Tentamen i Optik FFY091 - fredag 10:e juni 2022, kl. 14:00-18:00

Jourhavande lärare **Lars Persson, tel. 0720-454454, finns på plats ca kl. 15 och 17** för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs inte så många ord!
- Gör egna rimliga antaganden och motivera dessa där det behövs.

Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).
Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.
På kurshemsidan publiceras lösningsförslag senast måndag 13 juni.

Visning/uthämtning av tenta sker torsdag 7:e juli kl. 13.00-14.00 på Åsa Haglunds kontor B437 i MC2-huset.

---

1. Binärt kvartsgitter

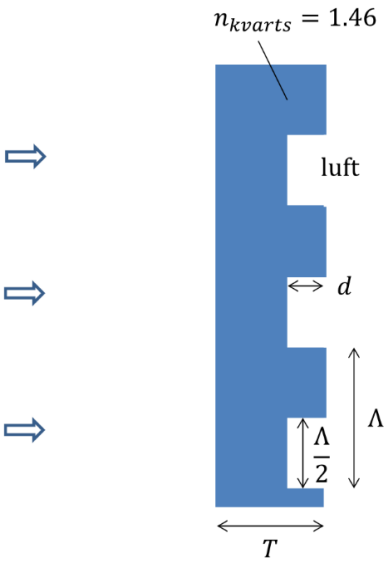
Nedan ser du en skiss av ett binärt gitter som är tillverkat i kvarts ($n_{kvarts} = 1.46$). En röd HeNe laser ($\lambda = 633$ nm) som infaller från vänster plockar upp en fasmodulering då laserljuset transmitteras genom gittret.

Gittret med tjocklek $T = 1$ mm är periodiskt i en dimension vilket indikeras av figuren och har en *duty cycle* på 50% (d.v.s. bredden på gittrets dalar är 50% av gittrets period som indikerat i figuren).

a) Vad gäller för gittrets fasmodulering om första diffraktionsordningen släcks ut av destruktiv interferens? Antag att gittret kan ses som en TOK. (3p)

b) Designa djupet av gittrets 'dalar', *d,* för att uppnå den önskade fasmoduleringen. (4p)

c) Hur ändras kravet på *d* om gittret i stället används i reflektion (lasern infaller från höger och reflekteras emot gittret)? Är kvarts bästa valet av material för gittret om det ska användas i reflektion? (5p)
Tips: ljusets reflektion ges av $R = |r|^2$, där $r = (n_{luft} - n_{kvarts})/(n_{luft} + n_{kvarts})$.



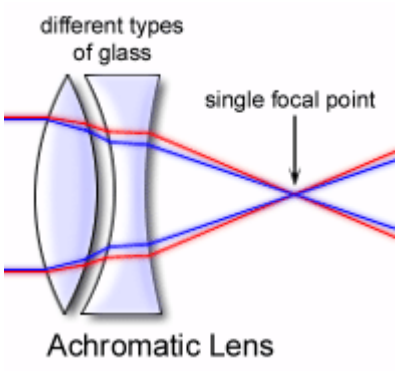
2. Designa en akromatisk dubbellins!

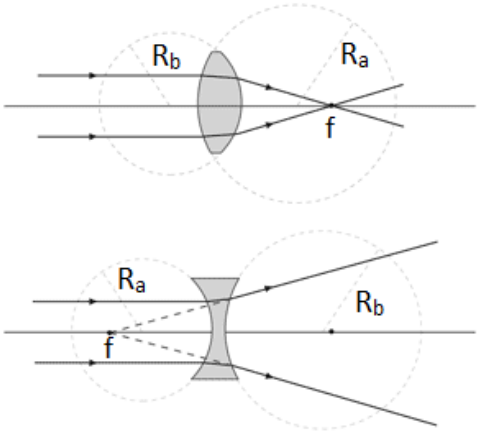
Tidigare i kursen när vi kollat på linser har vi antagit en fix våglängd. En lins fokallängd är dock våglängdsberoende, d.v.s. den ändras baserat på vilken våglängd ljuset har. Med lite magi går det att trolla fram linser som är våglängdsoberoende (akromatisk) inom ett betydligt större våglängdsintervall – puuh! Din uppgift är att designa en akromatisk dubbellins, d.v.s. två tunna linser med fokallängd f_1 och f_2 placerade efter varandra, se figur nedan till vänster. Några formler som tidigare stötts på i kursen som skulle kunna vara till hjälp:

Summan av fokallängderna för två tunna linser (från tidigare tenta): $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, (1)

Fokallängden för en lins (linsmakarens formel): $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right)$, (2)

I figuren nedan till höger visas hur kurvaturen, R, för en positiv/negativ lins definieras.





Positiv lins:
R_a - positiv
R_b - negativ
f - positiv

Negativ lins:
R_a - negativ
R_b - positiv
f - negativ

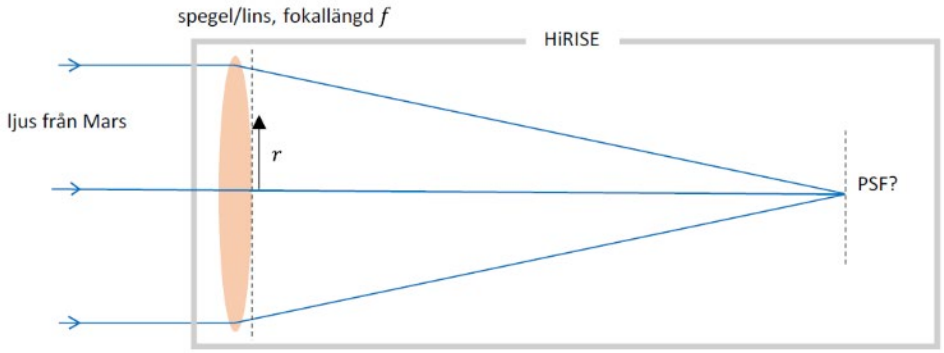
a) Visa att om $f_1 = f\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)$ och $f_2 = f\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)$, så gäller (1). (3p)

b) Använd uttrycken för dina två linser i a) till att hitta ett uttryck för kvoten δ_1/δ_2 så att dubbellinsen blir våglängdsoberoende. Ange kvoten δ_1/δ_2 i termer av n_1, $dn_1/d\lambda$, n_2, $dn_2/d\lambda$. Tips: att dubbelinsen är våglängdsoberoende innebär att $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) = 0$. (6p)

c) Designa en akromatisk dubbellins med fokallängd $f = 100$ mm, med designvåglängden $\lambda = 550$ nm. För lins 1 används glaset Schott N-BK7 med n=1.52 och $dn/d\lambda = -0.05$ µm^{-1} för $\lambda = 550$ nm, och för lins 2 används glaset Schott N-SF5 med n=1.68 och $dn/d\lambda = -0.13$ µm^{-1} för $\lambda = 550$ nm. Vad blir krökningsradierna för de två linserna? Antag för entydighetens skull att $R_{b1} = -R_{a1}$ för lins 1 och att $R_{a2} = -R_{b2}$ för lins 2. (4p)

