

Tentamen i Optik FFY091 - torsdag 10:e juni 2021, kl. 14:00-19:00

Alla hjälpmedel är tillåtna, förutom lasrar av säkerhetsskäl då vi inte vill att ni ska få några permanenta ögonskador för att ni har tittat in i en laserstråle under tentan. Notera att alla lösningar måste vara uppladdade innan kl. 19.00 och inget samarbete är tillåtet under tentamen.

Examinator och jourhavande lärare Åsa Haglund nås på e-post asa.haglund@chalmers.se, tel. **031-772 1592**, eller sms **073-142 88 47**. På kurshemsidan publiceras lösningsförslag på fredag.

Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPP:arna).

Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.

1. Designa din egen akromatiska halvvågsplatta!

Örjan sitter hemma en fredagskväll och funderar på ett experiment han skulle vilja genomföra för ljus med våglängder i det synliga spektrumet. Till experimentet behöver han en halvvågsplatta, eller mer specifikt en akromatisk halvvågsplatta för att slippa ändra experimentuppställningen för varje våglängd han vill mäta på. Att halvvågsplattan är akromatisk betyder att den fungerar för ett våglängdsintervall, t.ex. det synliga spektrumet. Örjan, som studerat optik, kan sina ekvationer och vet att fasfördröjningen för en halvvågsplatta ges av $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n = \pi(2m + 1) = \pi$, där λ är designvåglängden, d är tjockleken på halvvågsplattan, $\Delta n = n_{eo} - n_o$ är skillnaden mellan brytningsindexet för eo- och o-axeln och kallas för dubbelbrytning. För enkelhetens skull betraktar vi fallet med $m = 0$ (vilket lite fint brukar kallas för nollte-ordningens halvvågsplatta). När Örjan surfar runt på nätet ser han till sin förvåning att de flest akromatiska halvvågsplattorna består av 2 eller fler plattor. Men varför är det så, är det inte enklare att bara använda ett material till hela plattan, eller vad är hållhaken?! Hjälpt Örjan att klura ut varför! I uppgiften kan du anta att dubbelbrytningen ändras linjärt med våglängden inom intervallet 400-800nm, dvs $\frac{\partial \Delta n}{\partial \lambda}$ är konstant. Värden du kan behöva finns i tabellen.



Material		400 nm	800 nm	400–800 nm
Magnesiumfluorid, MgF ₂	n_{eo}	1.3959	1.3867	-
	n_o	1.3839	1.3751	-
	$\Delta n = n_{eo} - n_o$	0.0120	0.0116	-
	$\partial \Delta n / \partial \lambda$ [mm ⁻¹]	-1	-1	-1
Kristallin kvarts, SiO ₂	n_{eo}	1.5673	1.5472	-
	n_o	1.5577	1.5383	-
	$\Delta n = n_{eo} - n_o$	0.0096	0.0089	-
	$\partial \Delta n / \partial \lambda$ [mm ⁻¹]	-1.75	-1.75	-1.75
Huppium, HUPP	n_{eo}	2.2157	2.3696	-
	n_o	2.3157	2.5696	-
	$\Delta n = n_{eo} - n_o$	-0.1	-0.2	-
	$\partial \Delta n / \partial \lambda$ [mm ⁻¹]	-250	-250	-250

- a) En halvvågsplatta bestående av ett material ger som nämndes ovan en fasfördröjning på $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n(\lambda) = \pi$. Normalt gäller detta för en våglängd – designvåglängden – men genom rätt val av material kan man få den att fungera över det synliga våglängdsspektrumet plus lite infrarött (400-800nm). En akromatisk våglängdsplatta är våglängdsberoende inom ett

intervall, detta innebär att fasfördröjningen är densamma över hela intervallet, dvs $\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0$.

Vilket samband måste uppfyllas för att $\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0$? (2 p)

b) Använd ditt samband från a) för att visa att en halv vågsplatta som är akromatisk i det synliga spektrumet (400-800nm), måste ha en dubbelbrytning som ökar med en faktor 2 när man går från violett (400nm) till rött ljus (800nm). Vilket material i tabellen ovan hade du valt att använda för att designa en akromatisk halv vågsplatta, har du hört talas om detta material innan? Kan du nu berätta för Örjan varför man inte brukar använda sig av en akromatisk halv vågsplatta med enbart ett material? (3 p)

c) Om man istället använder sig av två material för att designa en halv vågsplatta blir den totala fasförskjutningen mellan ljus polariserat längs eo- och o-axeln $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 \Delta n_1 \pm d_2 \Delta n_2) = \pi$, där subindex 1 och 2 syftar till de två olika materialen. Om du skulle använda de två kvarvarande materialen i tabellen (inte det som användes i b)), vilket tecken i ekvationen skulle du använda? (I fysisk mening innebär ett plustecken att eo-axlarna hos de två plattorna är parallella (även o-axlarna), medan ett minustecken innebär att de är roterade 90 grader mot varandra, dvs korsade.)

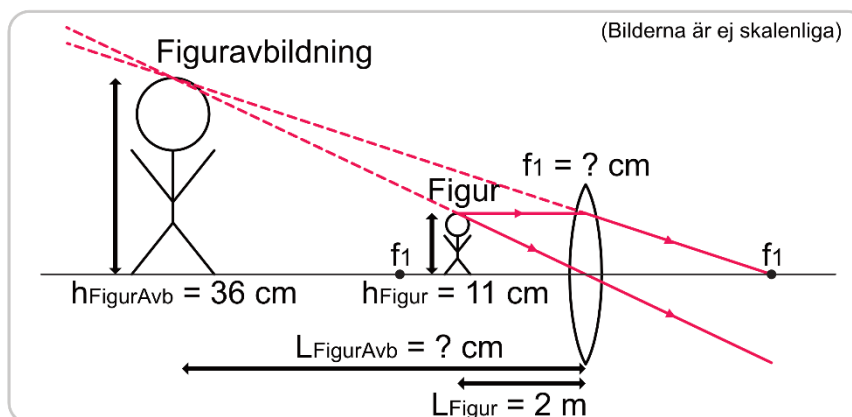
Tips: hitta ett uttryck för $\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0$, och betrakta om det går att uppfylla för valda tecken på $\frac{\partial \Delta n_1}{\partial \lambda}$ och $\frac{\partial \Delta n_2}{\partial \lambda}$ (värden på dessa finns i tabellen). (3 p)

d) Använd de två materialen från c) för att hitta tjockleken (i mm) på plattorna så att den sammansatta halv vågsplattan blir våglängdsberoende inom våglängdsintervallet 400-800nm.

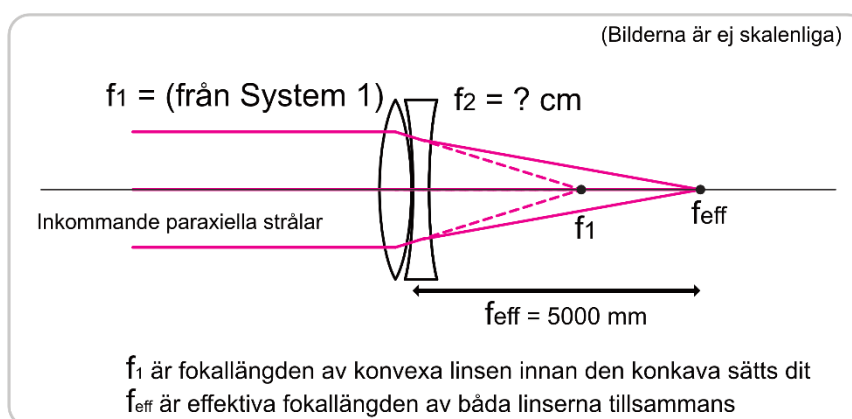
Tips: Betrakta de två ändpunkterna på våglängdsintervallet, och ställ upp två ekvationer $\Gamma(\lambda_a = 400 \text{ nm}) = \pi$ samt $\Gamma(\lambda_b = 800 \text{ nm}) = \pi$. Detta kanske känns som en väldigt förenklad approach, vilket det är! Vi har ju bara tagit hänsyn till ändpunkterna, men vad händer där emellan?! Dubbelkolla så att halv vågsplattan i alla fall fungerar i mitten av intervallet, dvs att $\Gamma(\lambda_c = 600 \text{ nm}) = \pi$ med de funna längderna d_1 och d_2 . Vågar du svara på varför denna metod verkar fungera såpass bra här? (4 p)

2. En lins, två linser, flera linser

System 1



System 2

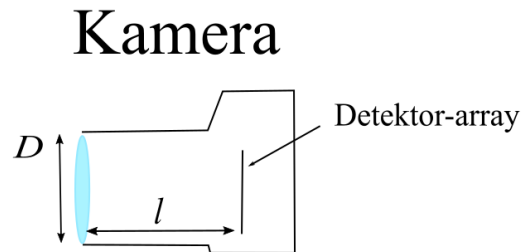


Vi betraktar följande linssystem där helt korrekt strålgångsanalys har gjorts. Avstånd och höjder är givna i uppgiftsbilden. Anta tunna och perfekta linser i alla deluppgifter samt att avståndet mellan linserna i e) och f) är försumbart.

