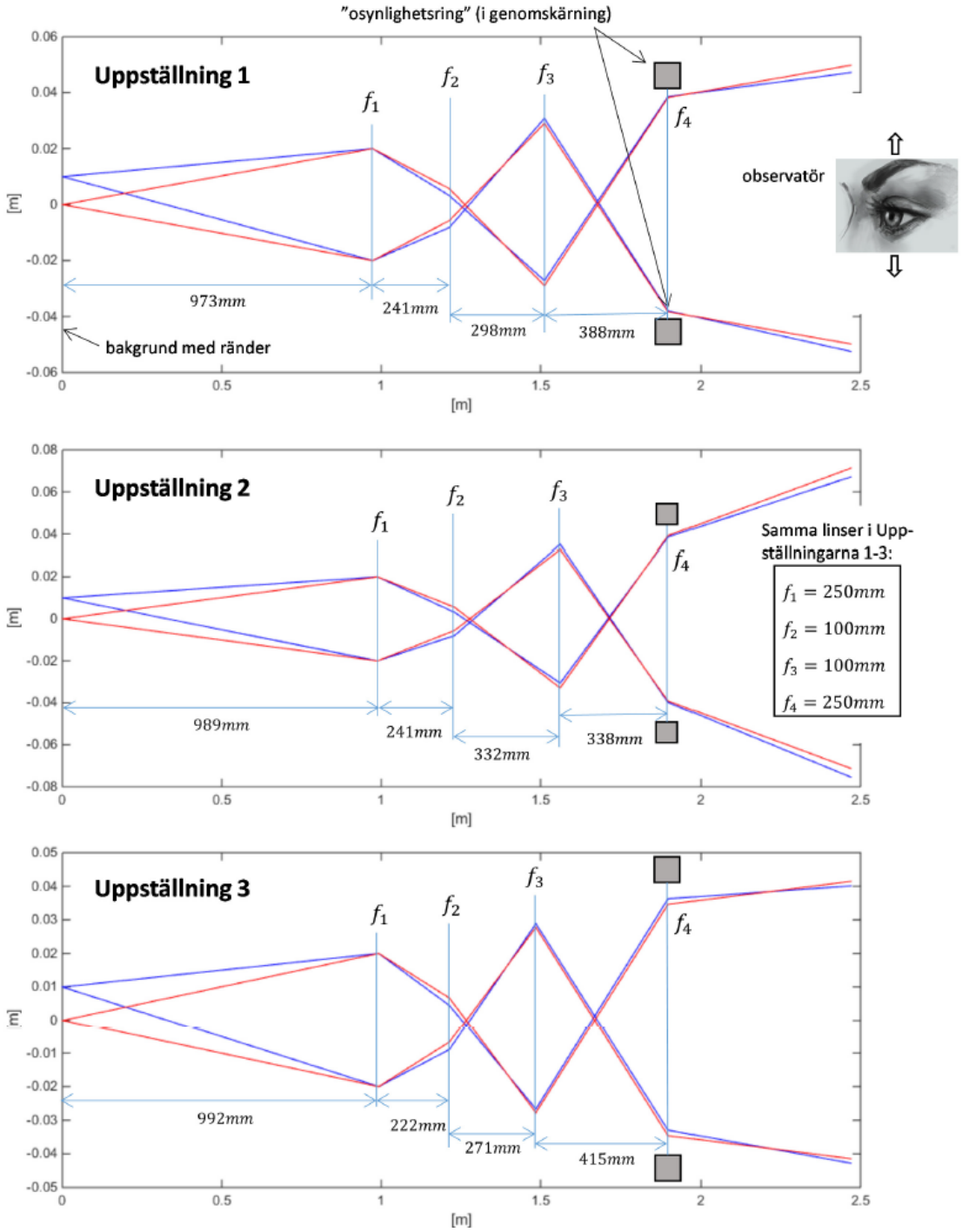
Harry Potter finns en osynlighetsmantel som gör en person osynlig när hen tar på sig den, eftersom ljuset från de föremål som finns bakom manteln bara går rakt genom denna. I samma anda har ett gäng (undersysselsatta?) forskare med hjälp av optik skapat en ”osynlighetsring”. Som vi ser av demonstrationen tycks den också funka genom att ljuset från bakgrunden – i detta fall en vägg med horisontella och vertikala linjer – tycks gå rakt igenom huvudet om detta betraktas genom osynlighetsringen.

Naturligtvis är detta bara en optisk bluff. I själva verket sitter det en lins i osynlighetsringen (fokallängd f_4 i strålgångsdiagrammen nedan), och dessutom ytterligare tre linser i linje mellan osynlighetsringen och bakgrunden. Dessas fokallängder och inbördes avstånd är dock mycket noga justerade för att observatören ska få den önskade illusionen av hur bakgrunden beter sig när den betraktas genom osynlighetsringen. Detta framgår av bildserien nedan, som visar hur observatören uppfattar situationen när hen rör sig sidledes mellan några närliggande positioner.



a) Varför särar personen på fingrarna när hen demonstrerar osynlighetsringens effekt i bildsekvensen ovan? (2p)

Strålgångsdiagrammen nedan visar korrekta och noggrant plottade matlabsimuleringar av strålgången från två punkter på bakgrunden genom tre olika uppställningar av de fyra linserna. Alla tre uppställningar använder samma linser, fokallängderna för dessa visas i tabellen vid Uppställning 2. Endast avståndet mellan dem samt avståndet till bakgrunden varierar lite mellan uppställningarna, som anges i figurerna.