3. HiRISE-teleskopet

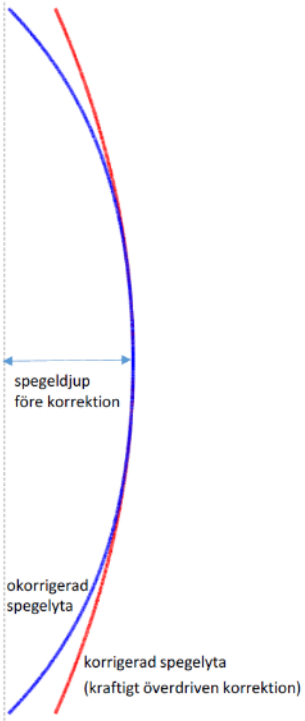
HiRISE är namnet på ett teleskop som vi simulerar i kursen. Teleskopet finns på en rymdsond som cirklar runt planeten Mars. HiRISE är ett spegelteleskop, men vi ersätter som vanligt spegeln med en lins, se nedan. Linsen har en diameter på 50 cm och en fokallängd på 3 m.



a) I skissen ovan förekommer beteckningen PSF. Förklara med en mening vad PSF är för något (du behöver inte ange vad bokstäverna i förkortningen står för)! När vi beräknat PSFen, hur använder vi den i våra simuleringar?

(3p)

I våra simuleringar använder vi inte det vanliga uttrycket för fasmoduleringen hos spegel/lins, $\varphi_{lins} = -k\frac{r^2}{2f}$, utan ett korrigerat värde. Fysikaliskt innebär denna korrektion att spegeln inte görs riktigt lika djup, som figuren visar



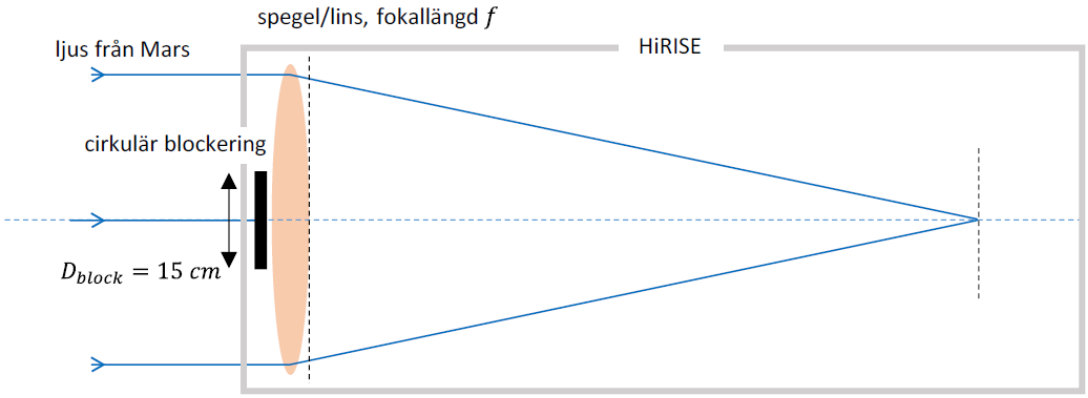
b) Varför använder vi inte det vanliga uttrycket för fasmoduleringen, utan gör en korrigering?

(2p)

c) Vad skulle hända med PSFen och vad skulle hända med bilden av marsytan om vi inte gjorde korrigeringen (beskriv med några få ord)?

(2p)

I våra simuleringar inför vi också en "cirkulär blockering" som gör att inget ljus passerar genom spegelns/linsens centrala del, som figuren visar.

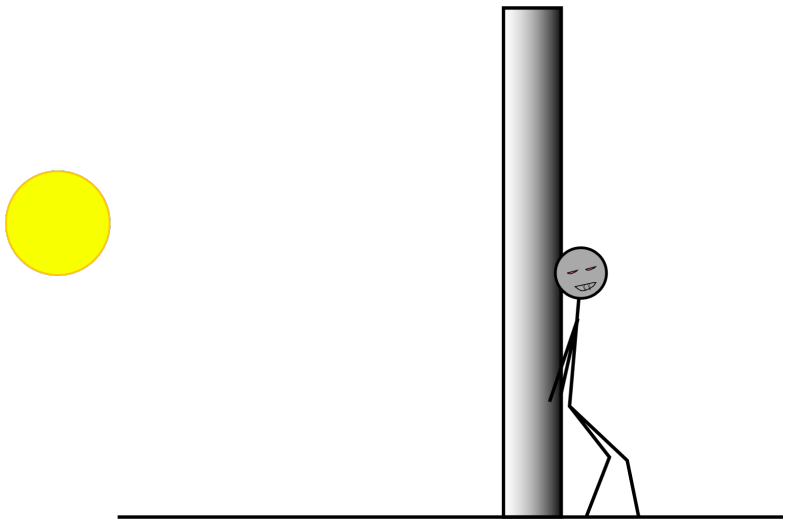


d) Varför inför vi den cirkulära blockeringen i vår simulering, som ju ska efterlikna det fysiska HiRISE-spegelteleskopet så mycket som möjligt?

(2p)

4. Skuggor

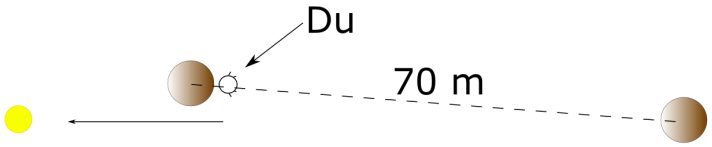
Du vaknar upp en varm sommarmorgon ute på ett fält. Ditt huvud värker, dina händer är bleka. Du stryker ena handen över din nacke och känner två närliggande sticksår. Något/någon har gjort dig till en vampyr! Solen är på väg upp och du inser faran i din situation så du skyndar dig till skuggan av ett närliggande träd.



