Tentamen i Optik FFY091 - tisdag 15:e mars 2022, kl. 14:00-18:00

Jourhavande lärare **Lars Persson, tel. 0720-454454, finns på plats ca kl. 15 och 17** för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs inte så många ord!
- Gör egna rimliga antaganden och motivera dessa där det behövs.

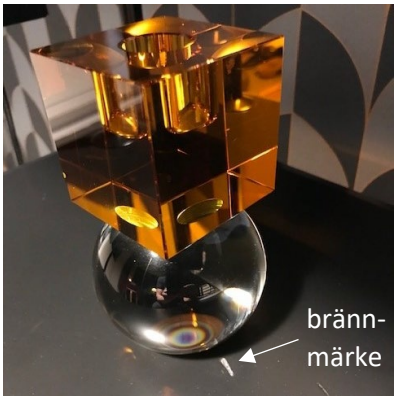
Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).
Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.
På kurshemsidan publiceras lösningsförslag senast torsdag.

Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail till Åsa Haglund, e-mail: asa.haglund@chalmers.se.

---

1. Optiskt konstverk skapar brännmärke? (11p)

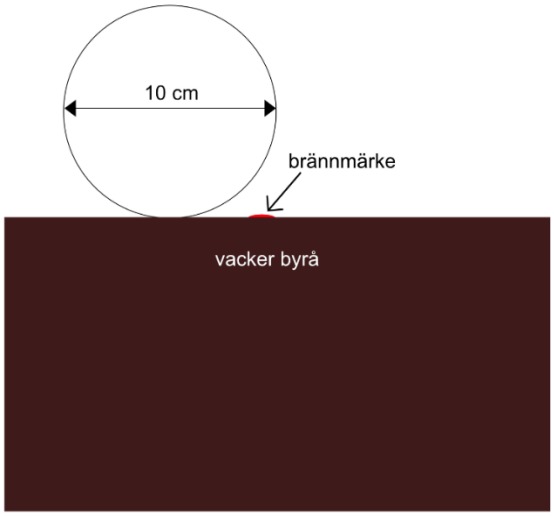
En vän, utan att nämna några namn, köpte ett dekorativt konstverk att placera på den nyinköpta svartmålade byrån nära fönstret, se figur nedan. Redan nästa dag upptäcktes ett brännmärke på den nya byrån precis bredvid konstverket. Vännen utbrast då, eftersom hen saknar optik-kunskaper,
- Men hur har detta uppstått?!



a) Med dina optik-kunskaper förklara hur du tror brännmärket har uppstått genom att beräkna den maximala ljusintensiteten glaskulan kan ge upphov till på byrån. Du kan utgå ifrån den förenklade skissen av konstverket nedan, d.v.s. att det enbart består av en sfärisk glaskula. Anta att den paraxiella approximationen gäller, att solintensiteten på jorden inomhus är ca 1 000 W/m^2 samt att det krävs en intensitet på ca 10 MW/m^2 för att bränna svartmålat trä. Avståndet mellan jorden och solen är 150 miljoner km och solens diameter är 1.4 miljoner km. Du kan vidare anta att fokallängden, f, för en sfärisk kula bestäms av följande uttryck:

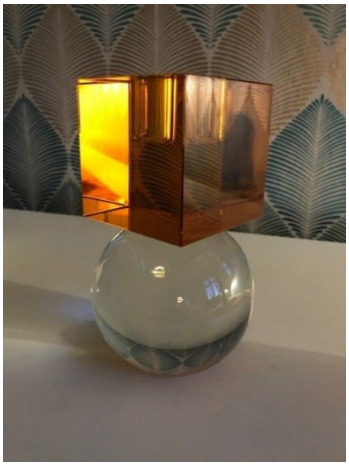
$$\frac{1}{f} = (n_{glas} - 1)\frac{2}{r_{glaskula}}$$

Där n_{glas} är brytningsindex för glaskulan (1.33) och $r_{glaskula}$ är glaskulans radie.



(5p)

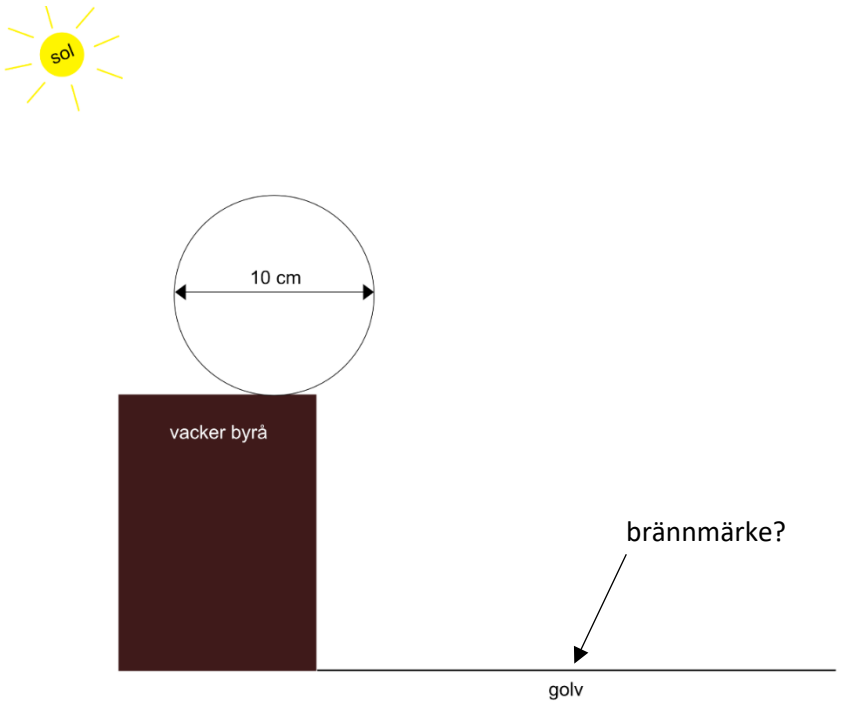
b) Byrån var mörkgrå. Är det lika stor risk, mindre risk eller större risk för brännmärke på byrån om den vore vitmålad, d.v.s. om den placeras på en bänk som på fotot nedan? Motivera ditt svar. Ledtråd: fundera över vilken skillnad det är på hur mycket ljus som reflekteras eller absorberas mot en yta som vi upplever som svart eller vit.



(2p)

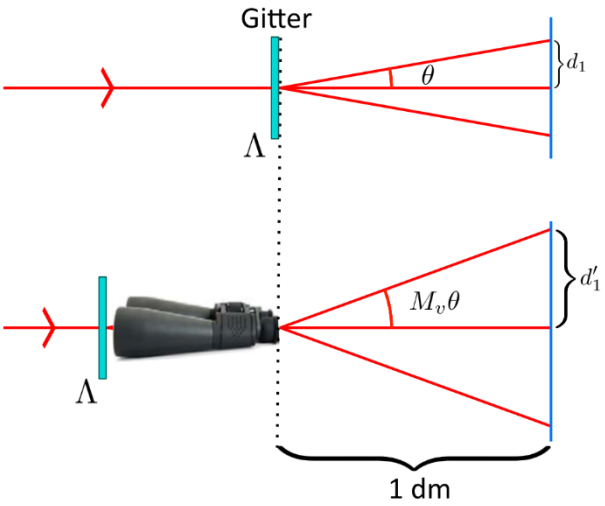
c) Är risken den samma, större eller mindre för ett brännmärke på bänken om glas-kulan hade haft en större diameter? (3p)

d) Varför är det en mindre risk att få ett brännmärke på golvet om man placerar glaskulan nära kanten av byrån så att ljuset skapar en ljusfläck på golvet istället för på bänken? Anta samma läge på solen, se enkel illustration i figur nedan. Förklara detta med hjälp av ett enkelt stråldiagram (inga beräkningar!). (1p)



2. Diffraktion och paraxiella strålar? (10p)

I labb D fick du i uppgift att ta reda på en kikares vinkelförstoring med hjälp av diffraktion mot ett gitter. Vinkelförstoringen (M_v) hos en kikare är dock inte samma sak som bildförstoringen (M_b) vilket vi ska undersöka vidare i denna uppgift.