- Betrakta System 1 som är en enkel konvex lins. Är avbildningen av figuren (höjden på denna är betecknad h_{FigurAvb}) reell eller virtuell? Endast svar krävs. Rätt svar på denna deluppgift ger (1p), felaktigt svar ger (-1p), inget svar ger (0p). Hela uppgiften kan inte ge ett negativt bidrag till tentamen.
- Betrakta System 1. Bestäm avståndet L_{FigurAvb} mellan linsen och avbildningen av figuren. (1p)
- Betrakta System 1. Bestäm fokallängden av lins 1, f_1 . (1p)
- Vad är transmissionsfunktionen för en lins? Beskriv även med ord hur en lins påverkar en infallande våg. (2p)
- Betrakta System 2 med infallande paraxiella strålar. Här har man direkt bakom lins 1 (från System 1) satt in lins 2, som är konkav. Därmed har effektiva fokallängden ökat till f_{eff} . Bestäm fokallängden av lins 2. Förslag: Använd formeln för linsens transmissionsfunktion från d). (2p)
- Härled generella uttrycket för ett systems effektiva fokallängd, där flera linser sätts in direkt efter varandra på en optisk axel (som i e)-deluppgiften), samt de enskilda linserna fokallängder. Gör detta för n stycken linser med fokallängderna $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}, f_n$. Du får börja från transmissionsfunktionen för en lins, som ej behöver härledas. (3p)

3. Den bästa upplösningen

Evert är en anställd på det nystartade företaget picoPixel där man nyligen lyckats reducera ned kameradetektorers pixelstorlekar till tiondels nanometer. Med detta revolutionerande, smått häpnadsväckande ingegörsmässiga genombrott återstår nu att matcha den optiska upplösningen hos ett kamerasystem mot pixelstorleken i de nya kamerorna. Dessa kameror är designade för att fånga bilder i färger inom det optiska spektrumet på avstånd $1\text{m} \rightarrow \infty$.



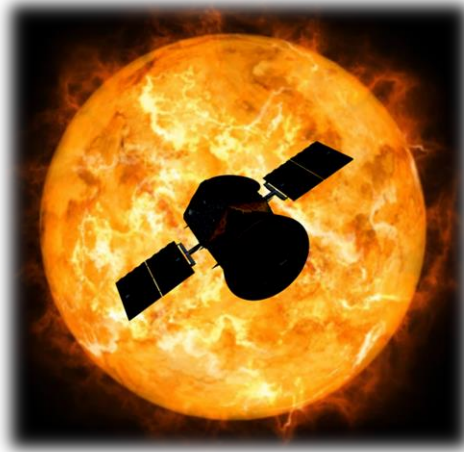
Figuren ovan är en schematisk bild över de väsentliga beståndsdelarna av den traditionella kameran. Evert funderar på hur han kan modifiera kameran för att förbättra den optiska upplösningen hos systemet till den nivå som krävs men verkar ha kört fast. Kan du hitta en lösning på Everts problem, alltså, hur bör kameran modifieras för att den optiska upplösningen skall matcha pixelstorleken? Kom ihåg att picoPixel är ett företag med orimligt fantastiska resurser som har möjligheten att producera helt orimliga komponenter med ofysikaliska toleranser och storlekar. Med dessa förutsättningar, vad är den absolut bästa upplösningen ditt modifierade kamerasystem kan åstadkomma?

Ledning: Svaret är inte att vi kan upplösa något oändligt litet.

(5p)

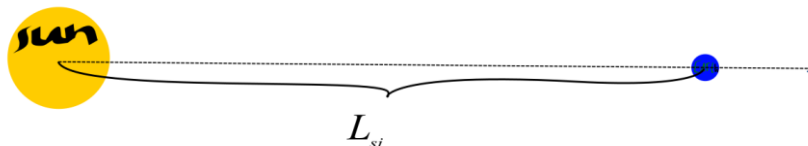
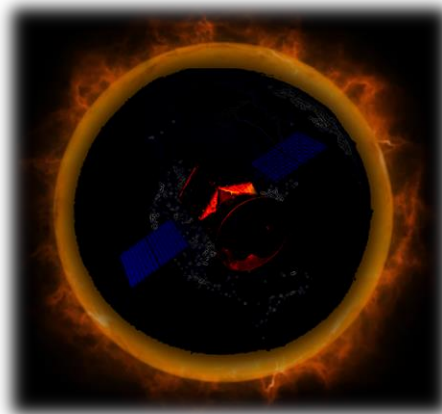
4. Jordförmörkelse

En ensam rymdfarkost svävar omkring i solsystemet. Ett av dess instrument är konstruerat för att göra optiska mätningar på solen, vår närmsta stjärna. Instrumentet är särskilt designat för att mäta solljuset från en absorptionslinje (Fraunhofer linje F) vid 486 nm.



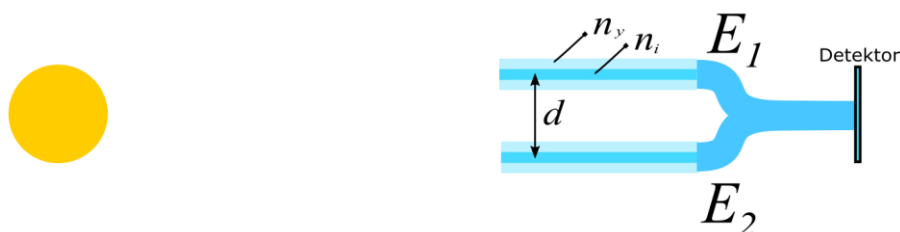
För tillfället håller farkosten sig på en säkert avstånd $L_s = 151227792$ km från solens centrum. Solradien är av storlek: $R_s = 696340$ km. Se ledning till några av delfrågorna under frågeställningarna.

- Vad är den spatiella koherenslängden hos det solljus instrumentet kan detektera när det når farkosten? (2p)
- Helt plötsligt träder jorden in i bilden och delvis skymmer solen i en jordförmörkelse!



Jordens centrum infinder sig just nu på linje mellan rymdfarkosten och solens centrum. Jordens radie är $R_j = 6371$ km och dess avstånd till solen $L_{sj} = 149600000$ km. I den här tidpunkten, är den spatiella koherenslängden hos solljuset som träffar farkosten större, ungefär samma eller mindre än innan? Du kan bortse från att jorden har en atmosfär. (4p)

- c) I tid till denna deluppgift har jorden lämnat bilden och instrumentet kan igen ostört studera solen. Instrumentet som fångar upp ljuset består av 2 separata glasfiber som sedan kombineras (koherent summering $E_1 + E_2$) innan ljuset från båda fiber detekteras i ett detektor-plan.



Fibrena är relativt breda med en diameter på 1 mm och en längd på 10 m. Det inre brytnisindexet är $n_i = 1,5$. Vad för yttre brytningsindex n_y (definierat i figuren ovan) krävs för att de två fälten E_1, E_2 skall summera koherent till ca 50% ($\Gamma_d = 0,5$) eller mer när fiberna är separerade med avståndet d ? Vad blir n_y för den minsta möjliga separationen? Antag att allt ljus som totalreflekteras inne i fibern överlever till dess slut.

Ledning: Vilka ljuskällor på solen sänder ut ljus som transmitteras genom fibern? Hur påverkar det solens effektiva storlek genom systemet? (2p)

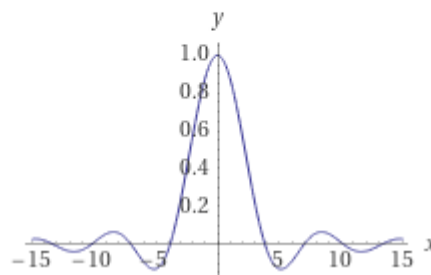
- d) De två fiberarmarna är inte exakt lika långa utan har en längddifferens δ . För att summeringen av E_1 och E_2 skall förbli någorlunda koherent introduceras ett optiskt filter i änden på båda fibrer med fix bandbredd $\Delta\lambda = 1$ nm. Centervåglängden som transmitteras kan justeras fritt. Vad blir toleransen på differensen δ , ($\delta < \text{tolerans}$) om vi önskar att summan $E_1 + E_2$ inte skall bli helt inkoherent? Antag att samtliga moder i fibern har samma effektiva brytningsindex $n_{eff} = 1,7$. (2p)

- e) Som referensmätning till absorptionlinjen vid 486 nm behöver instrumentet även mäta på en annan våglängd, helst en med så stor ljusstyrka som möjligt. Vilken våglängd bör detta vara för mätning av solen? (1p)

Ledning: Den normaliserade fouriertransformen av ett cirkulärt hål med storlek D på avstånd l är plottad här, med $x = \pi D\rho/\lambda l$. ρ är den radiella koordinaten. Nedan presenteras även Van Cittert-Zernikes teorem.