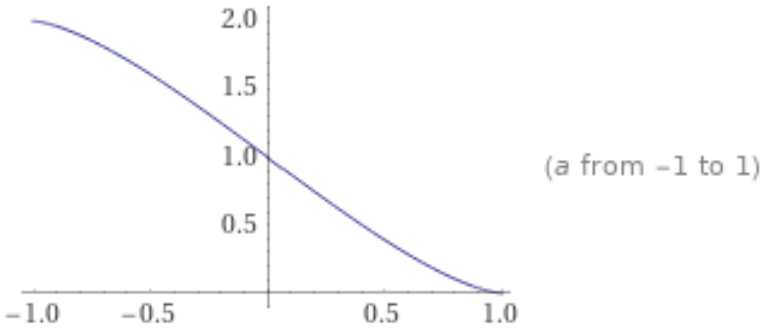
a) Solen står nu strax ovanför horisonten och belyser trädet du gömmer dig bakom. Förklara och skissa skuggan (intensiteten) bakom trädet och markera i skissen området på marken bakom trädet som är säkert för dig att vistas på under antagandet att vampyrer ej tål solljus. Trädet är (en cylinder) 0,5 m i diameter och väldigt högt. Solen har en diameter på 1,4 miljoner km och sitter på ett avstånd 150 miljoner km bort.

(5p)

b) Du letar i dina fickor efter något användbart och hittar formelbladet du skrev inför optiktentan. Antecknat på pappret finner du soljusets intensitet när det träffar jorden: $I_0 = 1{,}36$ kW/m^2. Du minns från en tidigare optikuppgift att vampyrer kan klara sig korta stunder i så mycket som 300 W/m^2 solljus. Du funderar på att använda trädets skugga för att ta dig vidare till ett annat träd du bedömer på ett avstånd av 70 m.



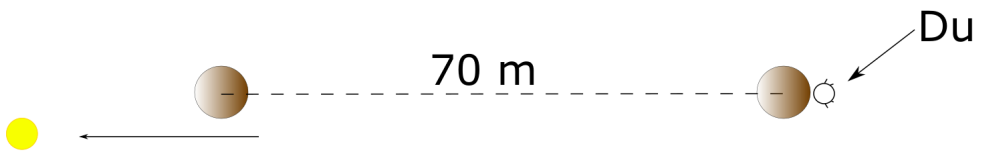
Hur långt bakom trädet kan du befinna dig utan att bli träffad av mer än 300 W/m^2 solljus? (Du kan anta att du kan göra dig godtyckligt smal). Vågar du ta dig till nästa träd? I ditt formelblad hittar du också grafen till följande användbara integral:



$$\frac{4}{\pi}\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(5p)

c) På något sätt lyckas du ta dig till nästa träd och efter att ha pustat ut lite så har jorden hunnit rotera så att båda träd och solens centrum ligger på en rak linje.



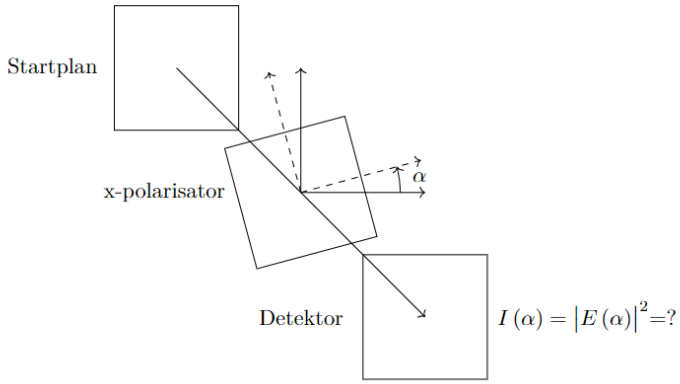
Medan du står och funderar på ditt nästa drag så upptäcker du att trädet du nu befinner dig bakom inte har en utan **två** skuggor! Förklara varför och beräkna vinkelseparationen mellan skuggorna.

(3p)

5. Stokes-parametrarna

I kursen har vi använt Jones formalismen för att undersöka hur polarisations tillståndet förändras när ljus propagerar genom olika optiska komponenter. Ett problem med Jones formalismen, som nämnts, är att vi ej kan beskriva opolariserat ljus. Så i denna uppgift ska vi, genom att utnyttja Jones matriser, härleda det som kallas Stokes parametrarna $\mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{C}, \mathrm{S}$, för att beskriva polarisation. Stokes parametrarna är det man experimentellt brukar mäta upp när man vill karaktärisera polarisation av en ljuskälla!

$$\vec{E}_{start} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i(\omega t - kz + \epsilon_x)} \\ E_{0y}e^{i(\omega t - kz + \epsilon_y)} \end{bmatrix}$$



a) Propagera E_{start} genom polarisatorn och ta fram fältet vi detektorn som funktion av polarisatorns vinkel, $E(\alpha)$, och beräkna sedan intensiteten vid detektorn.

$$I(\alpha) = |E(\alpha)|^2$$

Tips: $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ och $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

(5p)

b) Utnyttja dubbla vinkeln igen för att skriva om intensiteten på denna formen:

$$I(\alpha) = A_0 + A_1\cos(2\alpha) + A_2\sin(2\alpha)$$

Vad blir A_0, A_1, A_2?

Tips: $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$ och $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$

(2p)

c) Du har nu identifierat tre Stokes parametrar! Om du har löst matrismultiplikationerna så är A_0, A_1, A_2 relaterade till amplituden för de ingående polarisationerna, E_{0x}, E_{0y}, samt deras relativa fas, $\cos(\epsilon_y - \epsilon_x)$! Det vill säga vi med tre intensitetsmätningar, vid tre olika vinklar på polarisatorn, så kan man, nästan, fullt bestämma ljusets polarisation!

Vi saknar fortfarande en bit med information. Vilken?
Tips: är cos en udda eller jämn funktion?

(1p)

d) Den fjärde Stokes parameter får du genom att placera en kvartvågplatta så att fasen mellan x och y polariseringen förskjuts med $\frac{\pi}{2}$. Gör inte om hela räkningen utan modifiera enbart intensiteten vid detektor från uppgift a)! Vad blir det nya koefficienterna A_{0r}, A_{1r}, A_{2r} ?

$$I(\alpha) = A_{0r} + A_{1r}\cos(2\alpha) + A_{2r}\sin(2\alpha)$$

(2p)

e) Du har nu identifierat alla Stokes parametrarna $\mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{C}, \mathrm{S}$! De brukar vara definierad enligt följande:

$$\mathrm{I} = 2A_0, \quad \mathrm{M} = 2A_1, \quad \mathrm{C} = 2A_2, \quad \mathrm{S} = 2A_{2r}$$

Vad blir $\mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{C}, \mathrm{S}$ för dessa fallen?