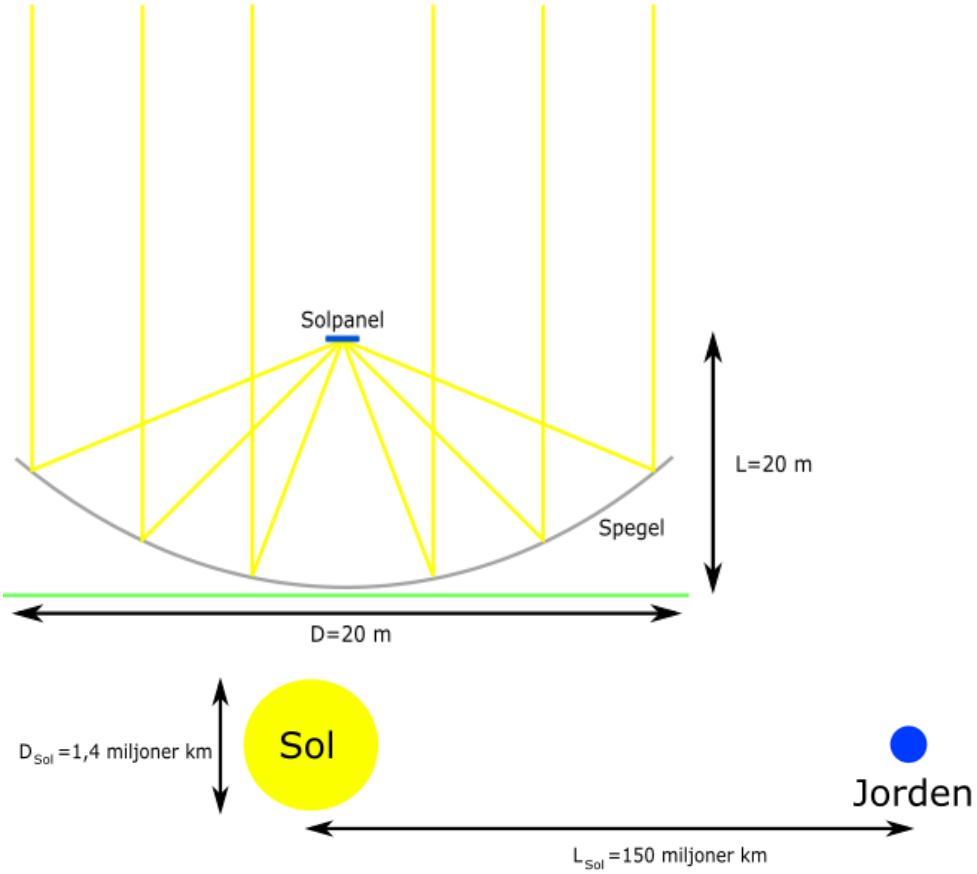
b) Endast en av de tre uppställningarna ger den önskade illusionen av beteendet hos bakgrunden när den betraktas genom ringen – vilken? (6p)

c) Var i det optiska systemet är det lämpligt att sätta in det föremål (t.ex. handen med särade fingrar) som ska bli osynligt när man tittar genom osynlighetsringen? (2p)

Lösningsförslag tenta i Optik FFY091 22:e augusti 2022

1. Solpaneler!

a) Med en parabolisk spegel fokuseras inkommande parallella strålar i en punkt. En punkt på solen avbildas alltså i fokus med en ungefärlig storlek: $2{,}44\frac{\lambda L}{D} \approx 1\mu m$. Detta är mycket mindre än den bild av solen som skapas i ett optimalt fokuserat avbildningssystem: $d_{bild} = L\frac{D_{Sol}}{L_{Sol}} \approx 19$ cm. Storleken på solpanelen som behövs är då: $A_{panel} = (d_{bild}/2)^2\pi \approx 0.27$ m².



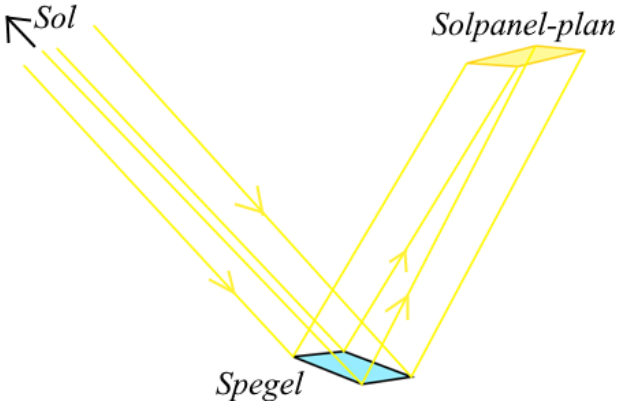
Det presenterade konceptet har flera brister ur ett praktiskt perspektiv:

- En 20 m diameter parabolisk spegel är extremt svår och dyr att framställa. För att bibehålla en PSF av storlek ~1µm krävs en noggrannhet i storleksordningen tiotals nanometer på spegelns krökning över hela dess area. I vårt intresse räcker dock en PSF-storlek i storleksordningen av Sol-bilden men även detta hade varit en komplicerad struktur för en så pass stor spegel som förmodligen fördyrat konceptet mer än att använda en solpanel med en lika stor area som spegeln.
- För att bilden av solen skall landa på solpanelen måste spegeln hela tiden riktas mot solen som inte är stationär på himlavalvet. Att dynamiskt vrida en så stor konstruktion är svårt och dyrt.
- Den intensitet som landar på solpanelen ges av den inkommande intensiteten I_0 enligt: $I_{panel} = \frac{I_0 A_{spegel}}{A_{panel}} = I_0\frac{D^2}{{d_{bild}}^2} \approx 11000\, I_0$. Intensiteten solpanelen skulle fånga upp enligt konceptet är alltså 11000 gånger större än om panelen låg platt på