$$\frac{2 J_1(x)}{x}$$

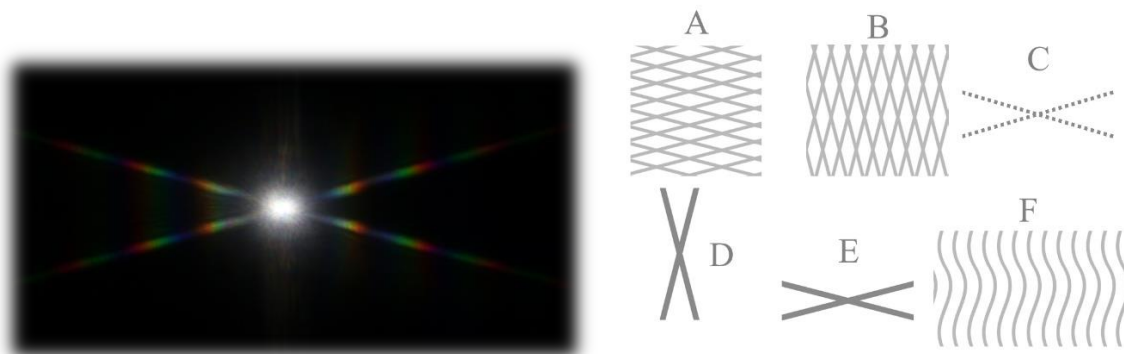
Plots:



$$\Gamma(u, v) = \iint_{x,y} I(x, y) e^{jk\frac{xu+yv}{L}} dx dy; \quad \text{"van Cittert-Zernikes teorem"}$$

5. Optik-TV

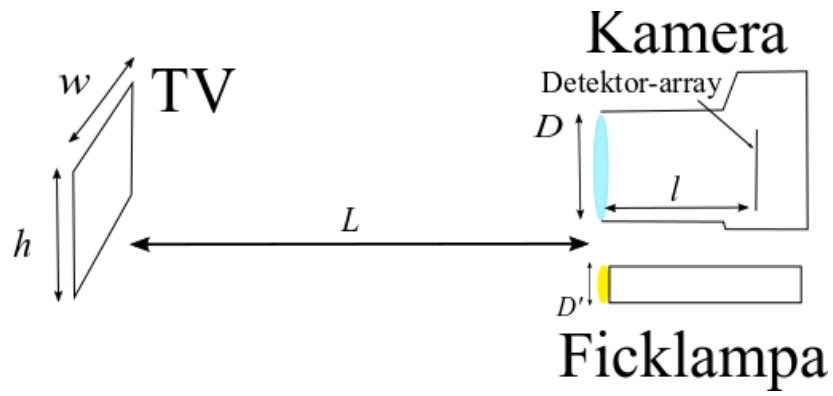
Modern LED-TV erbjuder nu längre ej enbart underhållning i på-läget men även i av-läget! Rikta en stark ljuskälla mot skärmen och ett fint regnbågsmönster dyker upp, likt det i vänstra bilden nedan. Det är inte bara vackert utan även ett intressant optiskt fenomen.



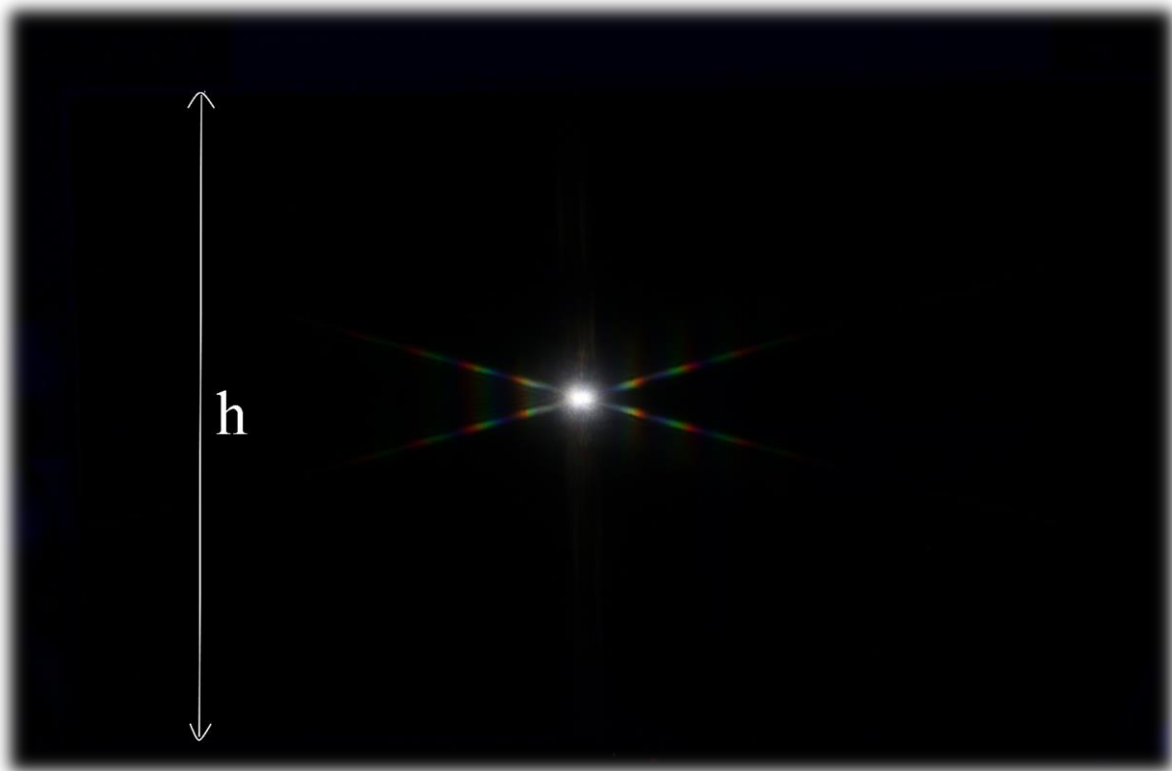
- a) Integrerad i skärmen finns någon sorts 2-dimensionell struktur som ger upphov till mönstret ovan. Antag i denna deluppgift att bilden är tagen på ett långt avstånd från TV:n. Vilken utav strukturerna ovan till höger, A-F ger upphov till det observerade mönstret i bilden? (Endast svar krävs för full poäng) (2p)
- b) Bilden av regnbågsmönstret ovan fångades med hjälp av en TV, kamera och ficklampa likt i bilden nedan.



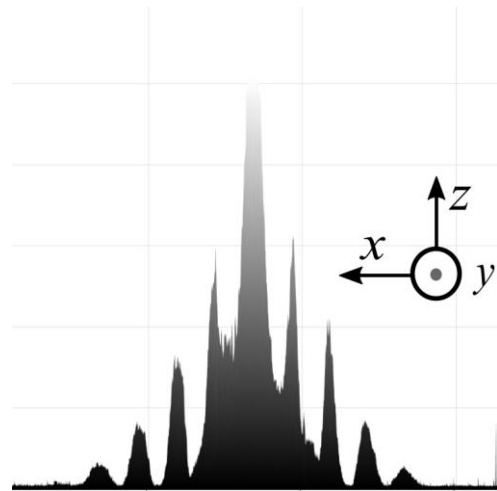
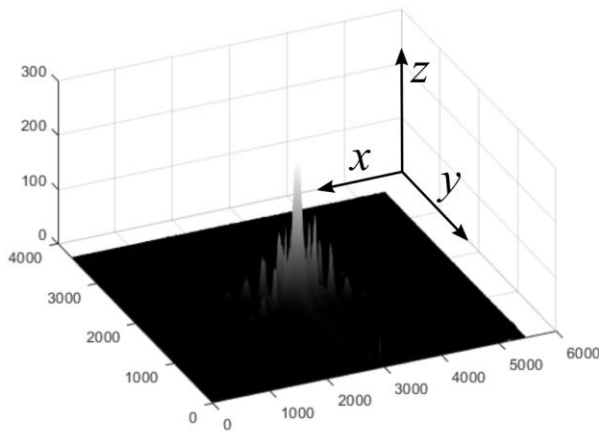
Några användbara upmätta avstånd och storlekar presenteras i skissen nedan där $w = 1$ m, $L = 2,5$ m, $l = 5$ cm, $D = 5$ cm, $D' = 2$ mm. Kameran var fokuserad så att en skarp bild av ficklampan fångades på detektor-arrayen då bilden togs. TV:ns bildproportioner är 16:9.



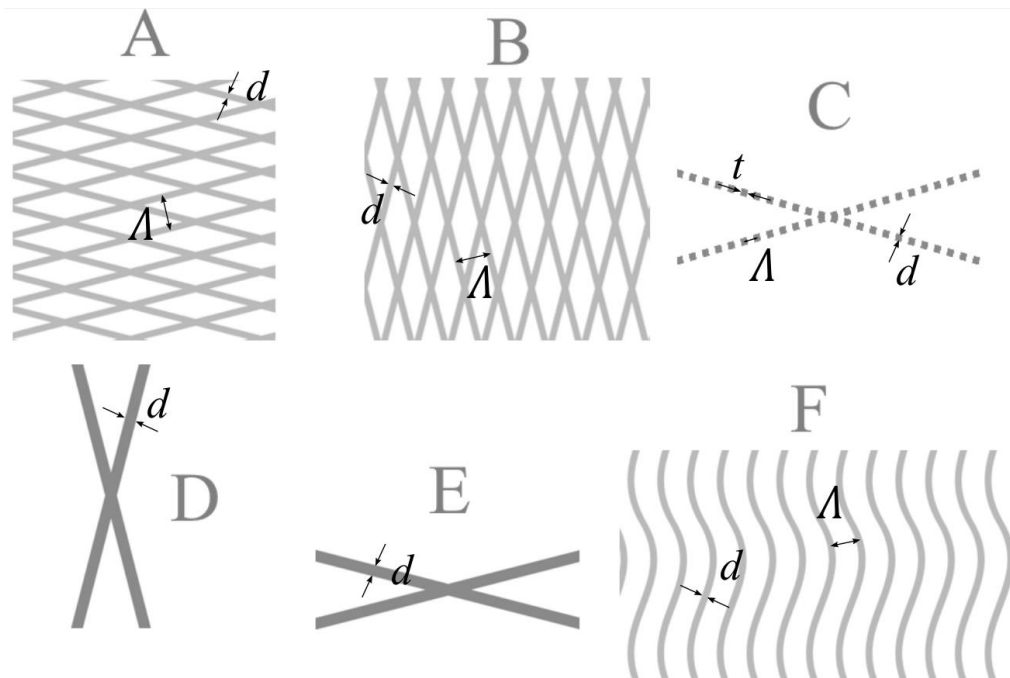
Eftersom slutartiden var kort då bilden togs är utkanten av TV:n svår att urskilja, därför har höjden h markerats i bilden nedan som referens så att man kan mäta mönstrets utbredning.