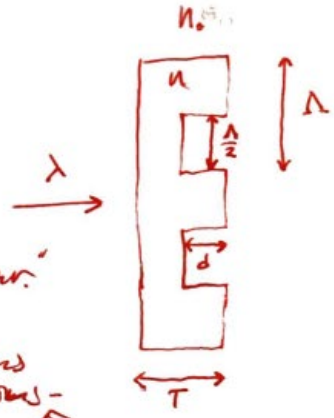
- Linjär polariserat ljus: $E_{0x} = 1, E_{0y} = 0, \epsilon_y - \epsilon_x = 0$
- Högerhänt cirkulär polariserat: $E_{0x} = E_{0y} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \epsilon_y - \epsilon_x = \frac{\pi}{2}$
- Opolariserat ljus: $E_{0x} = E_{0y} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \epsilon_y - \epsilon_x = snabbt\ variernade$

(3p)

Lösningsförslag tenta i Optik FFY091 10:e juni 2022

1.

Binärt kvartsgitter



Givet: $\lambda = 633$ nm
$n = 1{,}46$
$T = 1$ mm

Binärt gitter =>
Lika långa "dalar" som "toppar."

Sökt: a) Fasmodulering för destruktiv interferens för första diffraktionsordningen

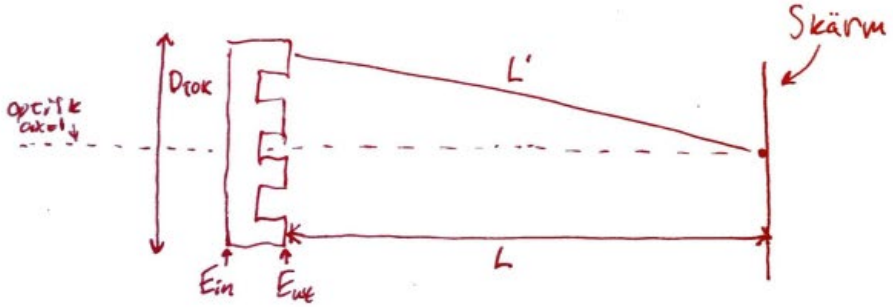
b) d s.a. detta uppfylls

c) d s.a. detta uppfylls vid reflektion från lägar.

Lösning

a) Gittret anses vara en TOK vilket innebär att

$$E_{ut}(x,y) = e^{i\varphi_{TOK}(x,y)} E_{in}(x,y)$$



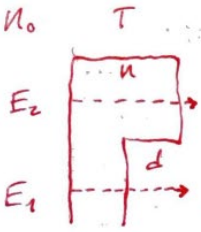
Om $L >> D_{TOK}$ har vi att skillnaden i propagationsavstånd

$$L' - L \leq \sqrt{\frac{D_{TOK}^2}{4} + L^2} - L = L\left(\sqrt{1 + \frac{D_{TOK}^2}{4L^2}} - 1\right) \approx \frac{D_{TOK}^2}{8L} \approx 0$$

Vi kan alltså försumma fas förskjutning från skillnad i propagationslängd.

⇒ Destruktiv interferens måste fås endast av $\varphi(x,y)$. Då vi har en duty cycle på 50% fås destruktiv interferens om de två halvorna av E_{ut} är 180° fasförskjutna. Därför måste gitterets fasmodulering vara 180°!

b) Betrakta fasen hos E-fält som har färdats i en "gitterdal" (E_1) vs en "gittertopp" (E_2):



* E_1 ackumulerar fasen

$$\varphi_1 = k_0 n(T-d) + k_0 n_0 d \qquad \left(k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

* E_2 ackumulerar fasen

$$\varphi_2 = k_0 n T$$

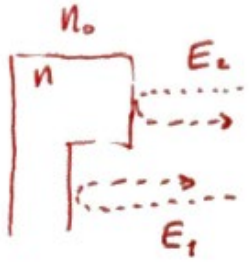
Fasmoduleringen fås av skillnaden

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k_0 n d - k_0 n_0 d = k_0 d(n-n_0).$$

För att få $\Delta\varphi = \pi$ krävs därmed att

$$d = \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(n-n_0)} \approx 688 \text{ nm}.$$

c) Då ljuset infaller från höger har vi att



$\Delta\varphi = 2dk_0 n_0$ (försumma fasändring vid reflektion då det sker för både E_1 och E_2)

Detta ger att

$$d = \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot 2n_0} = 158 \text{ nm}$$

Givet att d kan designas enl. ovan uppnås destruktiv interferens för det reflekterade ljuset; emellertid reflekteras inte allt ljus:

(Fresnell-reflektion) $R = \left|\frac{n_0 - n}{n_0 + n}\right|^2 = 3,50\ \%$

Vi förlorar alltså ~ 96,5 % av ljuset vilket inte är optimalt. Bättre hade varit att ha ett högreflektivt medium istället!

2. Designa en akromatisk dubbellins

a) Sätt in de givna uttrycken för f_1 och f_2 i formeln för ”summan av två fokallängder” och förenkla:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)} + \frac{1}{f\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}$$

$$\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) = \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) + \left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)$$

Utveckla vänsterledet:

$$1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{\delta_1} + 1$$

vilket är identiskt med högerledet!

b) För att dubbellinsen ska vara våglängdsoberoende måste derivatan med avseende på våglängd vara noll:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)=0 \qquad (*)$$

För de två linserna har vi även att

$$\frac{1}{f_1}=(n_1-1)\left(\frac{1}{R_{1a}}-\frac{1}{R_{1b}}\right)$$

$$\frac{1}{f_2}=(n_2-1)\left(\frac{1}{R_{2a}}-\frac{1}{R_{2b}}\right)$$

Sätter vi in dessa i (*) får vi att

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)=\frac{dn_1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_{1a}}-\frac{1}{R_{1b}}\right)+\frac{dn_2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_{2a}}-\frac{1}{R_{2b}}\right)=0 \qquad (**)$$

Vi utnyttjar nu även sambandet mellan linsmakarensformel och uttrycken från a):

$$\frac{1}{f_1}=(n_1-1)\left(\frac{1}{R_{1a}}-\frac{1}{R_{1b}}\right)=\frac{1}{f\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)}\rightarrow\left(\frac{1}{R_{1a}}-\frac{1}{R_{1b}}\right)$$

$$=\frac{\delta_2}{\delta_2-\delta_1}\,\frac{(n_1-1)}{f}$$

$$\frac{1}{f_2}=(n_2-1)\left(\frac{1}{R_{2a}}-\frac{1}{R_{2b}}\right)=\frac{1}{f\left(1-\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}\rightarrow\left(\frac{1}{R_{2a}}-\frac{1}{R_{2b}}\right)$$

$$=\frac{-\delta_1}{\delta_2-\delta_1}\,\frac{(n_2-1)}{f}$$

Sätter vi in dessa i (**) får vi att

$$\frac{dn_1/d\lambda}{n_1-1}\frac{\delta_2}{\delta_2-\delta_1}=\frac{dn_2/d\lambda}{n_2-1}\frac{\delta_1}{\delta_2-\delta_1}$$

$$\rightarrow \delta_1\frac{n_1-1}{dn_1/d\lambda}=\delta_2\frac{n_2-1}{dn_2/d\lambda} \qquad (***)$$