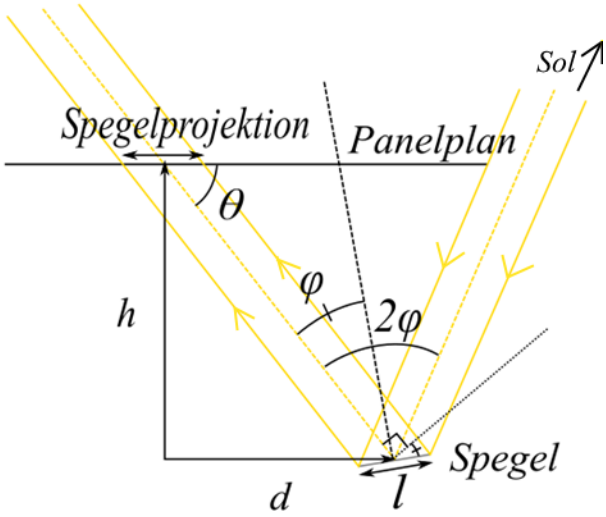
marken. Verkningsgraden hos en solpanel är mellan 10-20 %, d.v.s. en signifikant del av solenergin blir till värme i solpanelen. Om intensiteten som träffar panelen ökar med en faktor 11000 jämfört med vad den är designad för uppstår problem. Risken är att panelen smälter, blir brännskadad eller slutar fungera av andra skäl.

- Moln. Mer om det i fråga c)

b) Låt oss först titta på hur ljuset från en punktkälla på solen reflekteras i en spegel och landar i planet med solpanelen. Ljuset från en punktkälla på solen består av parallella strålar när det når jorden. Om spegelns plan är parallellt med panelens plan fås:

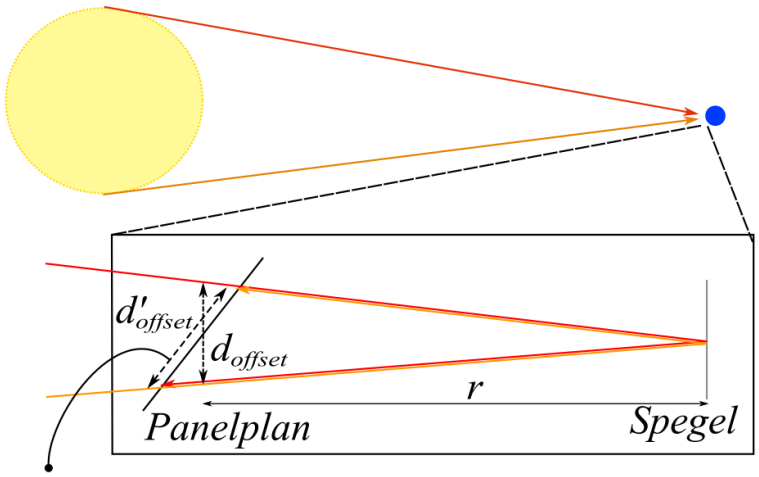


Det reflekterade ljuset landar alltså på ett område som är lika stort som spegelns area. Om istället spegelns plan är vridet i förhållande till panelens plan fås följande:



Spegelprojektionens längd i panelplanet ges av: $l_{proj} = \frac{l\cos\varphi}{\sin\theta}$ där $\theta = \tan^{-1}\frac{h}{d}$. Störst projektion fås då $\varphi = 0$ och θ är minimal. Minsta θ fås mellan solpanelen och den spegel som sitter längst ifrån: $h = 20\text{m}$ och $d \approx \sqrt{2(10\ m)^2}$. Vi får att: $l_{proj,max} \approx 1{,}22 \times l$, där l är längden på spegeln (bredd, höjd, diagonal, det spelar ingen roll.)

Nu tittar vi istället på när olika punktkällor på solen speglas i den här ytterkantsspegeln mot solpanelen:

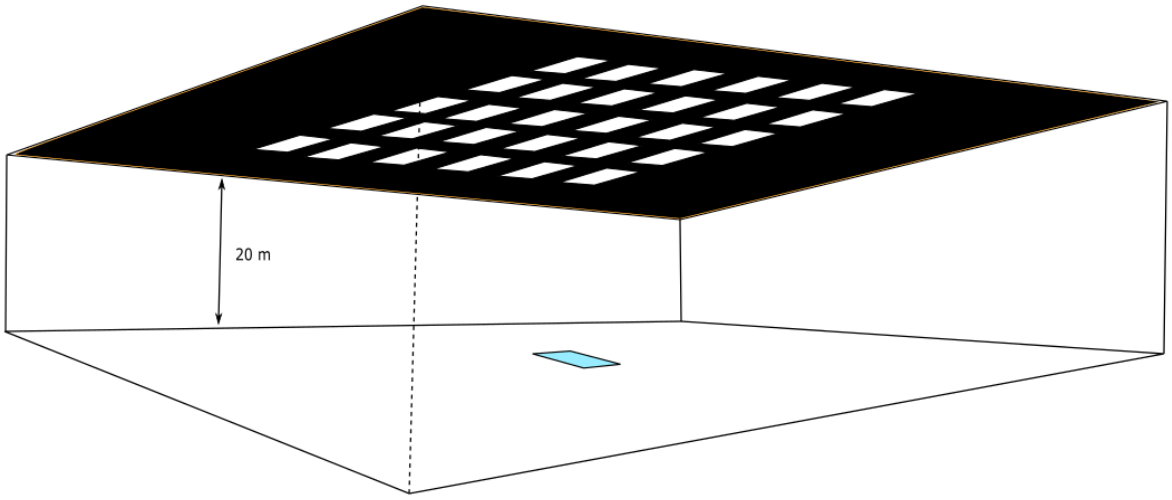


Maximal spegelprojektionsförskjutning

En maximal offset skapas mellan reflektionerna från de från varandra längst belägna punktkällorna på solen. Offsetten fås via likformighet (avbildning i spegeln): $d_{offset} =$