Till hands finns även mönstrets fördelning av det röda ljusets intensitet:



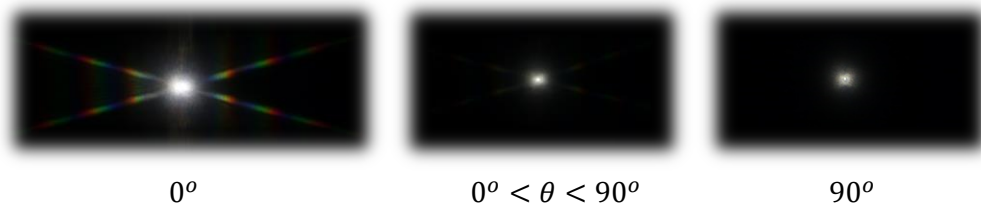
Bestäm/ uppskatta nu dimensionerna på strukturen från uppgift a). Alltså, beroende på ditt svar i uppgift a), bestäm bredden d av de grå linjerna, avståndet mellan centrum av två närliggande linjer Λ (gäller enbart om du svarat A, B, C eller F) och tjockleken på strecken t (endast C), se nedanstående bild för referens. (10p)



(Ledning: Betrakta strukturen som en TOK. Är de grå linjerna absorberande eller reflekterande? Det räcker med att betrakta enbart en av de två regnbågslinjerna för att bestämma dimensionerna. Det går fint att anta att ljuset träffar strukturen med plana vågfronter parallella med TV-planet.)

- c) I uppställningen som presenterats ovan är kameranlinsens fokallängd justerad så att ficklampan avbildas skarpt på detektor-arrayen. I detta plan (kamerans avbildningsplan) hur stor är minsta featuresize hos TV:ns avbildning (i), regnbågsmönstrets avbildning (ii) och ficklampans avbildning (iii)? I förhållande till detektor-array-planet, var hamnar en skarp bild av: TV:n (iv) samt var hamnar en skarp bild av regnbågsmönstret (v)? (5p)

- d) Nu placeras ett polarisationsfilter framför ficklampan. Bilderna nedan visar kamerabilden för några rotationsvinklar av polarisationsfiltret.



Vad mer för typ av optisk komponent verkar finnas integrerad i skärmen? Om polarisationsfiltret (som kan monteras i ytterändan av objektivet) istället placeras framför kameran, vilket resultat förväntar du dig då? (2p)

Lösningförslag tenta i Optik FFY091 19:e juni 2021

1. Designa din egen akromatiska halv vågsplatta!

a)

Villkoret för fasförskjutningen för halv vågsplattan är

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = \pi$$

För att detta ska gälla över ett våglängdsintervall måste $\Gamma(\lambda)$ vara konstant över samma våglängdsintervall

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{\partial \Delta n}{\partial \lambda} - \frac{\Delta n}{\lambda} \right) = 0 \rightarrow \Delta n = \frac{\partial \Delta n}{\partial \lambda} \lambda$$

b)

Eftersom vi antagit att $\frac{\partial \Delta n}{\partial \lambda}$ är konstant över våglängdsintervallet, får vi för ändpunkterna på intervallet att

$$\frac{\Delta n(800nm)}{\Delta n(400nm)} = \frac{800nm}{400nm} = 2$$

Dvs, när man går från violett till rött ljus måste dubbelbrytningen ökas med en faktor 2: $\Delta n(800nm) = 2\Delta n(400nm)$. Om vi kikar i tabellen ser vi att det enda material som uppfyller detta är mitt "hittepå-material" Huppium, som ju egentligen inte finns. Det kan hända att det finns verkliga material som uppfyller villkoret, men jag kunde inte hitta några, och det verkar inte användas, så vi kan i alla fall säga att de inte är så vanliga/lättåtkomliga.

c)

De två kvarvarande materialen är magnesiumfluorid och kristallin kvarts.

Eftersom värdet på $\frac{\partial \Delta n}{\partial \lambda}$ för magnesiumfluorid och kristallin kvarts är av samma tecken, och negativa, behöver vi använda oss av ett minustecken i ekvationen. Mer precist innebär detta att man korsar eo-axlarna (även o-axlarna) hos kristallerna. Resultatet blir då

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 \Delta n_1 - d_2 \Delta n_2) = \pi$$

Om man vill vara mer matematisk kan man visa detta genom att derivera uttrycket:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \left(d_1 \left(\frac{\partial \Delta n_1}{\partial \lambda} - \frac{\Delta n_1}{\lambda} \right) \pm d_2 \left(\frac{\partial \Delta n_2}{\partial \lambda} - \frac{\Delta n_2}{\lambda} \right) \right) = 0$$

$$d_1 \left(\frac{\partial \Delta n_1}{\partial \lambda} - \frac{\Delta n_1}{\lambda} \right) \pm d_2 \left(\frac{\partial \Delta n_2}{\partial \lambda} - \frac{\Delta n_2}{\lambda} \right) = 0$$

Efter omflyttning av termer får vi

$$d_1 \frac{\partial \Delta n_1}{\partial \lambda} \pm d_2 \frac{\partial \Delta n_2}{\partial \lambda} = \frac{d_1 \Delta n_1 \pm d_2 \Delta n_2}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

I sista likheten har jag använt

$$\frac{2\pi}{\lambda} (d_1 \Delta n_1 \pm d_2 \Delta n_2) = \pi \rightarrow d_1 \Delta n_1 \pm d_2 \Delta n_2 = \frac{\lambda}{2}$$

I vårt fall kan vi inte välja plustecknet eftersom både $\frac{\partial \Delta n_1}{\partial \lambda}$ och $\frac{\partial \Delta n_2}{\partial \lambda}$ är negativa medan högerledet är positivt (1/2)! Det hade inneburit att tjockleken på en eller båda plattorna hade behövt vara negativ, vilket är fysiskt orimligt!

d)

Vi betecknar ändpunkterna på våglängdsintervallet med subindex a för värden vid

400nm ($\lambda_a = 400nm$) och med subindex b för värden vid 800nm ($\lambda_b = 800nm$). Vi väljer även materialen magnesiumfluorid, som vi betecknar med subindex 1 nedan, och kristallin kvarts, med subindex 2. Vi ställer upp ekvationssystemet som ska uppfyllas i ändpunkterna på våglängdsintervallet:

$$\Gamma(\lambda_a) = \frac{2\pi}{\lambda_a} (d_1 \Delta n_{1a} - d_2 \Delta n_{2a}) = \pi \quad (1)$$

$$\Gamma(\lambda_b) = \frac{2\pi}{\lambda_b} (d_1 \Delta n_{1b} - d_2 \Delta n_{2b}) = \pi \quad (2)$$

Vi löser ut d_1 genom att beräkna ekvation (1) $-\frac{\Delta n_{2a}}{\Delta n_{2b}}$ gånger ekvation (2)

$$d_1 = \frac{\Delta n_{2a} \lambda_b - \Delta n_{2b} \lambda_a}{2(\Delta n_{2a} \Delta n_{1b} - \Delta n_{1a} \Delta n_{2b})} = 0.45mm$$

Vi löser ut d_2 genom att beräkna ekvation (2) $-\frac{\Delta n_{1b}}{\Delta n_{1a}}$ gånger ekvation (1)

$$d_2 = \frac{\Delta n_{1a} \lambda_b - \Delta n_{1b} \lambda_a}{2(\Delta n_{2a} \Delta n_{1b} - \Delta n_{1a} \Delta n_{2b})} = 0.54mm$$

Detta ger en total tjocklek på den sammansatta halvvågspattan på

$$d = d_1 + d_2 = 1mm$$

vilket är väldigt nära tjockleken på halvvågspattan **AHWP05M-600**, 1.07mm, som finns på Thorlabs hemsida

(https://www.thorlabs.com/NewGroupPage9.cfm?objectgroup_id=854&fbclid=IwAR0mMK_TIXB-K-MeY_Gjlxfm-JPGYKqTARCqIF4NuXR7rTiUmbJrzs6HuzM). Deras platta använder sig av samma material (magnesiumfluorid och kristallin kvarts) och fungerar i intervallet 400-800nm, men begränsas då av en antireflexbeläggning. Den lilla avvikelser i tjocklek mot vårt beräknade resultat kan därför bero på att deras halvvågspatta egentligen fungerar över ett bredare våglängdsintervall eller att brytningsindexdata skiljer sig åt. Men i alla fall så har du nu en idé om hur tjockleken på dessa plattor bestäms!