Här kan vi nöja oss med att beräkna den sökta kvoten

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{n_2-1}{n_1-1}\frac{dn_1/d\lambda}{dn_2/d\lambda}$$

eller välja att identifiera δ_1 som en parameter som enbart beror på lins 1, och δ_2 som en parameter som enbart beror på lins 2. I det senare fallet måste (***) vara identiskt med en konstant eftersom vänsterledet är oberoende av högerledet (samma argument som används i metoden ”separation of variables”, se fourierkursen, calculus, eller PDE-kursen)

$\delta_1\frac{n_1-1}{dn_1/d\lambda}=\delta_2\frac{n_2-1}{dn_2/d\lambda}$ = konstant

För enkelhetens skull kan vi välja parametrarna δ_1 och δ_2 så att konstanten blir 1, och då erhålls

$$\delta_1=\frac{1}{n_1-1}\frac{dn_1}{\lambda}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{n_2 - 1}\frac{dn_2}{\lambda}$$

Samma uttryck går att hitta i en gammal relik från 80-talet, med den smått komiska titeln ”Introduction to modern optics by Grant R. Fowles” – optik har ändå funnits omkring ett tag, vilket man kanske inser när man blickar tillbaka till Fresnel och gänget 😉

c) Vi sätter in de givna värdena på brytningsindexet och dispersionen i den sökta kvoten från uppgift b)

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}\frac{dn_1/d\lambda}{dn_2/d\lambda} = 0.50$$

$$\rightarrow f_1 = f\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) = \frac{f}{2}$$

$$\rightarrow f_2 = f\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) = -f$$

Som tidigare, fokallängderna kan även uttryckas med hjälp av linsmakarens formel

$$f_1 = \frac{1}{(n_1 - 1)(1/R_{a1} - 1/R_{b1})} = \frac{R_{a1}}{2(n_1 - 1)} \rightarrow R_{a1} = 2(n_1 - 1)f_1$$
$$= 52\ mm$$

$$f_2 = \frac{1}{(n_2 - 1)(1/R_{a2} - 1/R_{b2})} = \frac{-R_{b2}}{2(n_2 - 1)} \rightarrow R_{b2} = -2(n_2 - 1)f_2$$
$$= 136\ mm$$

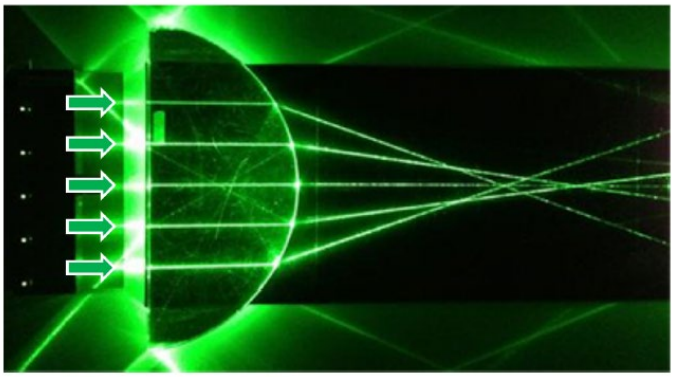
Men över hur stort våglängdsintervall är ovan design giltig för (överkurs)? Dvs, hur mycket ändras f som funktion av λ? Det är inte så enkelt som ovan får det att verka. Det är nämligen så att dn/dλ också varierar med våglängd! Mellan 400 till 700 nm, jämfört med designvåglängden på 550 nm, ändras både f_1 och f_2 med ca ±10 %. Trots detta för blir variationen för den sammanlagda fokallängden, f, ca 1 %! Fantastiskt!

3. HiRiSE

a) PSFen (point-spread-function) för ett avbildande system är intensitetsfördelningen i det plan man betraktar avbildningen (t.ex. i det plan man har placerat kamerans detektorarray) från *en* punktkälla på objektet man avbildar. Vanligen väljer man den punktkälla på objektet som ligger i rakt-framriktningen, alltså längs det avbildande systemets symmetriaxel (kameror och andra avbildande system är nästan alltid rotationssymmetriska).

Det visar sig att under paraxiella approximationen ger alla punktkällor på objektet samma intensitetsfördelning i bildplanet, bara centrerad i olika positioner. Detta möjliggör en effektiv numerisk simuleringmetod för summeringen av intensitetsfördelningarna från alla objektets punktkällor: man *faltar PSFen med den ”perfekta” bilden* (en förstorad/förminskad version av objektet, så som bilden sett ut om ljuset från varje punktkälla på objektet kunnat fokuseras ned till en oändligt skarp punkt i bildplanet). Denna metod att snabbt beräkna intensitetsfördelningen i bildplanet från objektets alla punktkällor (eller åtminstone dem vi har med i vår samplade bild av objektet) är standardmetoden för att beräkna hur en avbildning blir i ett optiskt system. (bara faltning: 1 p, PSF = 1.5p, snabb metod 0.5p)

b) PSFen ska ha en så liten utbredning som möjligt, alltså vara så punktformig som möjligt. Detta kräver att linsen/spegeln utför bästa möjliga fokusering av ljuset från punktkällan. I HUPP3b märker vi att detta inte är fallet om linsens/spegelns fasmodulering ges av det vanliga uttrycket. Det beror på spegelns stora diameter i förhållande till dess fokallängd. Den paraxiella approximationen gäller därför inte, och det vanliga uttrycket för fasmoduleringen är inte tillräckligt exakt eftersom det bygger på att vi antar paraxiella förhållanden. Resultatet blir att linsen/spegeln blir för stark i periferin så att perifera strålar bryts för kraftigt. Detta kallas *sfärisk aberration*, och leder till ett oskarpt fokus. Figuren nedan visar ett experimentellt exempel från KTH; de yttersta strålarna fokuseras på för kort avstånd från linsen så att det inte finns något plan där allt ljus som går genom linsen är fokuserat till en liten prick.



Korrigeringen av fasmoduleringsfunktionen innebär följaktligen att fasmoduleringen görs något mindre snabbt ökande i periferin av linsen så att de perifera strålarna avlänkas något mindre kraftigt och därför möter de mer centrala strålarna i ett gemensamt, skarpt, fokus.