$r\frac{D_{Sol}}{L_{Sol}} = \sqrt{h^2 + d^2}\frac{D_{Sol}}{L_{Sol}}$. Offsetten i panelplanet fås genom projektion: $d'_{offset} = \frac{d_{offset}}{\sin\theta} =$ 28cm. Allt solljus reflekterat i de 30 speglarna kommer alltså rymmas inom en solpanel med måtten $(1{,}22 \times spegelbredd + 0{,}28$ m) x $(1{,}22 \times spegellängd + 0{,}28$ m) = 2,72 x 3,94 m^2 oavsett var på himlen solen står. Alltså ungefär 3x4 m^2.

c) När himmeln är täckt av ett vitt homogent molntäcke har solljuset spridits ungefär isotropiskt i alla möjliga riktningar i rummet. Solen syns inte längre utan den enda ljuskällan på himmeln som kan bidra till genererad energi i panelerna är de vita molnen som sträcker ut sig oändlig långt på himmeln ovanför. Ljuskällan är alltså oändlig och det finns ingen möjlighet att avbilda en oändlig ljuskälla på en ändlig solpanel. Det ljus Jens solpanel kan fånga upp är det ljus som kommer från de bitar himmel man kan se i speglarna på marken från panelens perspektiv. Detta är ekvivalent med att panelen skulle ligga på marken i en byggnad vars tak har öppningar av samma form och utsträckning som spegelmatrisen:



Uppenbart är att solpanelen i byggnaden ”ser” (är belyst av) en mindre del av himmeln och därav träffas av mindre ljus än en likadan panel som ligger direkt på marken och kan ”se” hela himmeln. Eftersom himmeln är homogen (lika ljus överallt) spelar det ingen roll i vilken ”del” av himmeln som syns genom speglarna (öppningarna). I a) avbildar spegeln enbart en mycket liten del av himmeln på panelen (en del av samma storlek som solen sett från marken), däremot med en större uppfångande area.

2. Fältstudie

Fältet framför ögat är en plan våg, vilket vi inser genom att jämföra med det allmänna uttrycket för en plan våg

$$E(x,y,z) = Ae^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

Vi kan alltså identifiera

$$A = 1500000e^{j\pi/8}\ V/m$$

$$k_x = 0\ m^{-1}$$

$$k_y = 3.1 \cdot 10^6\ m^{-1}$$

$$k_z = 1.1 \cdot 10^7\ m^{-1}$$

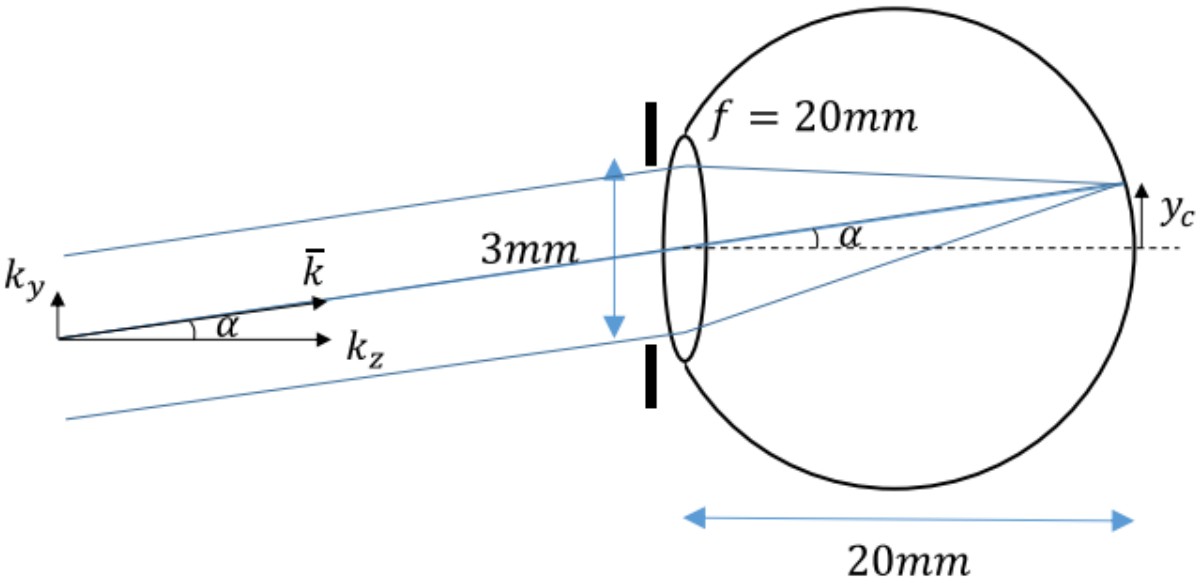
(a) Längden av k-vektorn är

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 1.143 \cdot 10^7\ m^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 550\ nm$$

Färgen är alltså grön!