I mitten på våglängdsintervallet, $\lambda = 600nm$, får vi för magnesiumfluorid att

$$\Delta n_1 = \frac{\Delta n_{1a} + \Delta n_{1b}}{2} = 0.0118$$

och för kristallint kvarts

$$\Delta n_2 = \frac{\Delta n_{2a} + \Delta n_{2b}}{2} = 0.0093$$

Och mycket riktig får vi en fasförskjutning på π med dessa värden!

$$\Gamma(\lambda = 600nm) = \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 \Delta n_1 - d_2 \Delta n_2) = \pi$$

Att vår metod fungerar utmärkt i detta fall är p.g.a. att dubbelbrytningen har antagits variera linjärt mellan 400-800nm när vi gjort beräkningar. Så är självklart inte fallet i verkligheten, men denna approach har använts en gång i tiden (kanske inte längre?), men då åstadkommer man inte en perfekt fasförskjutning över hela intervallet.

2. En lins, två linser, flera linser...

- Bilden är virtuell.
- Likformiga trianglar av Figur och Figur-avbildningen ger: $\frac{36}{11} \cdot 2.0 \text{ m} = 6.55 \text{ m}$
- Vi använder linsformeln

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{-L_{FigurAvb}} + \frac{1}{L_{Figur}} = \frac{1}{-6.55 \text{ m}} + \frac{1}{2.0 \text{ m}} \Rightarrow f_1 = 2.88 \text{ m}.$$

- d) En lins förändrar faset av den infallande vågen, baserat på avståndet från linsens mitt (samt k och f , som däremot ej varierar geometriskt). Formeln:

$$T_{lins} = \exp(j \cdot \varphi_{lins}) = \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f}\right).$$

- e) Avståndet är irrelevant eftersom vi får försumma det. Totala transmissionsfunktionen blir

$$T_{tot} = T_{lins1} \cdot T_{lins2} = \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f_1}\right) \cdot \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f_2}\right) = \exp\left(\frac{-jkr^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right) = \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f_{eff}}\right).$$

Där f_{eff} är det effektiva fokus av hela systemet. Detta ger sambandet

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{eff}}.$$

Vilket ger svaret

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{eff}} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{5.0 \text{ m}} - \frac{1}{2.88 \text{ m}} \Rightarrow f_2 = -6.79 \text{ m}.$$

- f) Vi vet att transmissionsfunktionen för en lins är

$$T_{lins} = \exp(j \cdot \varphi_{lins}) = \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f}\right).$$

Så transmissionsfunktionen för flera linser direkt efter varandra ges av multiplikation, såhär:

$$\prod_{k=1}^n T_{lins,k} = \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f_k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{-jkr^2}{2f_k}\right) = \exp\left(\frac{-jkr^2}{2f_{eff}}\right).$$

Vilket slutligen ger

$$\frac{1}{f_{eff}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f_k}.$$

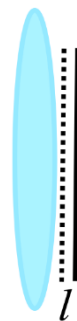
Givetvis arbetar vi hela tiden under villkoren att linserna är tunna (ingen signifikant geometrisk utbredning längs optiska axeln), perfekta, samt även att avståndet mellan linserna är försumbart. Något naivt ifall vi sätter dit för många linser.

3. Den bästa upplösningen

Tittar man på tumregeln för minsta feature size:

$$d_{feature} = 2,44 \frac{\lambda}{D}$$

Ser vi att om vi helt enkelt minimerar $\frac{\lambda}{D}$ så lyckas vi med vårt uppdrag. Det är mycket riktigt att upplösningen blir bättre när vi låter kvoten gå mot noll, men feature sizen kommer ej bli oändligt liten. Tumregeln gäller nämligen enbart för paraxiella system och gäller ej längre då kvoten minskar. Vi behöver istället göra analysen igen för vårt nya system. Om $l = 0$ propagerar sfäriska vågor i detektorplanet genom alla punktkällor. Vi har alltså vågor som propagerar i motsatta riktningar.



$$E = E_0 e^{jkx} + E_0 e^{-jkx} = 2E_0 \cos kx$$

$$I = 4|E_0|^2 \cos^2 kx = 2|E_0|^2(1 + \cos 2kx)$$

Minsta feature size har vi definierat som avståndet mellan två minima i intensitetsfördelningen från två interfererande punktkällor. I detta fall fås minsta feature som $2kd_{feature} = 2\pi$ och vi har att

$$d_{feature} = \frac{\lambda}{2}$$

Och detta är den fysikaliskt minsta feature size man kan få med ett optiskt system som utnyttjar elektromagnetisk strålning som informationsbärare. picoPixel hade därmed kunnat nöja sig med pixelstorlekar i storleken 200 nm (för blått ljus med en våglängd på 400 nm).

4. Jordförmörkelse

- a) Vi kan använda tumregeln för spatiell koherenslängd för cirkulär inkoherent ljuskälla:

$$l_s = 1,22 \frac{\lambda L}{D_{source}}$$

I vårt fall betraktar vi solen på dess avstånd till farkosten vid den intressanta våglängden 486 nm. Vi får $l_s = 1,22 \cdot 486 \cdot 10^{-9} \cdot 151227792 \cdot 10^3 / (2 \cdot 696340 \cdot 10^3) = 64,4 \mu\text{m}$.

- b) För att säga något om den nya koherenslängden måste vi förstå den nya formen på mutual coherence function Γ . Van Cittert-Zernikes teorem säger oss att Γ relateras till fouriertransformen av intensiteten hos ljuskällan. Effekten varje punkt på solen strålar ut är lika stor $I_{sol} dA = const$, alltså fås Γ som fouriertransformen av ett cirkulärt hål när solen inte är skymd. Nu är dock jorden i vägen och vi måste beräkna om integralen:

$$\begin{aligned} \Gamma &= I_{sol} \iint_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} < R_s \\ \sqrt{x^2+y^2} > R_j}} e^{jk \frac{xu+yv}{L}} dx dy \\ &= I_{sol} \left(\iint_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} < R_s \\ \sqrt{x^2+y^2} = 0}} e^{jk \frac{xu+yv}{L}} dx dy - \iint_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} < R_j \\ \sqrt{x^2+y^2} = 0}} e^{jk \frac{xu+yv}{L}} dx dy \right) \\ &= I_{sol} \frac{A_{sol}}{L_{sol}^2} \mathcal{F}\{\text{sol}\}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - I_{sol} \frac{A_{jord}}{L_{jord}^2} \mathcal{F}\{\text{jord}\}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Areorna för sol och jord dyker upp eftersom om $(u, v) = (0, 0)$ fås den totala intensiteten från beräkningen av Γ enligt teoremet. Den totala intensiteten fås genom att summera fältbidraget från samtliga punktkällor vars effekt minskar med avståndet som 1 genom avståndet i kvadrat (sfärisk våg). I vårt fall är $\frac{A_{sol}}{L_{sol}^2} / \frac{A_{jord}}{L_{jord}^2} = 1,38$ vilket innebär att $\Gamma(0,0) > 0$ och kommer vara det fram till dess koherenslängd. De normaliserade fouriertransformerna av sol och jord (runda cirkulära hål) har samma form enligt bild i ledningen med skillnaden att de skalar olika i x-led. Denna skalning fås från tumregeln!

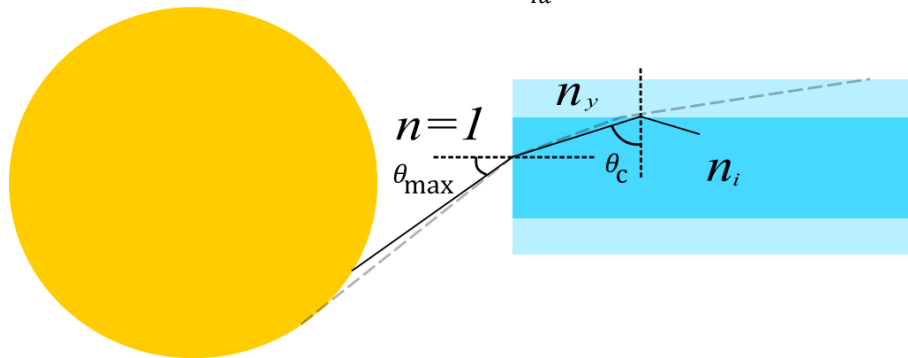
$$l_{s,sol} = 1,22 \frac{\lambda L_{sol}}{2R_{sol}} = 64,4 \mu\text{m}, l_{s,jord} = 1,22 \frac{\lambda L_{jord}}{2R_{jord}} = 75,7 \mu\text{m}$$

Tumregeln ger avståndet till första nollstället i kurvan ovan, det som kallas koherenslängden. Nollstället för jord-fouriertransformen ($l_{s,jord}$) är alltså längre bort än för sol-fouriertransformen ($l_{s,sol}$) vilket innebär att Γ kommer att reduceras fram till $l_{s,jord}$ på grund av differensen i dess uttryck. Detta innebär att koherenslängden för Γ kommer vara kortare än $l_{s,sol}$ som vi hade innan.