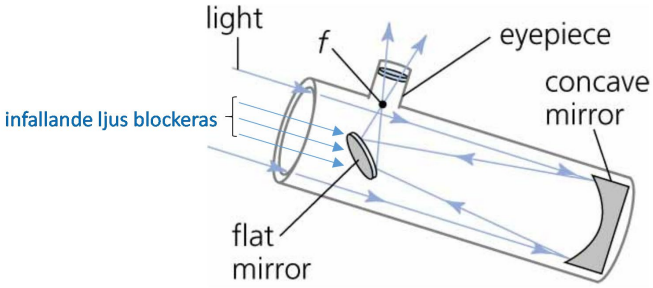
c) I HUPP3b använde vi först den okorrigerade, paraxiella, fasmoduleringen för linsen/spegeln. Vi såg då att PSFen blev stor och blaffig och inte alls liten och skarp som önskat. Den blaffiga PSFen är väntad med tanke på diskussionen i uppgift (b) ovan, eftersom ljuset från olika radiella positioner på linsen/spegeln fokuseras på olika avstånd från linsen. (1p)

Eftersom PSFen är intensitetsfördelningen från *en* punktkälla på objektet byggs den totala bilden upp genom att man summerar PSEerna från alla punktkällor. Därför kan inte den totala bilden innehålla detaljer som är väsentligt mindre än utbredningen av PSFen. En blaffig PSF innebär alltså att den totala bilden av objektet blir suddig, där kanske bara de större detaljerna hos objektet är urskiljbara. (1 p, om bara ”suddig” = 0.5p)

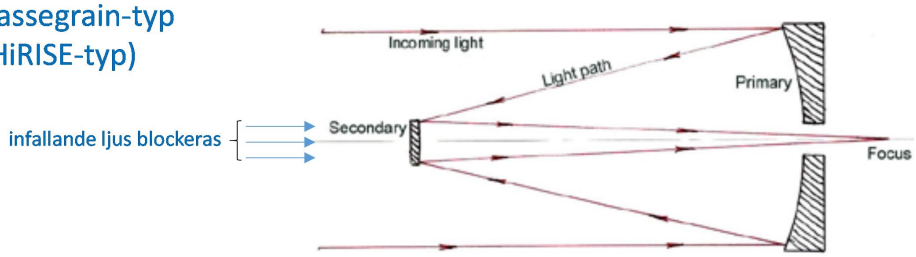
d) Spegelteleskop har många fördelar jämfört med linsteleskop. En uppenbar nackdel är dock att spegeln reflekterar tillbaka ljuset i samma riktning det kom in. För att inte observatören eller kameran ska blockera det infallande ljuset har man olika fiffiga arrangemang med en mindre sekundärspegel som skickar iväg ljuset till en plats där det kan observeras utan att observatören själv blockerar ljuset, se figuren som visar två vanliga typer av spegelteleskop. Sekundärspegeln blockerar dock oundvikligen själv en del av det infallande ljuset, och det är denna ljusblockering vi simulerar med den centrala blockeringen.

HiRISE-teleskopet svarar för övrigt närmast mot den strålgång man har i Cassegrain-teleskopet.

Newton-typ

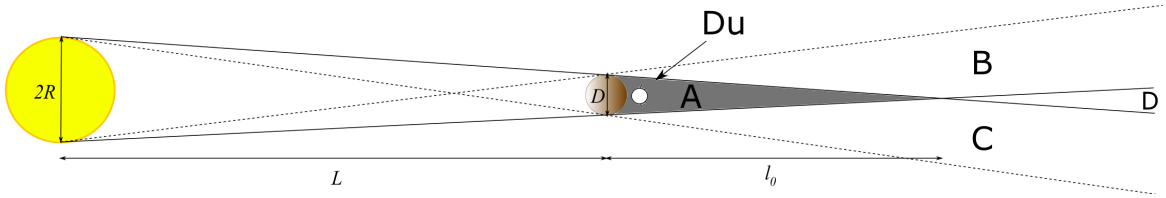


Cassegrain-typ
(HiRISE-typ)



4. Skuggor

a) Låt oss först skissa upp situationen:



För att förstå oss på intensitetsfördelningen av solljuset bakom trädet får vi dela upp solen i dess respektive punktkällor. Varje punktkälla sänder ut en sfärisk våg som vid jorden kan approximeras med en plan våg. När en plan våg träffar trädet kan fältet precis bakom trädet uppskattas med TOK-resonemang: $E_{ut} = T(x,y)E_{in}$ där $T(x,y) = 0$ där det är träd och 1 överallt annars. I detta resonemang skapas en oändligt lång skugga i formen av trädet sett från respektive punktkälla. Eftersom punktkällorna finns överallt på solen som har en begränsad storlek hamnar alla dessa skuggor inom de yttersta, streckade linjerna i skissen ovan. Intensiteten från olika punktkällor adderas och inte fälten eftersom solljus är inkoherent.

Men, kan trädet verkligen ses som en TOK och hur långt bakom trädet kan denna relation för ut-fältet användas?? Det är sant att de diffraktiva effekterna i trädets skugga blir starkare och starkare ju längre från trädet vi kommer. Om vi jämför med avståndet som krävs för att använda Fraunhofer approximationen: $L \gg \frac{D^2}{4\lambda} \approx 125$ km så inser vi att diffraktiva effekter sker på betydligt större avstånd än de vi är intresserade av här. Alltså är TOK-resonemanget en ok approximation i det här scenariot.

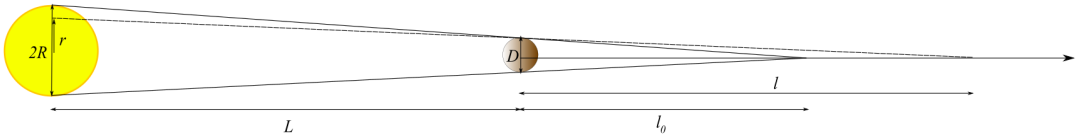
Det område där skuggorna producerade av samtliga punktkällor överlappar är betecknat ”A”. Hit når inget solljus och är därmed det ”säkra” området. Längden l_0 fås via likformighet: $l_0 = \frac{DL}{2R} \approx 53{,}6$ m. Områdena B, C och D är delvis belysta av solen och kommer präglas av en intensitet som ökar ju längre ut mot de sträckade linjerna man kommer samt ju längre bort från trädet man går.