(b)-(d): Utbredningsriktningen är k-vektorns riktning, som bildar vinkeln α med z-axeln



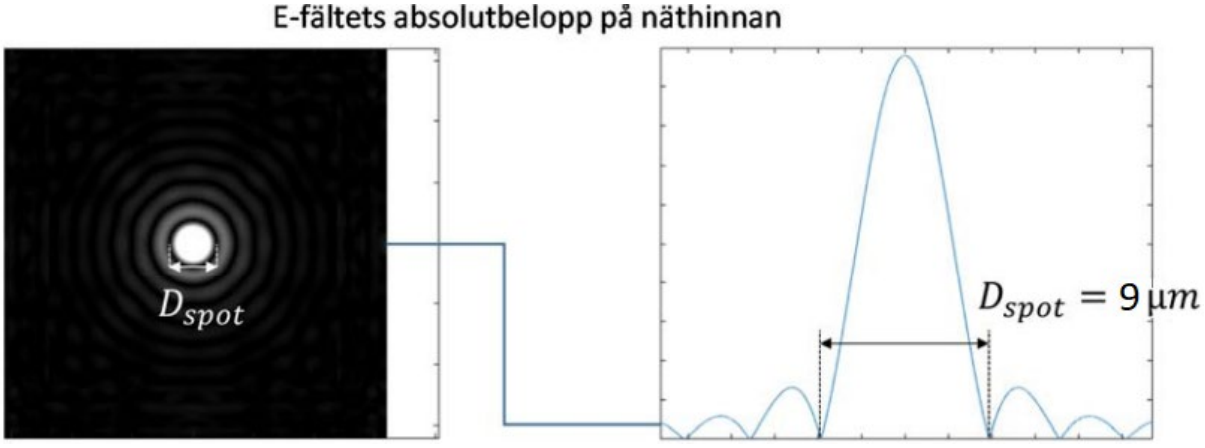
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{k_x}{k_z} = 0.275\ rad$$

Alternativt kan vi alltså säga att det fält som träffar pupillen är kollimerat ljus som utbreder sig med vinkeln α mot z-axeln. Eftersom näthinnan ligger på fokallängds avstånd från linsen fås en fokuserad fläck där. Positionen y_c hos fläckens centrum på näthinnan bestäms med regeln att en stråle genom mitten av linsen inte bryts

$$y_c = \alpha \cdot f \approx 5.5\ mm$$

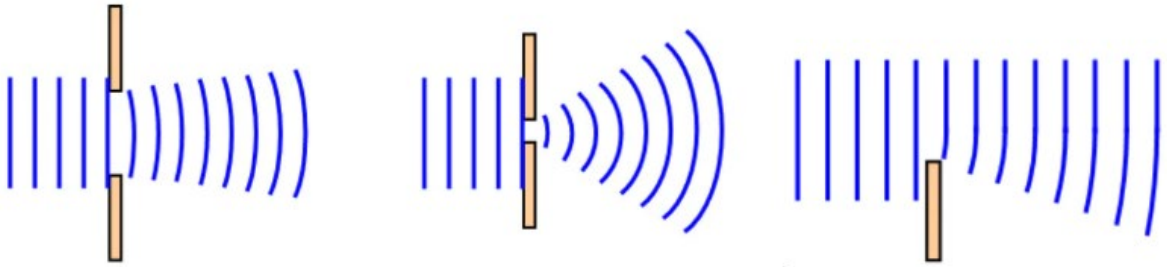
Precis efter pupillen är fältet kollimerat (som före pupillen) med konstant intensitet över ett cirkulärt tvärsnitt. Som vi såg i HUPP 1 ger ett sådant fält en Airy-fördelad intensitet i sitt fokus, d.v.s. på näthinnan, se figuren nedan för illustration. Som storlek på fokusfläcken (minsta spotsize) tar man då ofta första nollstället diameter, D_{spot}, som ges av den exakta tumregeln

$$D_{spot} = 2.44\frac{\lambda}{D_{pupill}}f = 2.44\frac{550\ nm}{3\ mm}20\ mm \approx 9\ \mu m$$



a) Diffraktion är spridning av vågor (inte begränsat till just optiska vågor) mot omgivningar med längdskalor som är jämförbara med den spridda vågens våglängd. På dessa längdskalor är vågens vågnatur speciellt viktiga då icke försumbara bidrag till intensiteten kan uppleva självinterferens. Den geometriska optiken tar inte hänsyn till ljusets fas och kan därmed inte förutsäga att ljus har möjlighet att självinterferera.

Det självklara fenomenet som vi undersökte i labbet var spridning mot ett periodiskt gitter då en laserstråle sprids i flera ordningar med vinklar som följer gitterekvationen. Men även vågors egenskap att kröka runt ett hörn är också ett exempel på diffraktionsfenomen.



På grund av diffraktion blir vågens propagationsriktning osäker när det färdas i en smal springa. Det är även detta som gör att du kan höra din kompis ropa trots att du står bakom ett träd.

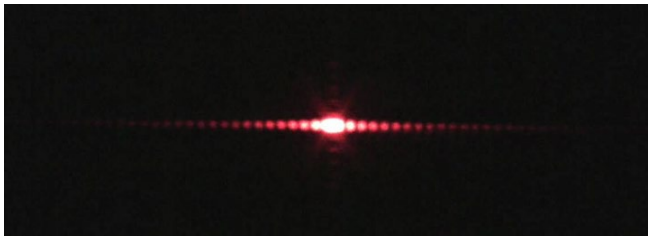
b) Huygens princip är ett sätt att analysera hur ljus propagerar genom diffraktiva element. Den grundläggande idén är att man betraktar alla punkter i rummet som individuella punktkälla som drivs när de nås av en propagerande våg. En driven punktkälla genererar i sin tur sfäriska vågor radiellt utåt som bidrar till det totala optiska fältet i rummet. Det totala elektriska fältet i en viss punkt i rummet får genom att integrera alla punktkällors bidrag i denna punkt.

c) Gitterekvationen ser ut på följande vis

$$m\lambda = \Lambda\, sin(\theta_m)$$

I denna ekvation ingår ljusets våglängd λ, gittrets period Λ och vinkeln θ_m för diffraktionsordning med index m.
För att ett diffraktivt optiskt element ska följa gitterekvationen krävs det att det modulerar antingen ljusets amplitud eller fas och det krävs även att denna modulering är periodisk.

d) Att en viss vinkel uppfyller gitterekvationen är endast ett nödvändigt krav för att ljuset ska spridas i den riktningen, ingen garanti. Exempel på detta ges i figuren nedan där intensiteten för diffraktionsordningar till $m > \sim 17$ inte längre syns i bilden, trots att de vinklarna får plats på skärmen.