- c) Enligt uppgiften struntar vi i den interna interferensen. Alltså är det som avgör hur mycket ljus som fångas upp gränsvinkeln för vilken total intern reflektion är möjlig. Vi kan som tätast sätta fibrena på avståndet $d = 1$ mm (kant i kant) så låt oss jobba vidare därifrån. Vi kräver alltså nu att $\Gamma(d) = 0,5$ vilket från kurvan i ledningen ser ut att motsvara cirka halva koherenslängden! Genom att använda tumregeln kan vi beräkna motsvarande storlek på solen för när detta är uppfyllt:

$$2 \cdot d = 1,22 \frac{\lambda L_{sol}}{2R_{ny sol}}$$

$$\text{Det motsvarar en vinkel } \theta_{max} \approx R_{ny sol}/L_{sol} = 1,22 \frac{\lambda}{4d}.$$



Med Snells lag fås gränsvinkeln θ_c som $\theta_c = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_{max}}{n_i} \right) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\sin(1,22 \frac{\lambda}{4d})}{n_i} \right) \approx \frac{\pi}{2} - 1,22 \frac{\lambda}{4dn_i}$. Igen med Snells lag får vi motsvarande yttre brytningsindex genom: $n_y = n_i \sin \theta_c = n_i \cos \left(1,22 \frac{\lambda}{4dn_i} \right) = \{d = 1mm\} = 1,499999993$. Toleransen vid tillverkningen av fibern behöver därmed vara orimligt precis.

- d) För att fälten i de två armarna skall ha en chans att summera delvis koherent kräver vi att förskjutningen i propagationsriktningen är mindre än tidskoherensen. Vi beräknar koherenstiden från filtrets bandbredd:

$$\tau \cong \frac{1}{\Delta\nu} = \left\{ \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \right\} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$$

Med $\lambda = 486$ nm och $\Delta\lambda = 1$ nm fås: $\tau = 0,89$ ps. Vi får tidskoherensen i fibern som:

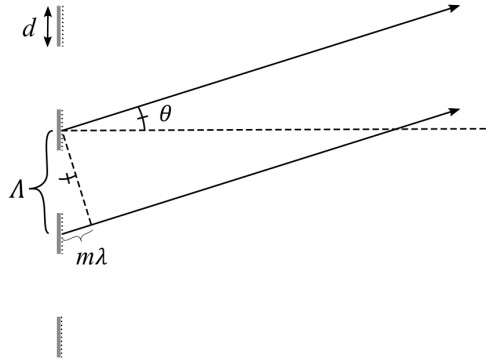
$$l_t = \tau \frac{c}{n_{eff}} = 139 \mu\text{m} \text{ och detta är vår tolerans. Alltså blir toleransen även här väldigt precis.}$$

- e) Solen har en svarkroppstemperatur på ca $T = 5800$ K. Med Wiens förskjutningslag fås maximal utstrålad effekt vid våglängden $\lambda_{max} = 2,9 \cdot 10^{-3} / T = 500$ nm. Alltså bör detta vara vår lämpliga våglängdsreferens.

5. Optik-TV

- a) Vi ser tydligt två klara diffraktionsmönster från två vinklade gitterstrukturer i bilden. Multipla maxima (diffraktionsordningar) innebär att D eller E ej är möjliga. Vi kan heller ej ha F eftersom då skulle vi sett regnbågen över en större uppsättning vinklar, den horisontella inkluderat eftersom en sådan gitterstruktur ingår i F. A är ej möjlig eftersom regnbågen skapas med uträkning ortogonalt mot gitter-perioden. Eftersom regnbågslinjerna är tunna kan vi ej heller ha C (Tänk minsta feature size). Alltså är svaret B.

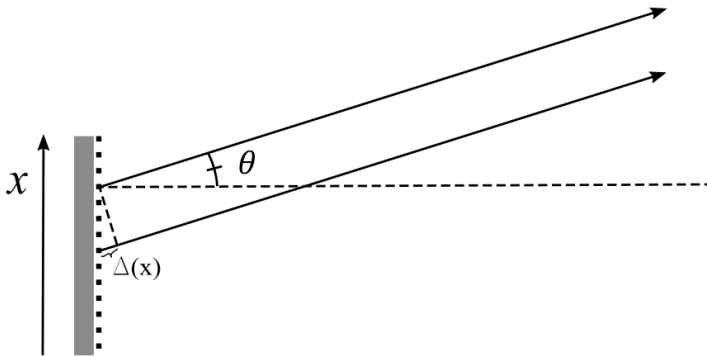
- b) Vi skall alltså bestämma dimensionerna d och Λ . Då vi har två likadana fast vinklade gitter låt oss enbart betrakta ett av de två och bestämma i vilka vinklar vi har våra diffraktionsordningar.



För konstruktiv interferens mellan fält reflekterade från periodvis återkommande ytor behöver m i figuren ovan vara ett heltal. Vi erhåller alltså gitterekvationen:

$$\Lambda \sin \theta = m\lambda$$

Gitterekvationen säger tyvärr inget om styrkan i de olika diffraktionsordningarna. Vi kan däremot själva räkna ut detta genom att summera E-fältsstyrkan varje reflektor-element bidrar med i respektive riktning. Eftersom varje reflektorelement är likadant i vårt periodiska gitter blir slutsumman av allt fältbidrag helt enkelt fältbidraget från ett element multiplicerat med antalet element och alltså är även slutsumman proportionell mot E-fältsbidraget från ett element! Låt oss summera över alla punktkällor från ett element:



$$E(\theta) = \int_{-d/2}^{d/2} E_0 e^{-jk\Delta(x)} dx = \int_{-d/2}^{d/2} E_0 e^{-jkx \sin \theta} dx$$

$$E(\theta) = E_0 \frac{-e^{-jk\frac{d}{2} \sin \theta} + e^{jk\frac{d}{2} \sin \theta}}{-jk \sin \theta} = E_0 d \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta}$$

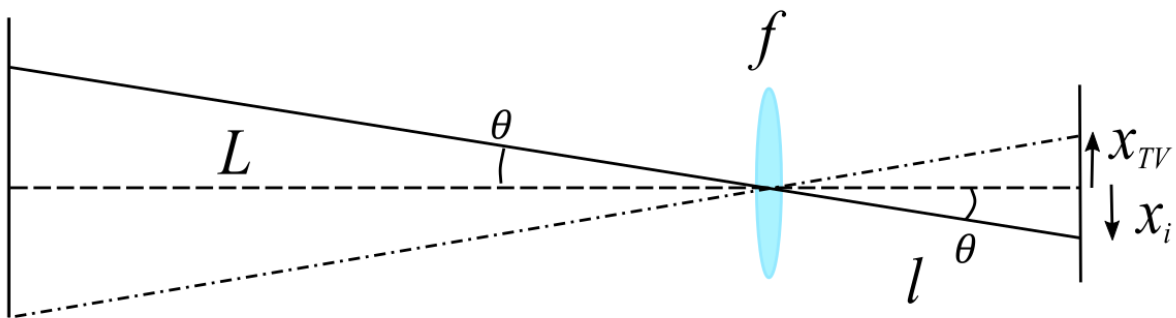
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right)^2}{\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right)^2}$$

Byter vi ut $\sin \theta$ enligt gitterekvationen fås:

$$I(m) = I_0 \frac{\sin^2\left(m\pi \frac{d}{\Lambda}\right)}{\left(m\pi \frac{d}{\Lambda}\right)^2}$$

Nu är frågan, är alla diffraktionsordningar synliga? Från bilderna i uppgiften (både färgbilder och intensitetsbilder) ser vi att avståndet mellan de synliga ordningarna är ungefär samma för samtliga, inklusive nollte ordningen. Alltså måste antingen alla ordningar eller enbart jämna ordningar vara synliga. Om enbart jämna ordningar är synliga behöver $I(m = 1) = 0$ vilket kräver antingen $d = 0$ eller $d \geq \Lambda$ vilket är orimligt. Alltså är samtliga ordningar synliga!

Med den informationen kan vi nu bestämma Λ . Vi behöver dock först se över det använda avbildningssystemet:



Strålen i diffraktionsordningen θ som går genom centrum på linsen kommer landa i x_i på detektorarrayen och därmed utgöra centrum för dess avbildning. Detsamma gäller för kanten på TV:n och x_{TV} . På papperet/skärmen mäter jag 1,6 cm mellan nollte ordningen och den andra röda toppen och höjden h mäter jag som 8,9 cm. Den verkliga höjden på TV:n är dock $\frac{9}{16}$ m. Därmed kan vi relatera bilden av den andra röda diffraktionsordningen x_{i2} som:

$$x_{i2} = \frac{9}{16} \text{ m} \frac{1,6 l}{8,9 L}$$

Vinkeln fås därmed som: $\tan \theta_2 = \frac{x_{i2}}{l} = \frac{9}{16} \text{ m} \frac{1,6}{8,9} \frac{1}{5 \text{ m}} \approx 0,02 \Rightarrow \sin \theta_2 \approx 0,02$

och vi får $\Lambda = \frac{2\lambda}{\sin \theta_2} \approx 62,5 \mu\text{m}$ där våglängden $\lambda = 632 \text{ nm}$ för rött ljus användes. Notera att avståndet Λ även kan beräknas med andra våglängder och deras respektive avstånd mellan ordningar samt för andra ordningar. För att beräkna d kan vi relatera intensiteten mellan olika ordningar. Från intensitetsbilden uppskattar vi att intensiteten i andra ordningen är cirka 60% av intensiteten i första. Alltså har vi:

$$\frac{I(m = 2)}{I(m = 1)} = 0,6 = \frac{\sin^2\left(2\pi \frac{d}{\Lambda}\right)}{\left(2\pi \frac{d}{\Lambda}\right)^2} \frac{\left(\pi \frac{d}{\Lambda}\right)^2}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\Lambda}\right)} = \cos^2\left(\pi \frac{d}{\Lambda}\right)$$

Och slutligen har vi $d = \frac{\Lambda}{\pi} \cos^{-1}(\sqrt{0,6}) = 13,6 \mu\text{m}$. ($d/\Lambda = 0,22$).