Står man i område B och tittar mot solen ser man dess övre del i bilden, undre om man står i område C och i område D ser man både övre och undre delen. Nedan är en simulerad trädskugga i matlab:

Längre bort:

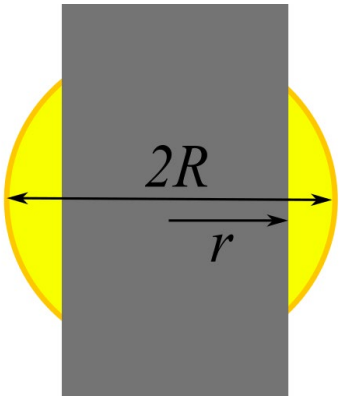
Här också med det helt svarta området förtydligat (längd 53,6 m, bredd vid start 0,5 m, alltså ej sama skala vertikal vs. horisontell):

b) För att kunna säga något om den exakta intensiteten bortanför 53 m bakom trädet behöver vi ställa upp lite relationer:



På avståndet l mitt bakom trädet syns delar av solen utanför avståndet r:

Intensiteten som landar i punkten på avståndet l mitt bakom trädet är summan av intensiteterna (ty solljus inkoherent) från samtliga synliga punktkällor på solen, sett från punkten l. Alltså, intensiteten i punkten l är proportionell mot den synliga arean på solen. Intensiteten kan vi därmed räkna ut som ($I_0 = 1{,}36$ kW/m^2 är intensiteten från en fullt synlig sol):



$$I(r) = I_0 \frac{4}{\pi R^2} \int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Det kan vara användbart att normalisera: $R = 1$ och $a = r/R$ och vi får:

$$I(a) = I_0 \frac{4}{\pi} \int_a^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Nu relaterar vi a till l (likformighet):

$$\frac{r}{L} = \frac{D}{2l} \rightarrow \left(a = \frac{r}{R}\right) \rightarrow a = \frac{DL}{2lR}$$

Vi vet att vampyren tål upp till 300 W/m^2 och får det motsvarande avståndet bakom trädet genom att hitta a för vilket följande gäller:

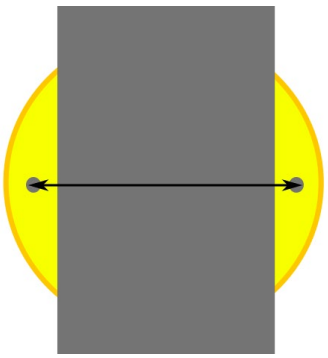
$$300\ \mathrm{W/m^2} = 1{,}36\ \mathrm{kW/m^2} \frac{4}{\pi} \int_a^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$\frac{300\ \mathrm{W/m^2}}{1{,}36\ \mathrm{kW/m^2}} = \frac{4}{\pi}\int_a^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

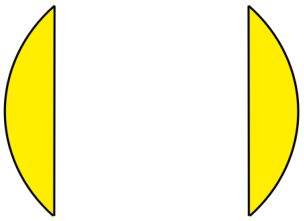
$$0{,}22 = \frac{4}{\pi}\int_a^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Läser vi ut a från grafen vid y=0,22 fås $a \approx 0{,}66$ som via $l = \frac{DL}{2aR}$ ger $l = 81{,}2$ m.
Befinner vi oss inom ca 80 m från trädet bör intensiteten vara lägre än 300 W/m^2 och det bör gå bra att ta sig till nästa träd 70 m bort om skuggan sträcker sig i den riktningen.

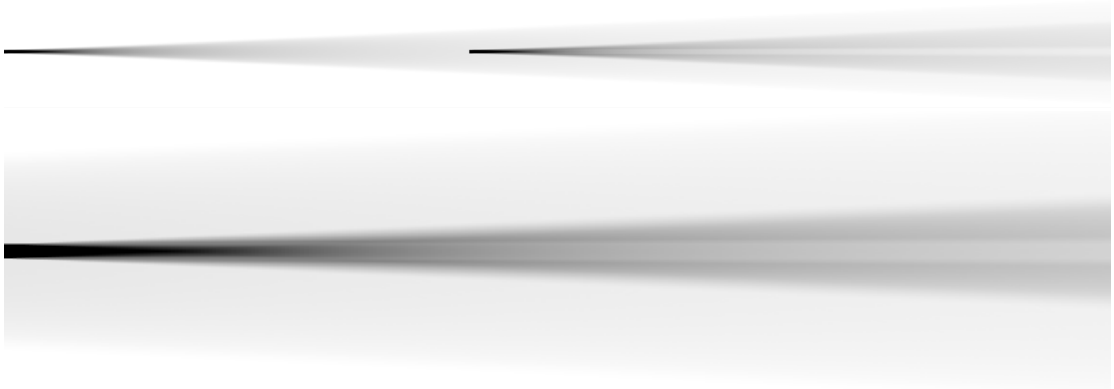
c) Eftersom det andra trädet är på ett avstånd längre än $l_0 = 53{,}6$ m från det första, och befinner sig i område "D" kommer dess perspektiv av solen se ut något såhär:



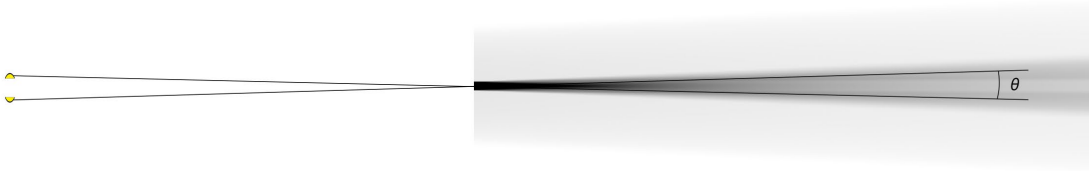
Effekten av att solen är delvis skymd av det första trädet blir alltså ekvivalent med om det andra trädet istället blev belyst av två lampor av följande form och separation (vänster):



Naturligt uppkommer därmed en skugga för respektive lampa. Simulerat i matlab fås någonting sånt här:



Här syns att skuggan är tvådelad från det andra trädet. Vinkelseparationen fås från vinkelseparationen mellan lamporna, eller snarare, tyngdpunkterna mellan de synliga delarna av solen:



Vi kan approximera tyngdpunktens position r_t i solsegmentet som $r_t = \frac{r+R}{2}$. Vinkelseparationen mellan solsegmenten på de olika sidorna om det första trädet, sett från det andra trädet, blir då: $\theta \approx \frac{2r_t}{L}, r_t = \frac{r+R}{2}, r = \frac{DL}{2l}, l = 70$ m. Vinkelseparationen mellan solsegmenten, och således de två skuggorna, blir $\theta \approx 0{,}47^o$.