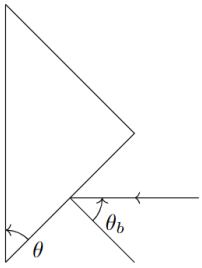
För detta gitter avtar intensiteten monotont med stigande diffraktionsordning och endast ordningar upp till $m = \sim 17$ är synliga.

Det är inte heller självklart att intensiteten avtar monotont då diffraktionsordningen ökar, det beror på gittrets fas-/intensitetsmoduleringsfunktion. Intensiteten i en given diffraktionsordning fås genom att integrera upp bidragen hos punktkällor inom en gitterperiod. Exempel på detta är ett binärt amplituds-modulerande gitter med 50% duty cycle som leder till att första diffraktionsordningen släcks ut. Detta beskrivs i föreläsningsanteckningarna F4.

4. Polarisations-pyramiden

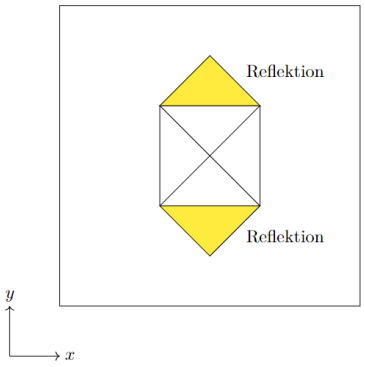
a) Pyramiden är tillverkad så att sidorna kan vara i Brewstervinkeln för ljus som belyser pyramiden rakt ovanifrån. Alltså, vinkeln θ för pyramiden är designad med avseende på brytningsindex för pyramiden och luft, så att Brewstervinkeln är uppfylld vid sidorna för pyramiden.

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_{pyramid}}{n_{luft}}$$

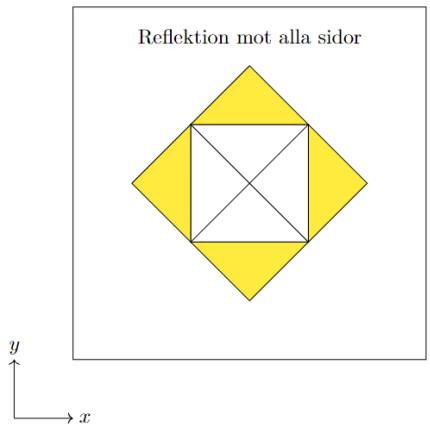


Detta gör att polariserat ljus med ett fält i infallsplanet inte upplever någon reflektion utan transmitteras till fullo genom pyramiden. Ljus som inte har denna polarisation kommer att delvis reflekteras!

b) Om vi enbart har linjärpolariserat ljus, med fält längs x-axeln, så är kommer allt ljus att vara i infallsplanet för den vänstra och högra sidan av pyramiden. Detta gör att ljuset som lyser på dessa sidor kommer att transmitteras helt genom pyramiden. För den övre och undre sidan kommer ljuset att delvis reflekteras!

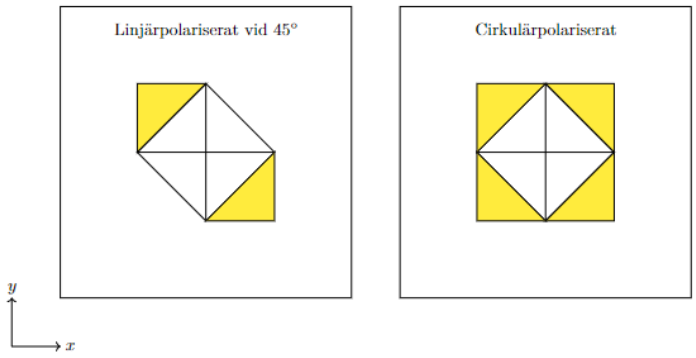


c) Om vi roterar polarisationsaxlen för ljuset med 45° så kommer det inte vara total transmission genom någon av sidorna. Vi kommer se reflektioner på alla sidor.



d) Det kommer se likadant ut som uppgift c)! Det cirkulärpolariserade ljuset kan delas upp i komponenter längst x- och y-axeln som är fasförskjutna mot varandra.