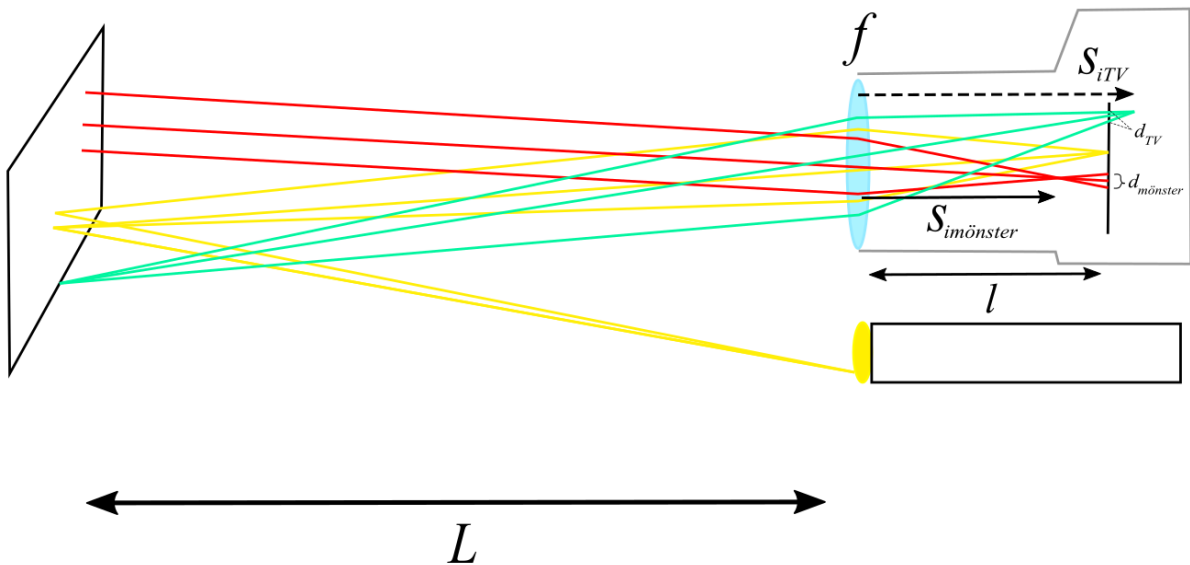
- c) Låt oss först beräkna linsens fokallängd. Vi har att:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i}$$

Och då lampan avbildas skarpt fås $f = (1/2L + 1/l)^{-1} = 4,95$ cm. Eftersom fokus hamnar i detektorplanet fås minsta feature size hos lampans bild enligt tumregel 3:

$d_{ficklamp} = 2,44 \frac{\lambda l}{D} = 1,22 \mu\text{m}$ ($\lambda = 500$ nm) (iii). Regnbågsmönstret/diffraktionsmönstret vars ordningar bestäms av propagationsriktningar existerar som spatiella frekvenser/parallella strålar/plana vågfronter vilka fokuseras på fokallängds avstånd efter lins $s_{imönster} = f$, alltså 4,95 cm efter lins och 5 mm framför detektor-planet (v). Storleken på avbildningen av en spatiell frekvens/plan vågfront fås nu med likformighet:

$$d_{mönster} = (l - f) \frac{D}{f} = 4,95 \text{ mm} \text{ (ii).}$$



Bilden av TV:n får vi igen från Gauss linsformel:

$s_{iTV} = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{L}\right)^{-1} = 5,05$ cm. Alltså hamnar en skarp bild av TV:n 5 mm bakom detektorarrayen (iv). Igen med likformighet får vi minsta feature size av TV:ns bild som:

$$d_{TV} = (s_{iTV} - l) \frac{D}{s_{iTV}} = 4,95 \text{ mm} \text{ (i).}$$

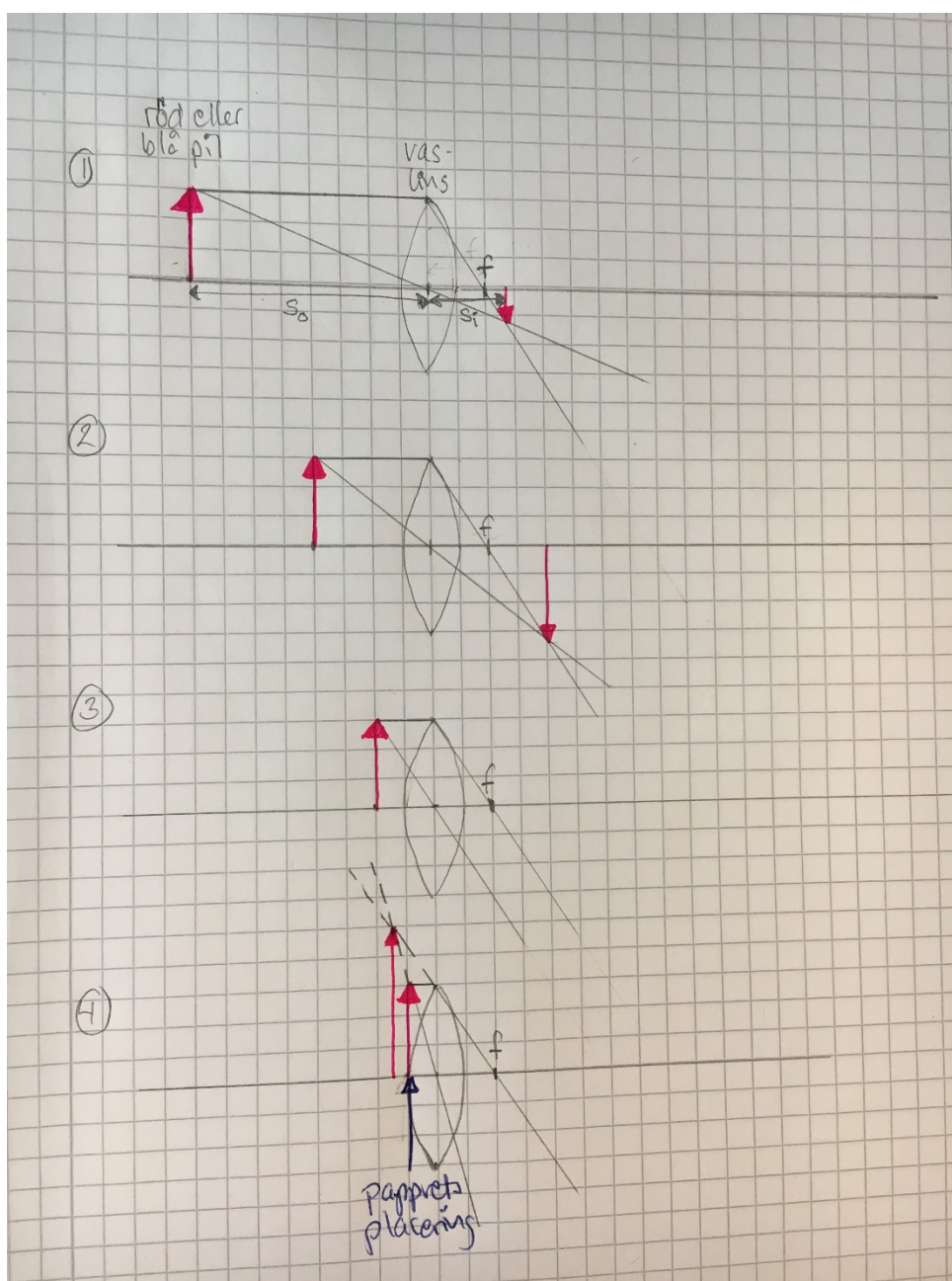
- d) Vi ser att om vi ställer in polarisationsfiltret i ett speciellt rotationsläge så försvinner regnbågsmönstret helt. Alltså har vi troligtvis något polarisationsändrande skikt i skärmen. Eftersom dagens skärmar är tunna är förmodligen det polarisationsändrande skiktet också tunt. Mest sannolikt sitter även ett polarisationsfilter i skärmen. Från LCD-skärmar vet vi att ett vätskekristall-skikt ofta omsluts av två polarisationsfilter roterade 90 grader mot varandra. Denna teknik lever ofta kvar även i moderna skärmar för att justera ljusnivåer. Ett polarisationsfilter är även akromatiskt (funkar för många våglängder samtidigt) vilket stärker idén om att det är denna komponent som finns i TV:n eftersom man förmodligen inte vill ha olika polarisationsegenskaper hos olika färger. Med denna insikt och med resultatet som presenterats i uppgiften sitter den tvådimensionella strukturen (som förmodligen är metallkopplingar till strömförsörjning av pixlarna) bakom polarisationsfiltret i skärmen, vilket innebär att regnbågsmönstret är av enbart en polarisation. Därmed spelar det ingen roll om

polarisationsfiltret placeras framför ficklampan eller kameran. Vi får ändå samma resultat. Detta stämmer för alla reciproka polarisationsändrande element.