Tvåskuggseffekten är enkel att testa själv. Hitta ett träd och en lågt stående sol och placera dig själv en bit bakom trädet så att du skymtar solen på båda sidor trädet. Du bör nu ha två skuggor!

5. Stokes-parametrarna

Lösningsförslag

a

Fältet ska propagera genom en polarisator med godtycklig vinkel, α. Vi måste alltså först projicera fältet mot polarisatorns axel, α, sen använda polarisator och till slut projicera tillbaka fältet

$$\vec{E}(\alpha) = \mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{P}\mathbf{R}(\alpha)\vec{E}_{start}.$$

Där den total matrisen för projektionerna och polariseringen är

$$\mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{P}\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{P}\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha)\end{bmatrix}$$

Vilket ger oss $\vec{E}(\alpha)$

$$\vec{E}(\alpha) = \begin{bmatrix}E_x\cos^2(\alpha) + E_y\cos(\alpha)\sin(\alpha)\\ E_x\cos(\alpha)\sin(\alpha) + E_y\sin^2(\alpha)\end{bmatrix}.$$

Intensiteten vid detektor blir

$$I(\alpha) = \left|\vec{E}(\alpha)\right|^2 = \left|\vec{E}_x(\alpha)\right|^2 + \left|\vec{E}_y(\alpha)\right|^2.$$

Vi räknar ut vardera komponenter först

$$\left|\vec{E}_x(\alpha)\right|^2 = E_{0x}^2\cos^4(\alpha) + E_{0y}^2\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) + E_{0x}E_{0y}\cos^3(\alpha)\sin^3(\alpha)e^{i(\epsilon_x-\epsilon_y)} + E_{0x}E_{0y}\cos^3(\alpha)\sin^3(\alpha)e^{i(\epsilon_y-\epsilon_x)}.$$

Notera att vi tar absolut belopp av komplexa tal, $|A|^2 = A\overline{A}$. När vi lägger ihop två termer med samma fas så kommer fas termen att ta ut sig själv då den multipliceras med sitt konjugat. Men när vi har termer med olika fas så kommer vi få kvar en term med skillnaden i fas. Utnyttja Eulers identiteter för skriva om till termen med fasskillnanden till en cosinus

$$e^{i(\epsilon_x-\epsilon_y)} + e^{i(\epsilon_y-\epsilon_x)} = 2\cos(\epsilon_y - \epsilon_x)$$

$$\left|\vec{E}_x(\alpha)\right|^2 = E_{0x}^2\cos^4(\alpha) + E_{0y}^2\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) + 2E_{0x}E_{0y}\cos^3(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\epsilon_y - \epsilon_x).$$

På samma sätt erhåller vi andra komponenten

$$\left|\vec{E}_y(\alpha)\right|^2 = E_{0y}^2\sin^4(\alpha) + E_{0x}^2\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) + 2E_{0x}E_{0y}\cos(\alpha)\sin^3(\alpha)\cos(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

Lägger man ihop dem och utnyttjar ett gäng trigonometriska ettor och formeln för dubbla vinkel så får man till slut

$$I(\alpha) = E_{0x}^2\cos^2(\alpha) + E_{0y}^2\sin^2(\alpha) + E_{0x}E_{0y}\sin(2\alpha)\cos(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

b

Utnyttja formlerna för dubbla vinkeln igen

$$I(\alpha) = E_{0x}^2\left(\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right) + E_{0y}^2\left(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right) + E_{0x}E_{0y}\sin(2\alpha)\cos(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

$$I(\alpha) = \left(\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}\right) + \left(\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{2}\right)\cos(2\alpha) + E_{0x}E_{0y}\sin(2\alpha)\cos(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

Vi kan nu identifiera parametrarna

$$A_0 = \left(\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}\right), \quad A_1 = \left(\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{2}\right), \quad A_2 = E_{0x}E_{0y}\cos(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

c

Då cos är en jämn funktion så vet vi bara storleken på fasförskjutningen mellan x och y komponenten

$$\cos(\epsilon_x - \epsilon_y) = \cos(\epsilon_y - \epsilon_x).$$

Men vi vet inte vilken av komponenterna som ”kommer” före den andra, det vill säga vi kan inte avgöra om ljuset har högerhänt eller vänsterhänt polarisering.

d

Om vi förskjuter fasen mellan komponenterna med $\frac{\pi}{2}$ så blir cos till $-\sin$ i den tredje termen

$$I(\alpha) = \left(\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}\right) + \left(\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{2}\right)\cos(2\alpha) - E_{0x}E_{0y}\sin(2\alpha)\sin(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

Det vill säga den fjärde parametern blir

$$A_{2r} = -E_{0x}E_{0y}\sin(\epsilon_x - \epsilon_y)$$

där vi nu kan läsa ut ett tecknet på A_{2r} för att veta vilken komponent som "ligger" före eller efter i fas!

e

$$I = E_{0x}^2 + E_{0y}^2.$$
$$M = E_{0x}^2 - E_{0y}^2.$$
$$C = 2E_{0x}E_{0y}\cos(\epsilon_x - \epsilon_y).$$
$$S = -2E_{0x}E_{0y}\sin(\epsilon_x - \epsilon_y).$$

För x-polariserat ljus

$$I = 1, \quad M = 1 \quad C = 0 \quad S = 0.$$

För högerhänt cirkulär polariserat ljus

$$I = 1, \quad M = 0 \quad C = 0 \quad S = -1.$$

För opolariserat ljus

$$I = 1, \quad M = 0 \quad C = 0 \quad S = 0.$$

C och S blir noll då $\epsilon_x - \epsilon_y$ varierar snabbt. Vi behöver två argument för att komma fram till denna slutsats. Ett: Då vi detekterar intensiteten långsammare än den snabba variationen för $\epsilon_x - \epsilon_y$ så kommer den totalt detekterade fasförskjutningen att vara från många samplingar fasvariationen. Två: Då vi antar att fasvariationen är "helt" slumpmässig för opolariserat ljus så kommer vi att detektera lika mycket av alla möjliga fasförskjutningar.

Vi kommer alltså detektera medelvärdet av cos och sin. Vilket båda är 0.

För den uppmärksamma tentamen skrivaren så märker man att parametrarna för opolariserat ljus inte kan uppfylla ekvationen vi fick i uppgift g för Poincaré sfären. Enbart om man har helt polariserat ljus så kommer polarisations tillståndet att ligga på ytan av Poincaré sfären. Har man ett tillstånd som hamnar inuti sfären så har man en viss del opolariserat ljus. Så Stokes parametrarna ger oss ett mått på hur stor del av ljuset som är polariserat!