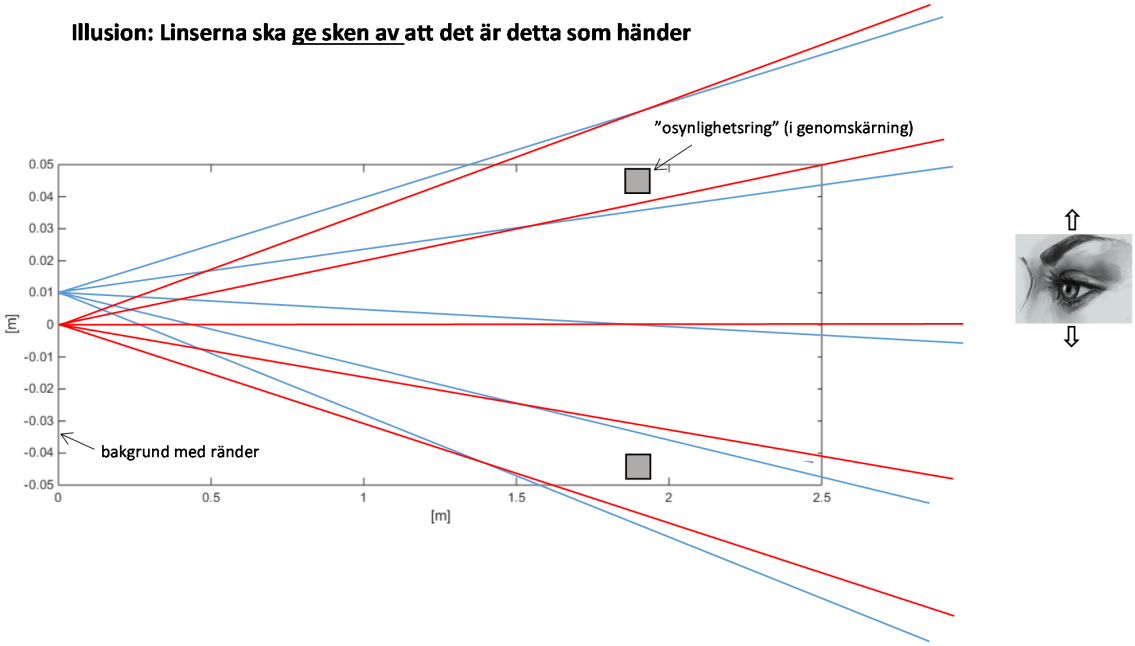
Men vi kan särskilja på cirkulärpolariserat och linjärpolariserat genom att rotera själva pyramiden! Om vi till exempel har linjärpolariserat ljust som är roterat 45° som i uppgift c) och pyramiden roteras 45° så kommer vi att få samma reflektioner från den över och undre sidan av pyramiden. Medan för cirkulärpolariserat ljus så kommer det att vara reflektioner från alla sidor oavsett hur pyramiden roteras!



5. Osynlighetsringen

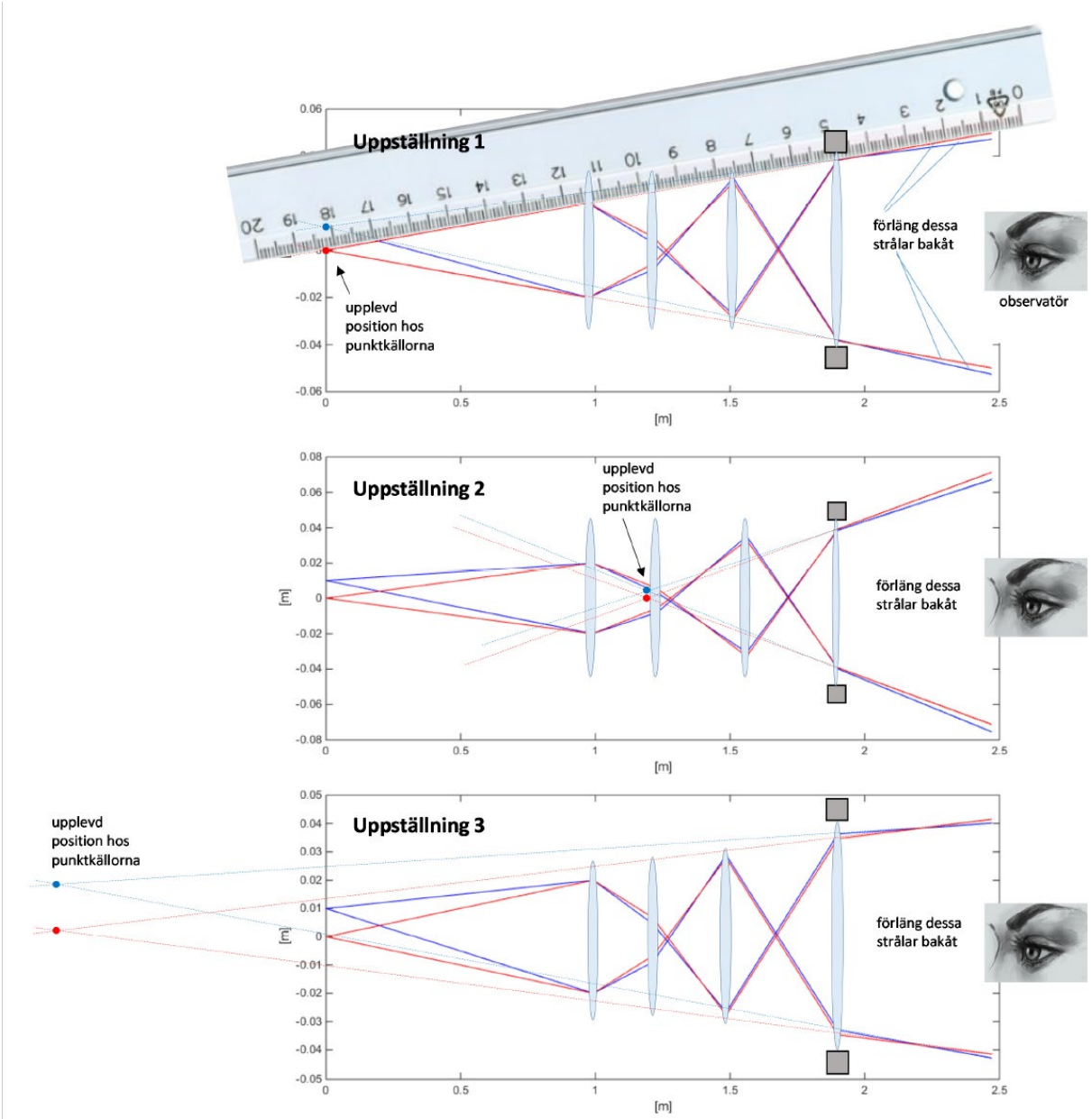
a) I den omagiska verkligheten kan inte ljuset gå rakt genom handen. Ljuset måste ta sig från bakgrunden till observatören utan att stöta på något annat än linserna. Som framgår av strålgångsdiagrammen kan linserna visserligen komprimera ljusflödet i vissa positioner (det är där man sätter in handen, se uppgift c) men åtminstone ett litet område kring systemets symmetriaxel måste alltid vara oblockerat – annars försvinner hela bakgrundsbilden. Det är därför man spretar med fingrarna i bildserien så att det ska verka som man kan stoppa in nästan hela handen fast man lämnar ett oblockerat utrymme kring symmetriaxeln. Man kan också gissa att killen på första bilden noggrant har positionerat sitt ansikte så att bakgrundsljuset nätt och jämnt tar sig förbi – en gnutta längre in mot symmetriaxeln med huvudet och han skulle blockera allt ljus från bakgrunden.