Betrakta en liknande labbuppställning som i Labb D med en röd HeNe laser ($\lambda = 633$ nm) och ett binärt spaltgitter med period $\Lambda = 12\ \mu$m. Laserns emission infaller mot gittret och träffar sedan en skärm som är placerad 1 dm ifrån gittret.

a) Beräkna avståndet d_1 mellan 0:e och 1:a diffraktionsordningen. (1p)

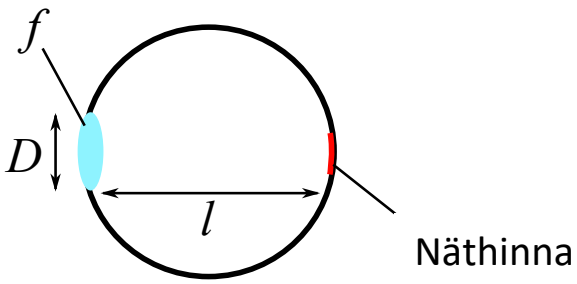
b) Liksom i laborationen placeras nu en kikare i strålgångens väg vilket ökar avståndet mellan 0:e och första diffraktionsordningen till $d_1' = 45$ mm. Beräkna kikarens vinkelförstoring M_v. (2p)

c) Kommentera på skillnaden mellan vinkelförstorningen och bildförstoringen ($M_b = d_1'/d_1$) och visa sedan att dessa generellt är lika inom den paraxiella approximationen.
Tips: $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$ *för* $x \ll 1$. (3p)

d) Antag nu att vi byter gittret till ett med period $\Lambda = 4.0\ \mu$m. Gäller den paraxiella approximationen i detta fall? Vad innebär detta för kikarens synfält? Var i synfältet är bildförstoringen som störst? Är detta något man lägger märke till när man kollar i en kikare? Varför/varför inte? (4p)

3. Det minsta du kan se (15p)

Betrakta det optiska system som är ditt öga:



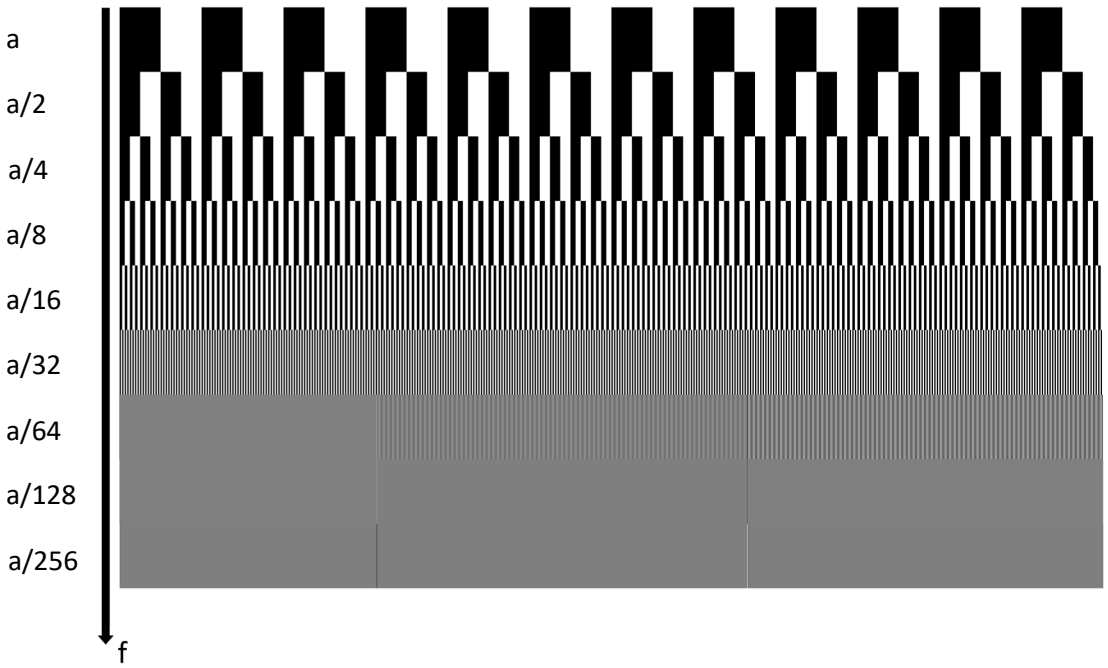
Ögonfakta: Pupilldiametern D varierar mellan 2-4 mm i ljusa förhållanden och mellan 4-8 mm i mörker. Avståndet l är ungefär 20-25 mm. På näthinnan finns en stor uppsättning ljusreceptorer som samplar intensitet och skickar informationen vidare till syncentrum. Linsen i ögat ändrar fokallängd f automatiskt när vi tittar på objekt på olika avstånd så att objektet avbildas skarpt på näthinnan.

a) Antag att den paraxiella approximationen gäller och skissa PSF:en för ditt öga med avståndet för minsta feature/spot size (i µm) markerad. (4p)

b) Använd PSF:en du skissade i a) till att uppskatta den absolut minsta detaljen du kan urskilja med just ditt öga. Förklara dina resonemang, uppskattningar och antaganden. (6p)

För dig med dålig syn: Om ditt öga av något skäl inte är välfokuserat har du förhoppningsvis en kontaktlins eller ett glasöga som gör det välfokuserat. Du kan i så fall välja att antingen göra uppgiften med avseende på ditt öga med eller utan synkorrektion. Om du kör med glasögon/kontaktlins antag i så fall att effekten av glasögat/kontaktlins är inbakad i ögonlinsen, alltså låtsas som att du inte har något glasöga/kontaktlins och att du ändå ser bra.

c) Betrakta mönstren nedan som består av återkommande svarta och vita streck av identisk bredd. f-axeln visar längden på en period för respektive mönster, där a = 10,75 mm.



Kvalitén av ett avbildningssystem bestäms ofta med hjälp av en MTF: *modulation transfer function*. MTF:en är den funktion som beskriver kontrasten av en bild som funktion av

perioden på mönstret. Rita upp en graf med f-axeln som x-axel. Uppskatta sedan kontrasten av det mönster som skapas på din näthinna för varje mönsterperiod f under samma förutsättningar som i uppg. b) och använd dessa för att skissa kontrasten som funktion av perioden i din graf. Kontrasten ges av ($0 < C < 1$):

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \approx \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{vitt}}$$

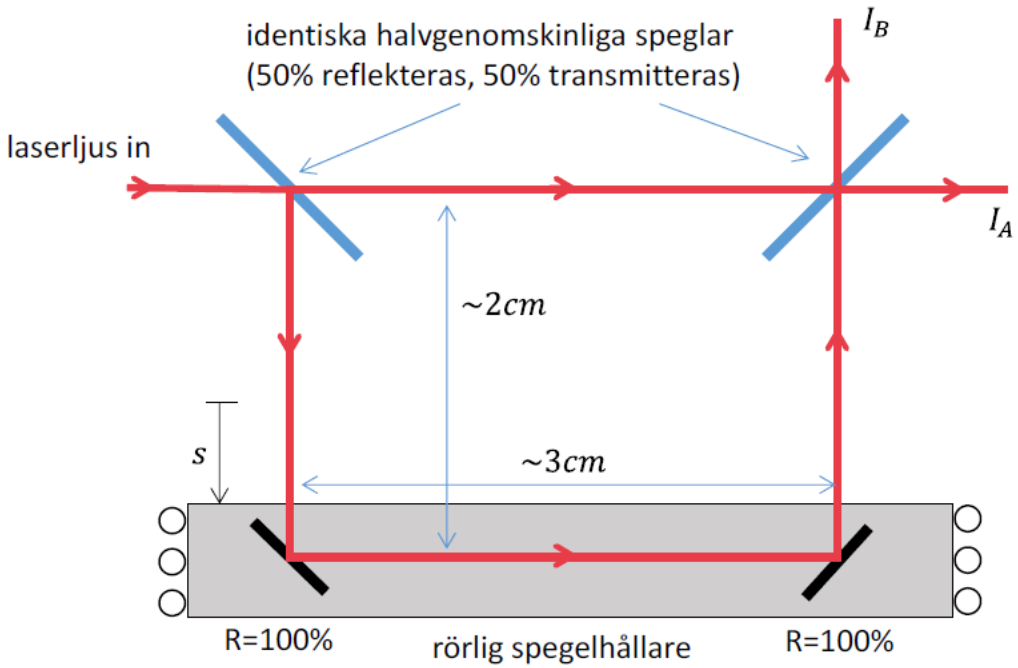
där I_{max} är den största och I_{min} den lägsta intensiteten i bilden av mönstret på din näthinna. I_{vitt} är intensiteten du får av att kolla på vitt papper.

Som du säkert inser så är skrivaren som användes för att printa den här tesen inte tillräckligt högupplöst för att korrekt skapa de 3-4 mönster med kortast period. Faktum är att du inte behöver dessa, du kan istället använda något av de andra ”korrekt” printade mönstren för att testa ditt öga på de kortaste perioderna. Hur?