b) Det magiska med det noggrant uppställda systemet av linser är att bakgrunden ser precis likadan ut för observatören när hen tittar genom linserna som om det inte fanns några linser och ringen bara var ett hål:



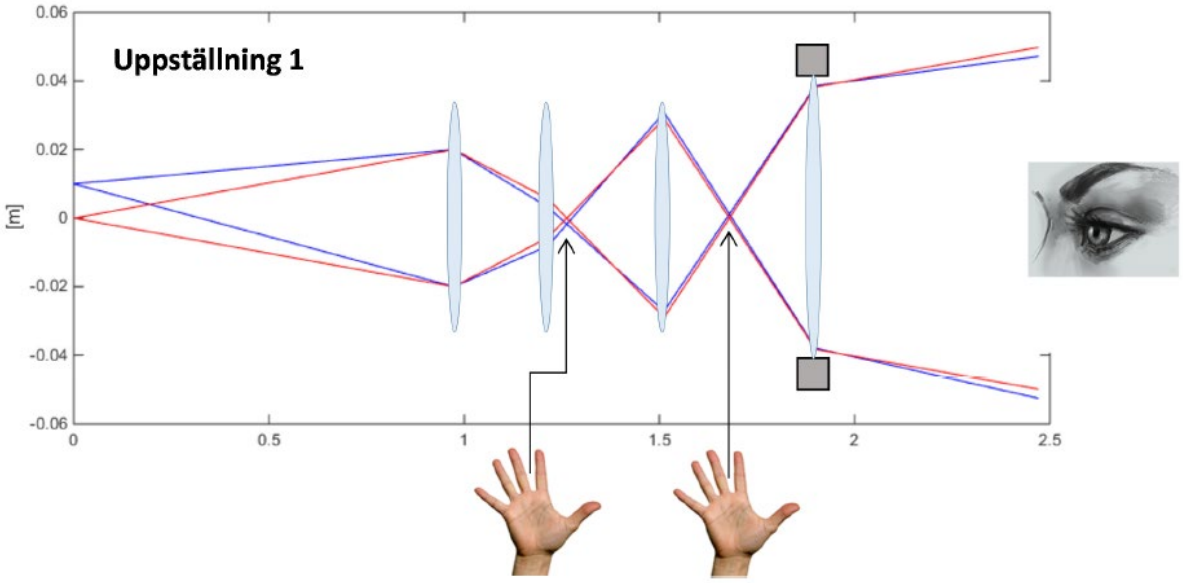
För observatören – som tittar genom systemet av linser – ska alltså *ljuset från varje punktkälla på bakgrunden tyckas komma från källans faktiska, fysiska, position på bakgrunden*. Om så sker beter sig den bakgrund man observerar genom osynlighetsringen (och resten av linserna) identiskt med den ”direktobserverade” bakgrunden man ser i ovanstående figur. Det betyder till exempel att när man flyttar sitt öga rör sig bakgrunden man ser genom ringen och bakgrunden man ser utanför ringen på samma sätt, som i bildserien som visas i uppgiften.

Vilken av Uppställningarna 1-3 ger denna illusion? Ja, det är bara att ta fram linjalen och följa ”de röda” strålarna i observatörens område – efter osynlighetsringen – bakåt för att se var ”den röda” punktkällan finns som strålarna tycks komma ifrån, och på samma sätt för ”de blå” strålarna:



Vi ser att det är Uppställning 1 som ger den önskade funktionen! Där upplever observatören att punktkällorna ligger i samma positioner som de fysiska punktkällorna. Observatören har ingen chans att skilja situationen från den som visas på föregående sida (för ett idealt system), och tycker alltså att hen observerar bakgrunden direkt genom en tom ring.

c) Men för att det ska vara någon vits med uppställningen – och inte bara ett jobbigt sätt att åstadkomma samma sak som inga linser alls – måste vi dessutom kunna föra in ett blockerande föremål, t.ex. en hand, ganska långt in mot symmetriaxeln i linssystemet utan att ljuset från bakgrunden blockeras. Vi ser från strålgångsskissen för Uppställning 1 att det finns två ställen där ljuset från bakgrunden koncentreras till små områden runt symmetriaxeln, markerade nedan:



I dessa positioner kan man alltså föra in en hand nästan till symmetriaxeln utan att det händer något med ljuspropagationen från bakgrunden till observatören. Ur observatörens synpunkt ”försvinner” handen bakom osynlighetsringen.