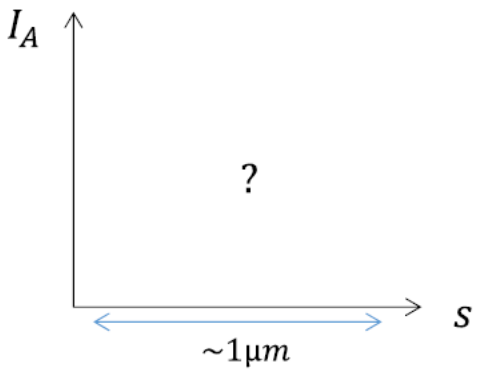
Baserat på dina svar i uppgift a) och b), är resultatet (din graf) vad du förväntar dig? Hur kan du uppskatta storleken av den minsta detaljen ditt öga kan urskilja från grafen? Vad blir den och stämmer den med din tidigare uppskattning? (5p)

4. Laserljus i Mach-Zehnder-modulatorn (10p)

Bilden nedan visar principen för en Mach-Zehnder-modulator. Ljusets gångväg i nedre armen kan ändras några mikrometer genom att de två nedre speglarna sitter på en rörlig hållare vars position s kan kontrolleras piezoelektriskt med hög precision. På så sätt kan man få intensiteten I_A hos ljuset som går åt höger efter sista spegeln att variera, därav namnet modulator.



b) Antag att infallande laserljus kommer från en perfekt laser med våglängden 600 nm. Skissa I_A som funktion av s, när s varierar över ca 1 µm. (1p)



I_B varierar (använd streckad linje så att den tydligt går att skilja från I_A). (1p)

d) Vi gör nu om försöket, den enda skillnaden är att vi ersätter den perfekta lasern med en halvledarlaser med centervåglängd 600 nm. När vi nu ändrar s ändras inte I_A det minsta. Förklara fysikaliskt varför modulatorn inte modulerar! (2p)

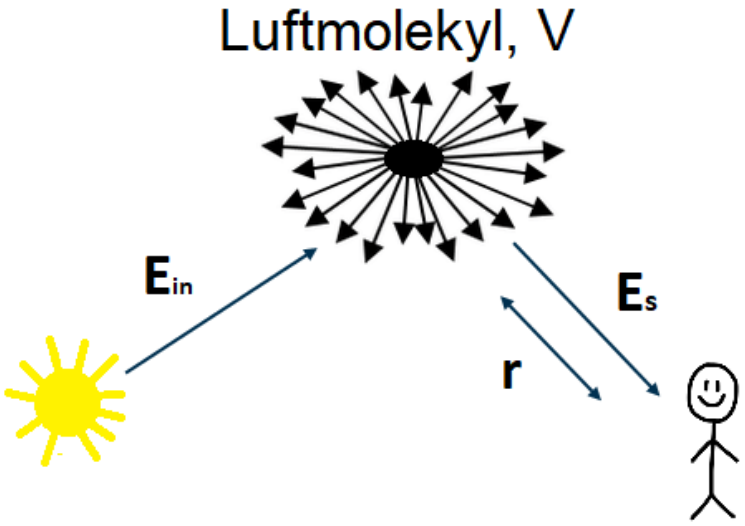
e) För att variationen av I_A ska vara tydlig när s ändras måste laserljuset som vi använder uppfylla ett villkor för en egenskap som ofta används när man karakteriserar lasern. Vilken egenskap hos lasern är det som avgör tydligheten hos variationen i I_A (den kan uttryckas antingen som frekvens eller våglängd)? (1p)

f) I den Mach-Zehnder-modulator som visas i figuren, vad måste egenskapen hos laserljuset som efterfrågas i (e) ha för största värde (storleksordning) för att variationen av I_A ska vara tydlig när s ändras? Uttryck svaret i våglängd, som är det vanliga i optiksammanhang. (2p)

5. Solnedgång på Mars (14p)

a) I optik-kursen har du lärt dig att ”höfta till” när vi gjort diverse härledningar. En annan som var en mästare på just detta var Lord Rayleigh (a.k.a. John Strutt). År 1871 publicerade han en artikel ”*On the light from the sky, its polarization and colour*”. Där kunde han med hjälp av dimensionsanalys visa att ljus sprids enligt $1/\lambda^4$ (intensitet) förutsatt att partiklarna som ljuset sprids mot har en storlek som är mycket mindre än ljusets våglängd (<λ/10) och därmed förklara varför himlen är blå. Kan du visa detta? Din uppgift är alltså att relatera ljuset som sprids, E_s, från en liten partikel till det infallande fältet, E_{in}, (exempelvis solljus) genom att använda ledningen nedan. Du kommer få ett uttryck på formen $E_s = konstant \times E_{in}$, men du måste välja konstanten så att båda sidor har samma enheter! Kolla sedan på den spridda intensiteten $I_s \sim E_s^2$ och se om du får fram Rayleighs spridningslag $I_s \sim 1/\lambda^4$.

Ledning: Eftersom partiklarna är små i förhållande till ljuset, så kommer ett infallande fält, E_{in},

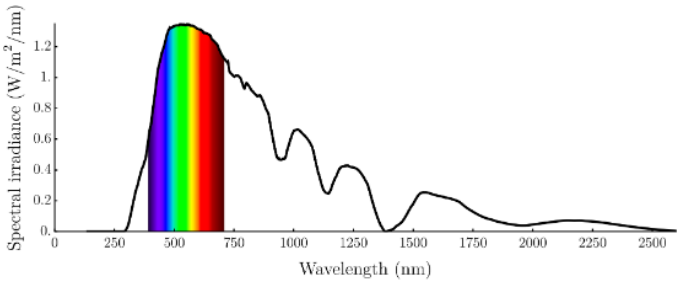


att sätta alla HF-källor på partikeln i svängning så att de har samma fas. På klarspråk betyder detta att det spridda ljuset, E_s, är proportionellt mot partikelns volym V. Det spridda fältet kan antas vara proportionellt mot det inkommande fältet. För att det spridda fältet E_s ska vara fysikaliskt måste det bevara energi och därmed vara proportionellt mot $1/r$ ($I_s \sim 1/r^2$), där r är avståndet från partikeln. Vad blir uttrycket på den spridda intensiteten $I_s \sim E_s^2$ utifrån ovan observationer, och vilken enhet måste din obestämda konstant ha, samt vilken kvantitet har vi ännu inte använt oss av som har enheten som saknas (upphöjt till något nummer)? (5p)

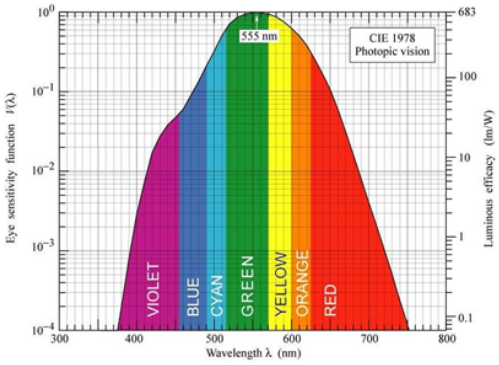
b) Baserat på a), varför är himlen blå och solnedgången röd på Jorden? (3p)

c) Efter att ha hört argumentet om varför himlen är blå från ditt svar i b) utbrister en student: ”Struntprat! Baserat på det argumentet borde himlen vara violett!”. Har studenten rätt, eller har du en förklaring? Ta gärna hjälp av nedanstående bilder som visar solspektrumet och ögonkänslighetsfunktionen (hur vårt öga upplever olika färger) för ditt argument! (2p)

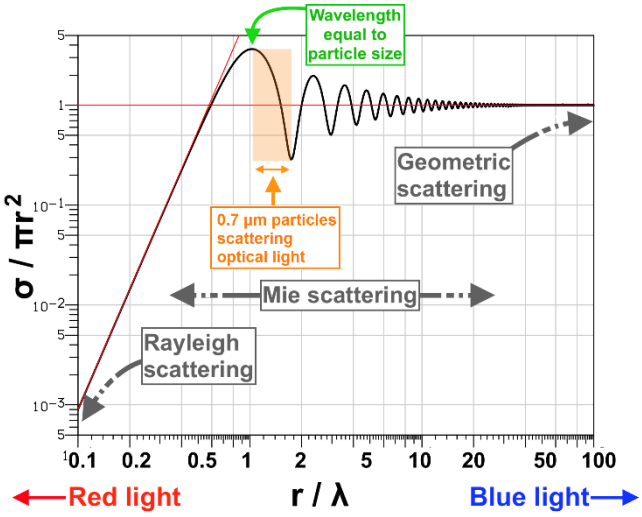
Solspektrum:



Ögonkänslighetsfunktion:



d) Rayleighspridning gäller bara för partiklar som är små i förhållande till våglängden på ljuset, r/λ<<1, där r är den karaktäristiska partikelstorleken. Mars atmosfär är ungefär 1% av Jordens, och har därmed mycket färre små molekyler jämfört med Jordens atmosfär. Däremot så finns det en massa stoftpartiklar, järnoxider, i Mars atmosfär som dras upp av vindar som härjar på Mars yta. Om storleken på stoftpartiklarna närmar sig r/λ∼1 följer ljusspridningen inte längre Rayleighs spridningslag. Ljuset följer då något som kallas Mie spridning, och om storleken på partiklarna är ännu större följer de geometrisk optik och sprider då allt ljus i princip lika mycket. Figuren ovan visar spridningstvärsnittet, σ, som relaterar det infallande ljuset med det spridda ljuset enligt $I_s \sim \sigma I_{in}$, för Rayleighspridning gäller att $\sigma \sim 1/\lambda^4$. Med hjälp av figuren nedan, kan du förklara varför himlen är rödaktig under dagen, och solnedgången blå på mars? Antag att den karaktäristiska partikelstorleken, r, på stoftet i Mars atmosfär har en storlek på omkring 0.7 µm (jämförelsevis kan det nämnas att storleken på syre- och kvävemolekyler är ca 0.3 nm). (4p)

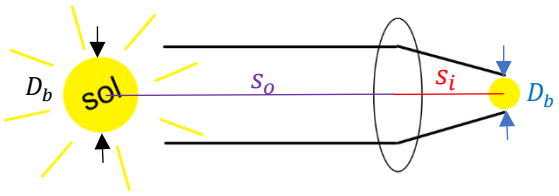


Lösningsförslag tenta i Optik FFY091 15:e mars 2022

1. Optiskt konstverk skapar brännmärke

a) Den sfäriska glaskulan fungerar som en lins som samlar ihop ljuset. Eftersom solen befinner sig otroligt långt bort har vi i princip parallellt inkommande strålar mot glaskulan. Avbildningen av solen blir därmed en fokal-längd ifrån glaskulan.

$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \rightarrow \; s_i = f$ om $s_o \rightarrow \infty$



$$D_b = |M|D_s = \frac{s_i}{s_o}D_s = \frac{f}{s_o}D_s$$

Vad är f=?

$$\frac{1}{f} = (1.33 - 1)\frac{2}{5\ cm} \rightarrow f = \frac{5\ cm}{2 * 0.33} \approx 7.6\ cm$$

$$\rightarrow D_b = \frac{7.6 \cdot 10^{-2}}{150\ milj.km} \cdot 1.4\ milj.km \approx 0.7\ mm$$

$I_{avbildning} = \frac{P_{glas-sfär}}{bildarea} = [anta\ ingen\ reflektion\ ifrån\ glas - sfär] = \frac{I_{jorden}\pi r_{sfär}^2}{\pi\left(\frac{0.7}{2}\cdot 10^{-3}\right)^2} =$

$\frac{1000\frac{W}{m^2}\cdot 0.05^2}{(0.35\cdot 10^{-3})^2} \approx 20\frac{MW}{m^2} > 10\ \frac{MW}{m^2}$ som krävs för att bränna svart trä

b) Svarta saker absorberar alla synliga våglängder mycket bra och reflekterar dem dåligt, medan för vita saker är det tvärtom. Detta innebär att en svart bänk kommer absorbera ljuset mycket effektivt → stor risk för brännmärke medan vit bänk reflekterar nästan allt ljus → liten risk för brännmärke. Om vi antar att vitt reflekterar 90% och absorberar 10% medför det att vi behöver en effekt på 10 MW/m2/0.1 = 100 MW/m2 om vi antar att svart absorberar allt ljus. I vårt fall var effekten 20 MW/m2, dvs inte tillräckligt för att bränna en vit bänk.

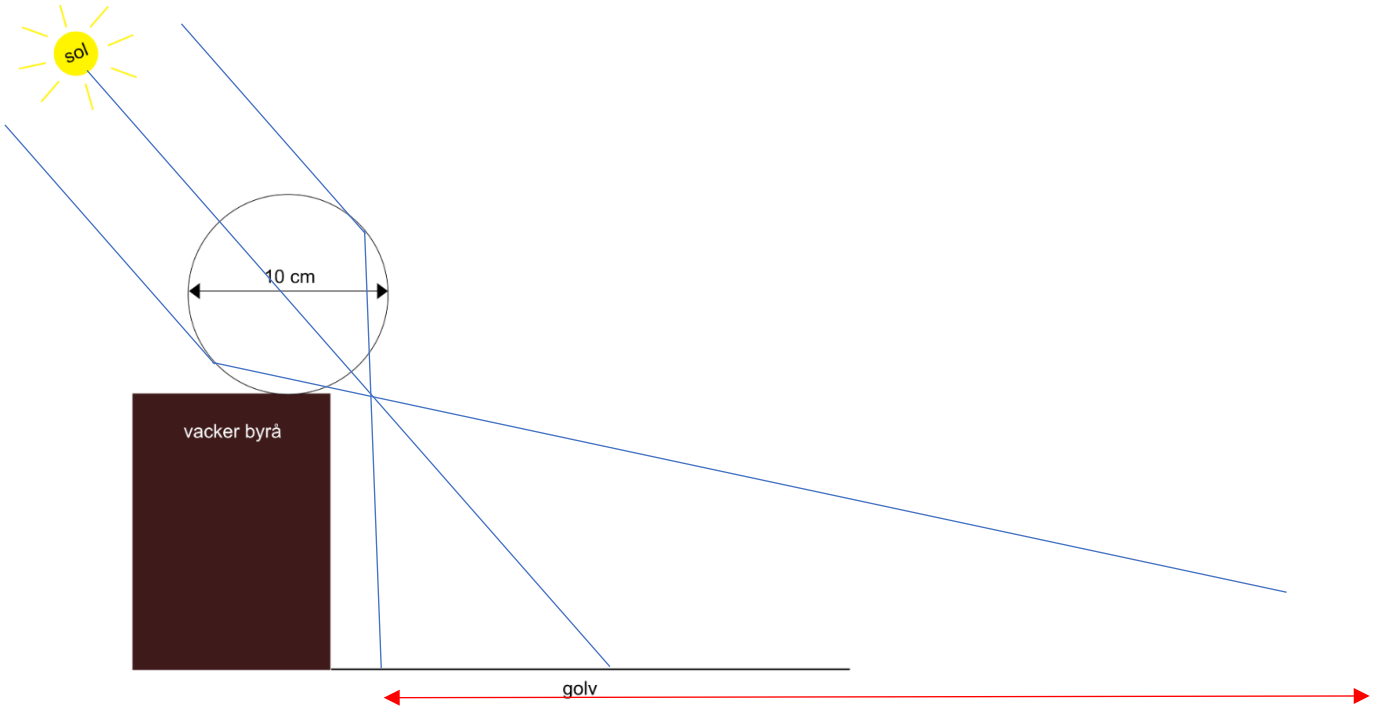
c) Större diameter → längre fokallängd → större avbildning (d.v.s. mindre ihopsamling av den optiska effekten)

Samtidigt blir uppsamlingsområdet större

$$I_{avbildning} = \frac{I_{jorden}\cdot r_{sfär}^2}{\left(\frac{f}{2s_o}D_s\right)^2} \propto \frac{r_{sfär}^2}{f^2} = \frac{r_{sfär}^2}{\left(\frac{r_{sfär}^2}{konstant}\right)^2} = konstant$$

Om vi antar att vi inte har någon sfärisk aberration, och att vi fortfarande får en avbildning i fokus (inte en spot som bestäms av minsta spotsize) så är risken den samma för en stor och en liten sfär.

d) Det blir en mindre risk för brännmärke på golvet eftersom golvet inte befinner sig i fokus till sfären och ljuset därmed är fördelat över en större area (intensiteten blir mycket lägre), se figur nedan.



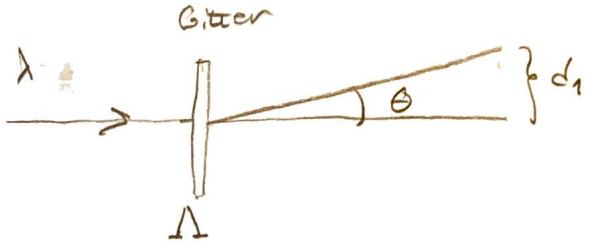
Mycket stor area jämfört avbildningen i brännpunkten därmed en mycket lägre intensitet.

Lösningsförslag Diffraktion och paraxiella strålar

Givet:

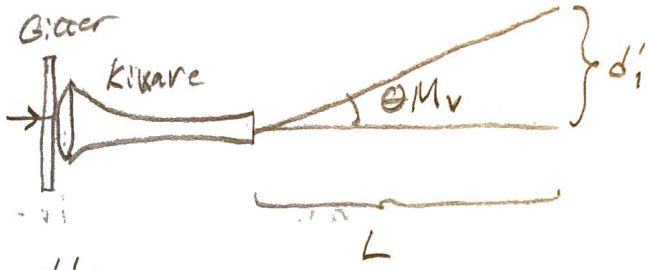
$\lambda = 633$ nm , $L = 1$ dm

$\Delta = 12$ µm



Sökt: a) d_1

b) M_V, givet att $d_1' = 45$ mm



c) Visa att $M_V \approx M_b = d_1'/d_1$ för paraxiella strålar

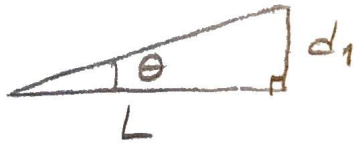
d) Paraxiell riktighet för $\Delta = 4.0$ µm

Lösning:

a) Avståndet d_1 fås genom Gitterekvationen

$$m\lambda = \Delta \sin\theta_m$$

$$(m = 1) \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{\Delta}$$



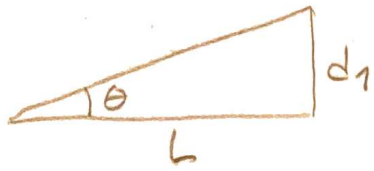
$$d_1 = L \tan\theta$$

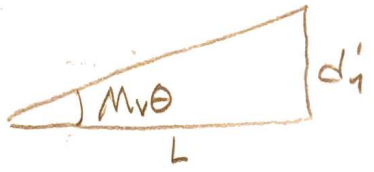
$$= L \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= L \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$$

$$= L \frac{\lambda/\Delta}{\sqrt{1 - (\lambda/\Delta)^2}} \approx 5{,}3 \text{ mm}$$

b) Simpel trigonometri ger





(1) $$\sin\theta = \frac{d_1}{\sqrt{L^2 + d_1^2}}$$

(2) $$\sin(M_V\theta) = \frac{d_1'}{\sqrt{L^2 + d_1'^2}}$$

(1) o (2) ↳

$$\frac{M_V\theta}{\theta} = M_V = \frac{\arcsin\left[\frac{d_1'}{\sqrt{L^2+d_1'^2}}\right]}{\arcsin\left[\frac{d_1}{\sqrt{L^2+d_1^2}}\right]} = 8{,}0$$

c) Bildförstoringen i detta fall är

$$M_b = \frac{45}{5{,}3} \approx 8{,}5$$

detta skiljer ca 6 % från svaret vi fick på M_V vilket i vissa fall kan ses som en godtagbar grovräkning. Vi undersöker (1) o (2) under den paraxiella approximationen $\sin x \approx x$

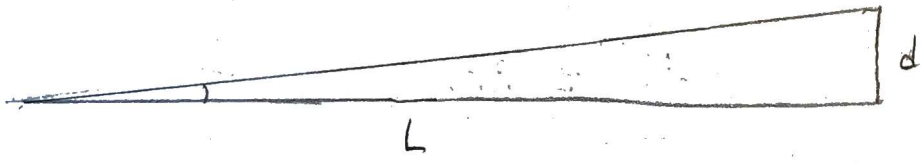
$$\theta = \frac{d_1}{\sqrt{L^2+d_1^2}} \quad (1)^*, \qquad M_V\theta = \frac{d_1'}{\sqrt{L^2+d_1'^2}} \quad (2)^*$$

(2)*/(1)*

$$\Rightarrow \quad M_v = \frac{d_1'}{d_1} \frac{\sqrt{L^2+d_1^2}}{\sqrt{L^2+d_1'^2}}$$

$$= \frac{d_1'}{d_1} \frac{\sqrt{1+d_1^2/L^2}}{\sqrt{1+d_1'^2/L^2}}$$

$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ för $x \ll 1$. Paraxiell approx. medför att $d/L \ll L$



$$= \frac{d_1'}{d_1}\left(1+\tfrac{1}{2}d_1^2/L^2\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\,d_1'^2/L^2\right)$$

$$= \frac{d_1'}{d_1} + \underbrace{O\left(\left(d_1/L\right)^2, \left(d_1'/L\right)^2\right)}_{\approx 0}$$

$$\approx \frac{d_1'}{d_1} = M_b \qquad \square$$

d) Då gitterkonstanten minskar, ökar diffraktionsvinkeln och ger

$$\theta = \arcsin(\lambda/\Lambda) \approx 9,1°$$

$$d_1 = L\tan(\theta) \approx 16 \text{ mm}$$

Detta ger i sin tur att

$$d_1' = L\tan(M_v\theta) \approx 324 \text{ mm} > L!$$

$\uparrow$ $d_1'/L \not\ll 1$

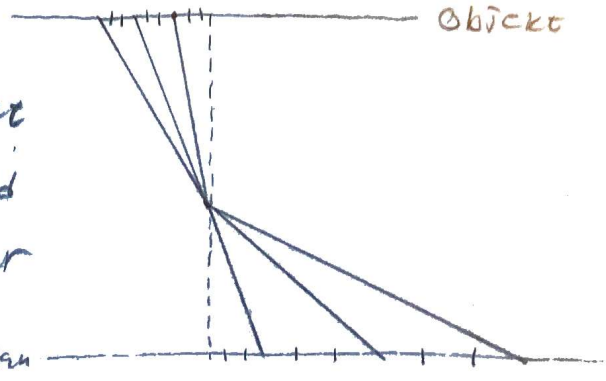
Vilket lade gett

$$M_b = \frac{324}{16} \approx 20.3$$

Detta ger ett fel på ca 150 % vilket aldrig kan anses godtagbart. Den paraxiella approximationen gäller alltså inte.

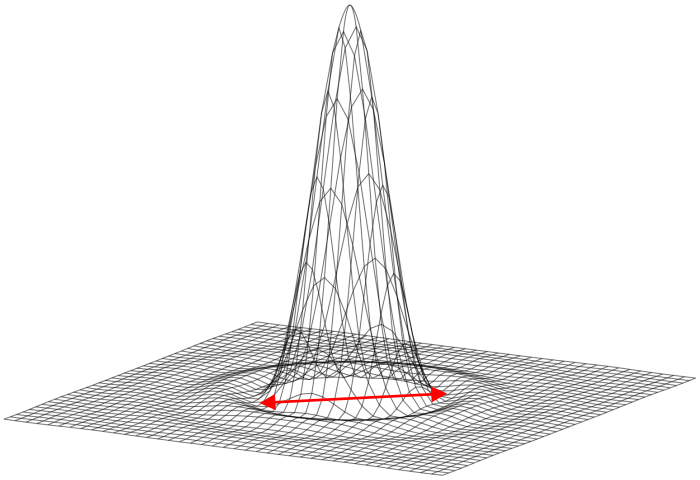
Vad vi märker är att bildförstoringen ökar med ökad infallsvinkel, givet att kikaren har konstant vinkelförstoring för alla infallsvinklar.

Det innebär att bilden blir för vriden i kanten på synfältet (se bild). Detta märks emellertid inte för det vanliga när man tittar i en kikare på grund av begränsad numerisk apertur!



3. Det minsta du kan se

a) PSF:en är den intensitetsfördelning som fås då ögat fokuserar på en enskild punkt i ett objektplan i fokus. Ögats cirkulära symmetri och det faktum att vi kan anta ett paraxiellt system innebär att PSF:en ges av ett airy mönster:

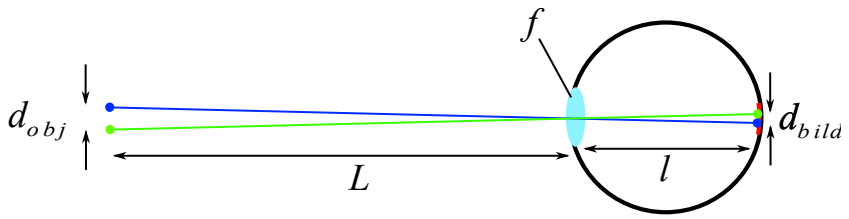


Det indikerade avståndet (röd pil) är definitionen av minsta spot-size för systemet. Vi kan beräkna denna med hjälp av tumregel 3:

$$d_f = 2{,}44\frac{\lambda l}{D}$$

Vi ser att uttrycket beror på våglängd och pupillstorlek. Olika våglängder kommer alltså avbildas med hjälp av PSF:er av olika storlekar. För en enkel uppskattning kan vi beräkna spot size för en våglängd i mitten av det synliga spektrat för en medelstor pupillstorlek. Vi antar $\lambda = 600$ nm, *D*=4 mm och *l*=20 mm och erhåller $d_f = 7{,}32$ µm.

b) PSF:en beskriver hur bilden av en punkt har en utspridd intensitetsfördelning. En punkt i objektplanet blir alltså inte en enskild punkt på näthinnan utan vi får en blur-effekt som gör att närliggande punkter smetas samman. Eftersom vi betraktar vitt inkoherent ljus så adderas enbart intensiteterna från vårt perspektiv och när två punkter avbildas inom ett avstånd av d_f på näthinnan uppstår en svårighet i att urskilja dem. Vi kan använda detta som ett villkor på hur nära två punkter i objektplanet får komma innan vi med ögat börjar se dem som en och samma punkt. Alltså, deras separation i bilden på näthinnan (d_{bild}) måste vara $\geq d_f$. Punktseparationen i objektplanet fås genom likformighet enligt bilden nedan:



$$d_{obj} = \frac{L}{l} d_{bild}$$

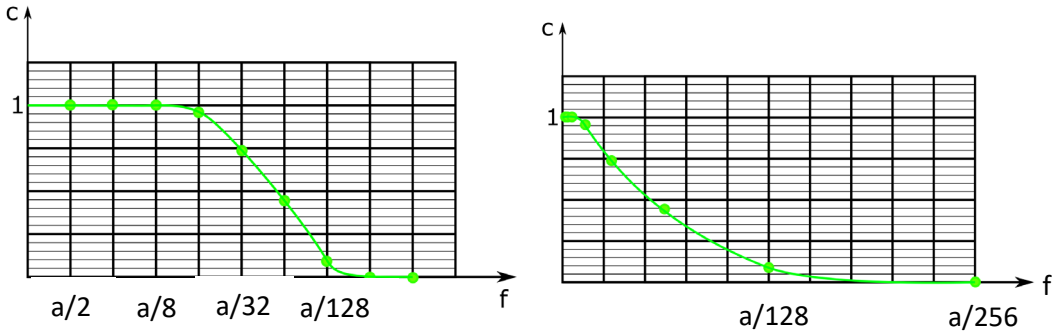
Om vi sätter in vårt villkor fås: $d_{obj} \geq \frac{L}{l} d_{bild}$

Vi inser att ju kortare avståndet *L* är ju mindre detaljer kan vi se. Men om du för ditt öga närmre och närmre den här texten så inser du att efter ett visst avstånd så blir bilden suddigare. Ditt öga kan nämligen inte justera ögonlinsens styrka till att skapa godtyckligt korta fokallängder. Det kortaste avståndet du kan skapa en skarp bild med ditt öga är just det avstånd där bilden går från skarp till suddig när du för ögat närmre den här texten. I mitt fall inträffar det på en pennas längd från papperet. Penn-längden mäter jag med mitt kårkort (eller linjal) till ungefär 15 cm. Den mista detalj jag kan urskilja får jag därmed som:
$d_{obj} \geq \frac{L}{l} d_{bild} = \frac{15}{2} 7{,}32$ µm ≈ 55 µm.

Ögonlinsens fokallängd blir på det här avståndet: $f = (\frac{1}{l} + \frac{1}{L})^{-1} = 1{,}76\text{cm}$

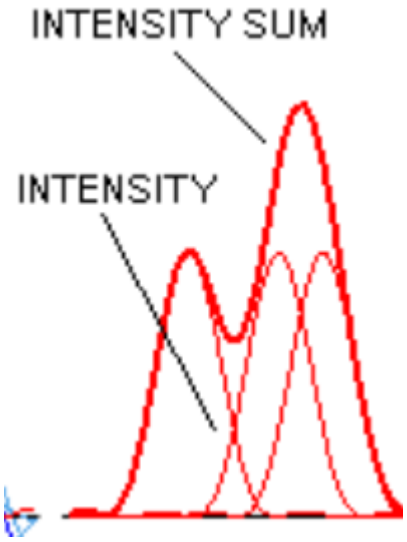
Närsynta har naturligt starkare ögonlinser (längre ögon) vilket gör att de kan ofta kan se skarpt på ännu kortare avstånd. Att kunna läsa skarpt på två cm kortare avstånd istället för att se skarpt bortom 5 m är för det mesta inte fördelaktigt.

c) MTF:en skall bestämmas under samma förutsättningar som i b), därmed skall vi använda samma avstånd $L(= 15\text{cm}$ för mig) som tidigare. Den egna uppskattningen av kontrasten man upplever är inte exakt, men approximativa värden kan dock erhållas. Man bör kunna avgöra om kontrasten är maximal, minimal eller något emellan. För de mönstren med lägst frekvens är det tydligt att man utan större problem kan särskilja strecken, alltså har vi en mer eller mindre perfekt kontrast. För mönstret med f=a/64 noterar jag att min kontrast börjar minska. Därefter ser jag även att printerns jobb varit otillräckligt. Men vi kan enkelt simulera mer detaljerade mönster genom att helt enkelt förflytta ett av de ”ok” mönstren längre bort från vårt öga. Avbildningen är linjär med bildens storlek: $d_{bild} = \frac{l}{L}\, d_{obj}$. Alltså kan vi istället för att minska d_{obj} öka L. PSF:ens effekt är ekvivalent i det här fallet eftersom det är den o-blurrade bilden faltat med PSF:en som ger det slutliga resultatet, och den o-blurrade bilden är den samma oavsett om man halverar d_{obj} eller dubblerar L. Här nedan är min skissade graf, i logaritmisk respektive linjär skala.

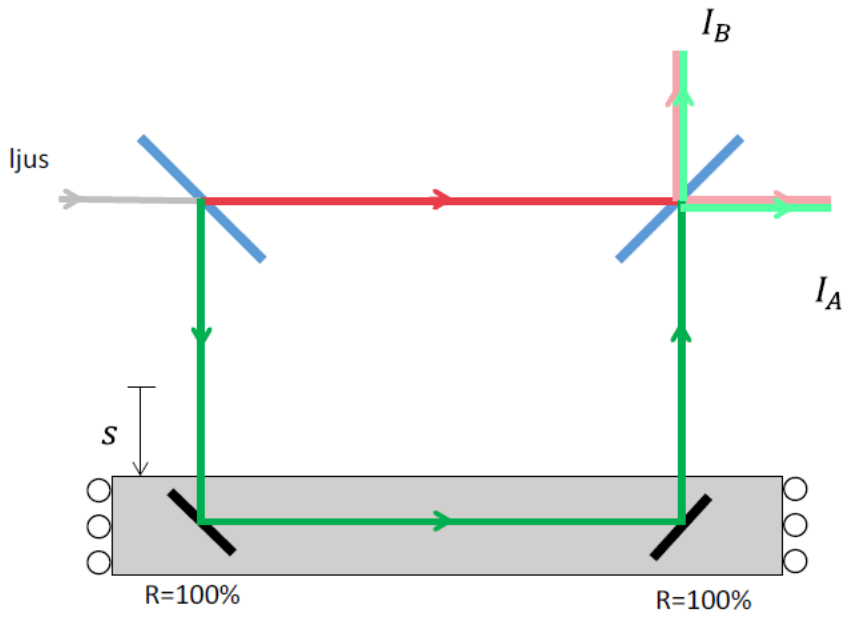


Som grafen indikerar finns ingen exakt gräns för där små saker blir osynliga, utan kontrasten av ett objekt reduceras kontinuerligt. Enligt resultatet ovan bör jag ändå kunna urskilja

mönster med period ned till a/128 = 84 µm. Det svarta (eller vita) strecket är det minsta objektet och alltså fås det minsta vi kan urskilja som 42 µm. Detta är väldigt nära det vi uppskattade i uppg. b) som, i efterhand är ett något pessimistiskt mått. Det som händer när punkter hamnar närmare än minsta spot-size i bildplanet kan beskrivas enligt bilden till vänster. Vi får helt enkelt en minskad kontrast tills avståndet mellan de avbilade punkterna är ungefär hälften av minsta spot-size. Här är kontrasten ungefär noll och två punkter blir till en. Alltså är halva spot-sizen ett lämpligare mått. Med detta hade vår uppskattning i b) också halverats till ca 34 µm, vilket hamnar på rätt sida (34<42) så som vi uppskattade minsta objektet i den här uppgiften. Resultatet kan därmed betraktas som rimligt!

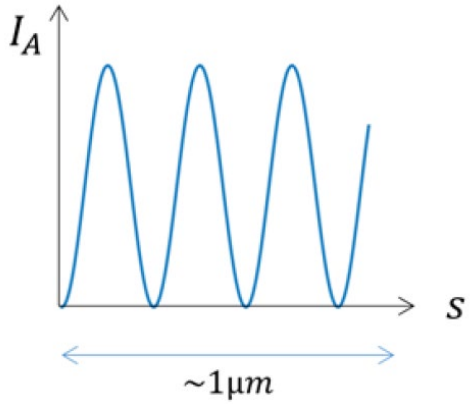


4. Laserljus i Mach-Zehnder-modulatorn

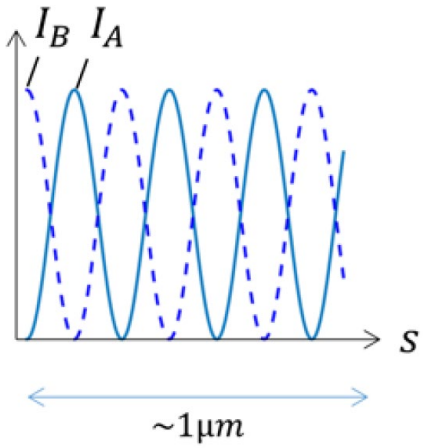


a) Mach-Zehnder-modulatorn bygger på interferens mellan ljuset som gått den övre vägen (rött i figuren ovan), och ljus som gått den nedre vägen (grönt i figuren; obs att rött och grönt bara skiljer de olika gångvägarna åt, ljuset har samma våglängd); man brukar tala om den övre och undre ”armen” hos modulatorn. När ljuset når sista halvgenomskinliga spegeln delas den i en reflekterad och en transmitterad stråle. Det gäller både ljuset i övre armen och i nedre. Ut från sista spegeln får vi alltså fyra fältbidrag, som indikerats: två åt höger - reflekterat ”grönt” och transmitterat ”rött” ljus – och vice versa uppåt. Genom att ändra s ändras propagationssträckan för det gröna ljuset, och alltså dess fas när det når sista spegeln. Det betyder att även det reflekterade gröna ljuset åt höger ändrar sin fas på samma sätt (och även det transmitterade uppåt), medan det röda ljuset som transmitteras åt höger (och reflekteras uppåt) förstås har en fix fas oberoende av s. Beroende på fasen hos det gröna ljuset kan man få destruktiv eller konstruktiv interferens med det röda ljuset, och eftersom man kan ändra fasen på det gröna ljuset godtyckligt (det gröna ljusets gångväg behöver bara kunna ändras upp till en våglängd för att uppnå detta) kan man till exempel totalt släcka ut ljuset som går åt höger eftersom amplituden hos det röda och gröna ljuset (idealt) är densamma. Då kommer allt ljus som kommer in i modulatorn att lämna sista spegeln i uppåt-riktningen.

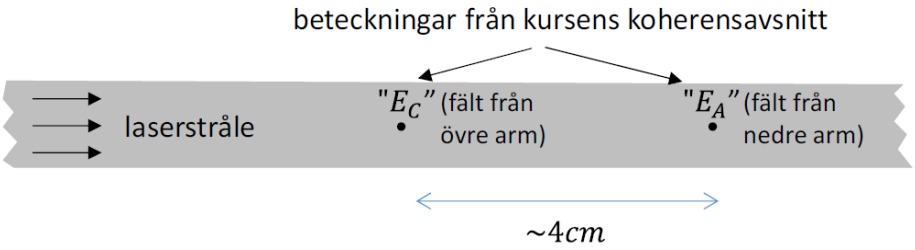
b) Vi får en periodiskt varierande utintensitet I_A . Som sades i (a) går den ner till noll när det gröna ljuset är ur fas med det röda eftersom det gröna och röda ljuset har samma amplitud. Ändras sedan gångvägen ändras också fasen, och därmed interferensen, ända tills gångvägen ändrats λ (dvs s har ändrats $\lambda/2$ eftersom ljuset går sträckan s både nedåt och uppåt). Då är vi tillbaka på total utsläckning. Alltså inträffar nollställena i I_A med perioden $\lambda/2 = 300$ nm i s, som visas i grafen:



c) Eftersom inget ljus absorberas någonstans måste intensiteten ut, $I_A + I_B$, vara lika med intensiteten på infallande ljuset, som är konstant (oberoende av s). Alltså är I_B en ”spegelbild” av I_A kring halva maxvärdet för I_A, så att summan $I_A + I_B$ är konstant:



d) Modulatorn bygger på att vi ska ha stabil interferens mellan ”röda” och ”gröna” ljuset, detta kräver en fix fasrelation. Vi ser dock av skissen av modulatorn att det gröna ljuset har gått ca 2+2 cm längre gångväg än det röda (den 3 cm långa sträckan mellan 100%-speglarna går ju även det röda ljuset, fast då mellan 50%-speglarna). Vid sista spegeln kombinerar vi alltså i praktiken fält från två positioner längs laserstrålen som är separerade med 2+2=4 cm:



För att ha en fix (förutsägbar) fasrelation över en sträcka av 4 cm måste alltså den temporala l_c vara minst av samma storleksordning. Har vi en ljuskälla med avsevärt mindre l_c varierar fasrelationen mellan det gröna och röda ljuset mycket snabbt och slumpmässigt i tiden, och en ändring av s har ingen betydelse (så länge den är försumbart liten jämfört med 4 cm) eftersom fasrelationen förblir slumpmässig. Intensiteteten I_A (liksom I_B) blir alltså konstant (oberoende av s) och lika med summan av intensiteterna från övre respektive undre arm var för sig (som om man blockerat ljuset i den andra armen). Eftersom det är detta vi observerar drar vi slutsatsen att koherenslängden hos halvledarlasern är betydligt mindre än 4 cm, vilket inte är ovanligt för denna typ av lasrar.

e) Vi har redan nämnt i (d) att det är den temporala koherenslängden l_c som måste vara tillräckligt stor för att vi ska få tydlig variation hos I_A. Det är dock sällan l_c anges direkt när man beskriver en laser, istället anger man laserns bandbredd (spektralvidd) som en ”suddighet” i laserljusets våglängd [nm] eller frekvens [kHz-THz]. Det är mest för extremt ”rena” lasrar som bandbredd anges i frekvens, och då gäller det alltså bandbredder i kHz-MHz-området, annars används våglängd.

f) Baserat på det tidigare resonemanget antar vi alltså att koherenslängden l_c är minst 4 cm för att vi ska få tydlig variation hos I_A. Det svarar mot en koherenstid $\tau_c = \frac{l_c}{c} > \frac{4\ cm}{c} = 0.1$ ns, och alltså en bandbredd (frekvens) på $\Delta\upsilon = 1/\tau_c < 10$ GHz. Vi gör om den lilla frekvensskillnaden till motsvarade våglängdsskillnad

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\Delta\nu} = \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = (-)\frac{\lambda^2}{c} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu < \frac{(600nm)^2}{3\cdot 10^8 m/s} 10GHz = 0.01\ nm$$

Bandbredden på lasern (”våglängdssuddigheten”) bör alltså vara mindre än 0.01 nm.

5. Solnedgång på mars

a) Vi finner ett uttryck för det spridda fältet, E_s, genom att notera (m.h.a. ledningen)

(1) $E_s \sim \mathrm{E_{in}}$,
(2) $E_s \sim \mathrm{V}$ (eftersom d<<λ så att infallande fält sätter alla HF-källor i svängning med samma fas),
(3) $E_s \sim 1/\mathrm{r}$ (för att bevara den totala mängden energi när det spridda ljuset propagerar utåt i en sfär, $|E_s\,|^2 \times 4\pi r^2 =$ konstant d.v.s. oberoende av r).

Lägger vi ihop ovan observationer får vi att

$$E_s = \text{konstant} \times \frac{V}{r} E_{in}$$

För att vänster- och höger-led ska ha samma dimensioner (d.v.s. Volt/m för ett elektriskt fält) måste den obestämda konstanten ha dimensionen $[m^{-2}]$. Den enda relevanta parametern med liknande dimension är våglängden på ljuset, λ [m]! Så vi antar att konstant $\sim \frac{1}{\lambda^2}$, så vi får

$$E_s = \frac{V}{\lambda^2 r} E_{in}$$

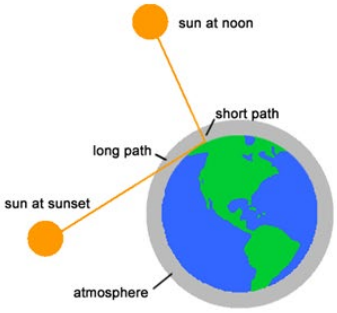
och den spridda intensiteten följer Rayleighs spridningslag

$$I_s = |E_s\,|^{\mathbf{2}} = \frac{V^2}{\lambda^4 r^2} |E_{in}|^2 \sim \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda^4}}$$

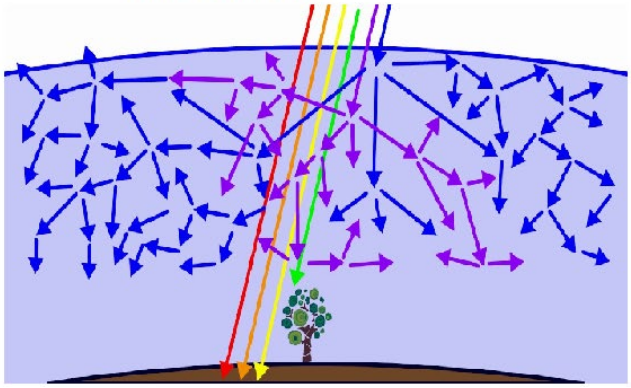
b) Enligt Rayleighs spridningslag ($I_s \sim 1/\lambda^4$) är himlen blå under dagen eftersom blått ljus sprids mer än andra färger med längre våglängd (se figur ”sun at noon” nedan)! Från Rayleighs spridningslag får vi förhållandet mellan den spridda intensiteten för blått- och rött ljus till

$$\frac{I_s(blått\ ljus \to 450\ nm)}{I_s(rött\ ljus \to 700\ nm)} = \frac{700\ nm^4}{450\ nm^4} \sim 6$$

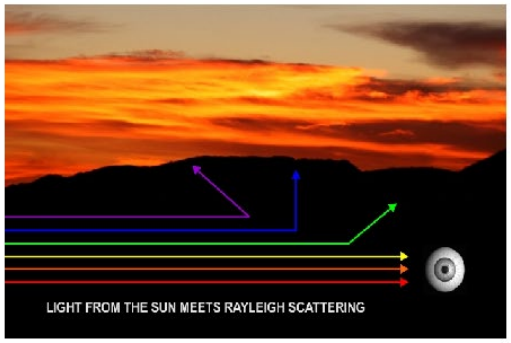
Så blått ljus sprids ca 6 ggr mer effektivt än rött ljus! Vid solnedgång färdas solljuset en mycket längre sträcka genom atmosfären än under dagen (se bild nedan). Resultatet blir att nästan allt blått ljus filtrerats bort (spritts), och kvar är mestadels rött ljus = röd solnedgång (se figur ”sun at sunset”)! Ett försök till att illustrera detta visas i bilden nedan.



Sun at noon

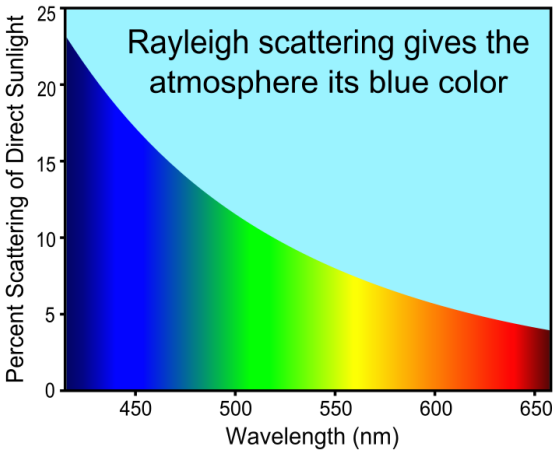


Sun at sunset

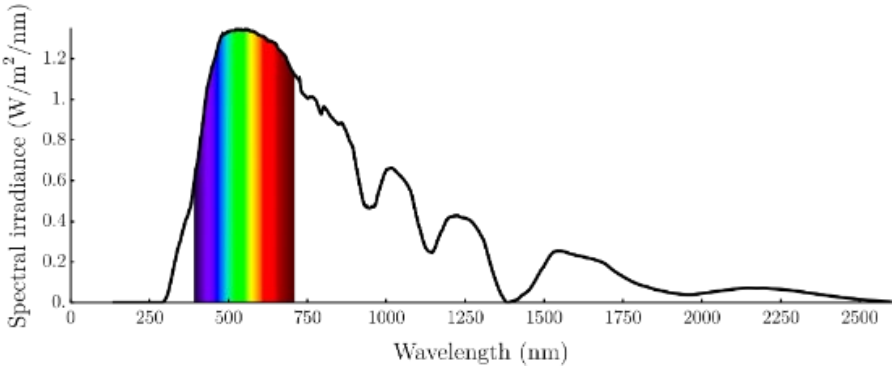


c) Det är sant att det är starkare spridning för violett (~400 nm) ljus än för blått (~450 nm), se bild nedan. Dock så måste man ta hänsyn till två saker till för att fånga hela bilden, alltså hur vi upplever himlen (det räcker med att ha nämnt en). Solspektrumet innehåller mindre violett, än blått ljus, se nedan, och därför kan inte lika mycket violett ljus spridas. Dessutom uppfattar våra ögon olika färger olika starkt – ögats så kallade ögonkänslighetsfunktion, se nedan. Lägger man ihop dessa tre faktorer – Rayleighspridning, solspektrumet och ögonkänslighetsfunktion – så ser man att blått ljus är dominant över violett, och därav upplevs himlen som blå!

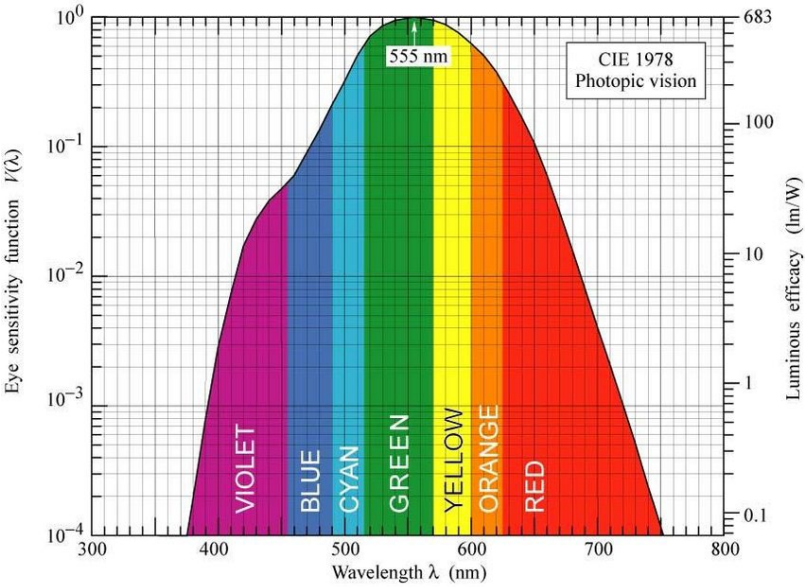
Rayleighspridning-”spektrum”:



Solspektrumet:

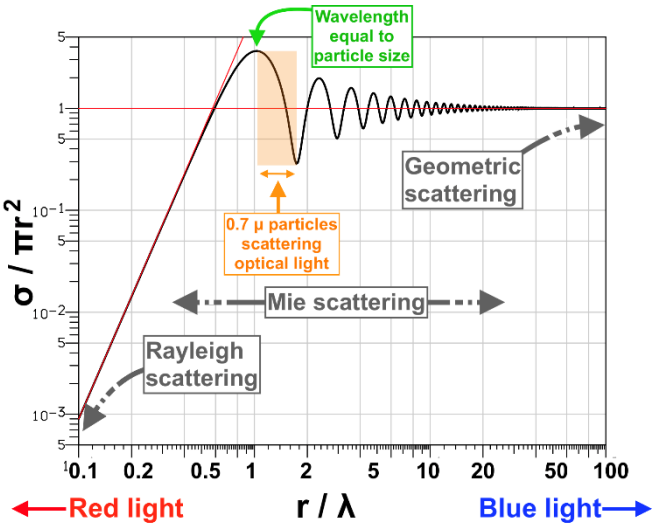


Ögonkänslighetsfunktion (eng. eye sensitivity function), notera den logaritmiska skalan:



d) På Jorden: små luftmolekyler, ca 0.3 nm (kväve, syre, …), → Rayleighspridning säger att ljus sprids som $1/\lambda^4$ och blått ljus sprids mycket mer effektivt än rött ljus i atmosfären, vilket leder till en blå himmel under dagen och en röd solnedgång (se uppg. b).

På Mars: Väldigt tunn atmosfär (ca 1 % av Jordens), så det finns mycket färre små partiklar



som orsakar Rayleighspridning. Eftersom atmosfären är tunn så stannar mycket stoftpartiklar (järnoxider) kvar i atmosfären när de väl blåsts upp av vindar. Med en karaktäristisk storlek på ca $r = 0.7$ µm, ser vi i figuren ovan att vi befinner oss i det indikerade orangea området (för rött ljus 700 nm ger $r/\lambda_{700nm} = 1$ och för blått ljus 450 nm ger $r/\lambda_{450nm} = 1.6$). Vi ser att rött ljus, $r/\lambda_{700nm} = 1$, sprids mycket mer effektivt än blått ljus, $r/\lambda_{450nm} = 1.6$. Situationen är alltså omvänd mot vad vi ser på Jorden! Nedan syns även en bild på hur det kan se ut på Mars under dagtid!

Rayleigh scattering,
$1/\lambda^4$ → blue sky

Expectation:
Rayleigh scattering,
$1/\lambda^4$ → blue sky??

Mie scattering
dominates!

The panorama of "Marathon Valley" made by Opportunity rover (credits: mars.nasa.gov)