Lösningförslag tenta i Optik FFY091 23:e augusti 2021

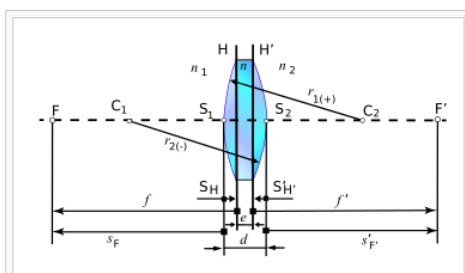
1. Magi med optik

- a) Stråldiagrammen nedan visar vad som händer när pappret med pilarna är placerat på olika avstånd i förhållande till vasens fokallängd, f . Allt är sett ovanifrån vasen (d.v.s. som om man tittar ner i vattnet i vasen). När pappret flyttas närmre vasen så blir först bilden större. Notera att bilden på pilen pekar i motstående riktning som pilen på pappret (d.v.s. åt vänster som i den högre figuren i uppgiftsformuleringen). När pappret istället placerats på en fokallängd ifrån vasen så blir utgående strålar parallella, men när pappret har flyttats förbi fokallängden så blir bilden virtuell och vänd åt samma håll som pilen på pappret. Alltså, vi kommer uppleva det som att pilen byter riktning när pappret är placerat på en fokallängd ifrån vasen.



b) Linsmakarformeln för tunna linser:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



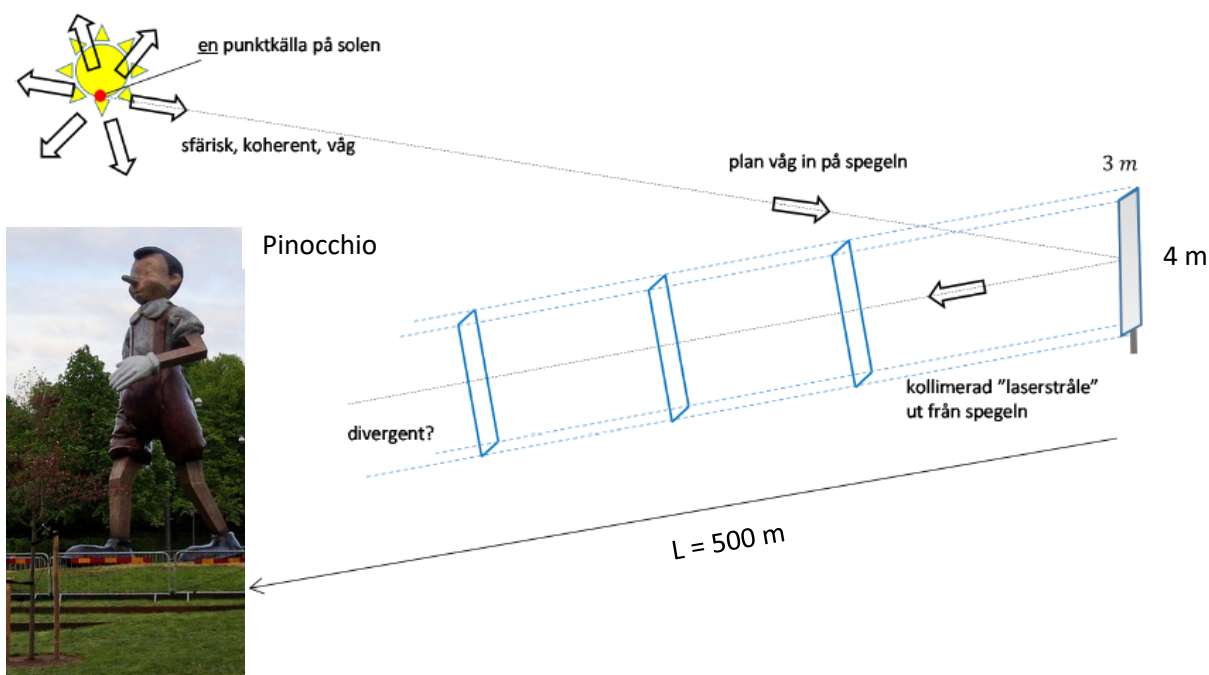
(Kan härledas på liknande sätt som fokallängd för den plankonkava linsen i Ö2.2.).

$$\frac{1}{f} = (1.33 - 1) \frac{2}{10cm} \rightarrow f = 15 cm$$

- c) Mindre diameter -> kraftigare krökningsradie -> starkare lins (kortare fokallängd) och därmed kommer avståndet ifrån vasen där pilarna byter riktning att bli kortare.
- d) Högre brytningsindex innebär en starkare lins (kortare fokallängd) och avståndet blir därmed kortare.
- e) Vasen är bara böjd i en riktning (horisontal-led) och inte två, dvs vi har bara en lins-effekt i horisontalled och inte en i vertikalled.
- f) Om glaset hade varit rektangulärt sett uppifrån så hade det inte blivit någon linseffekt alls. Ta t.ex. fallet med en plan våg som infaller vinkelrätt mot den vasytan. Fasfronten är fortfarande plan efter propagation genom den rektangulära vasen (om inte en del av ljuset inte träffar vasen förstås).

2. Ljus på Pinocchio

a)

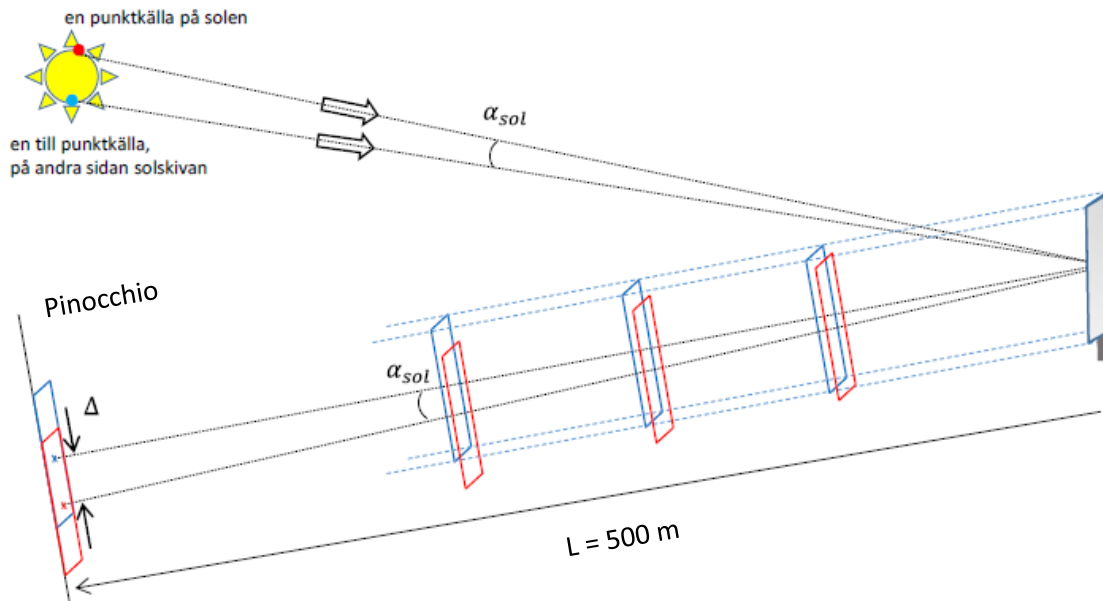


Vi börjar med att betrakta en ensam punktkälla på solytan. Den sänder ut en koherent (laserliknande) sfärisk våg, som med god approximation blivit plan över spegelns yta när den kommit till Jorden. Spegeln "skär ut" en rektangulär del av fältet, så att det reflekterade fältet har konstant amplitud över sitt rektangulära tvärsnitt och plana vågfronter (om spegeln är plan). Det fält som lämnar spegeln är alltså en kollimerad laserstråle med det enorma tvärsnittet 3 m x 4 m. Strålen uppfyller alltså villkoren i Plan 1 (precis efter spegeln) för tumregeln om minsta stråldivergens, den har alltså divergensvinkeln

$$\theta_{min} \approx \frac{\lambda}{\text{utbredning i Plan 1}} \approx \frac{550 \text{ nm}}{3 \text{ m}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

där vi tog en våglängd mitt i det synliga området och den mindre kantlängden på spegeln för att räkna med ett "worst case scenario". (θ_{min} gäller alltså egentligen stråldivergensen vinkelrätt mot papperet i figuren ovan, medan divergensen i papperets plan är än mindre eftersom vi då får dividera med 4 istället för 3.) I vilket fall är divergensen utomordentligt liten för en så bred stråle, så breddningen under 500 m propagation fram till torget är $\approx \theta_{min} \cdot L < 1 \text{ mm}$ d.v.s. fullständigt försumbar.

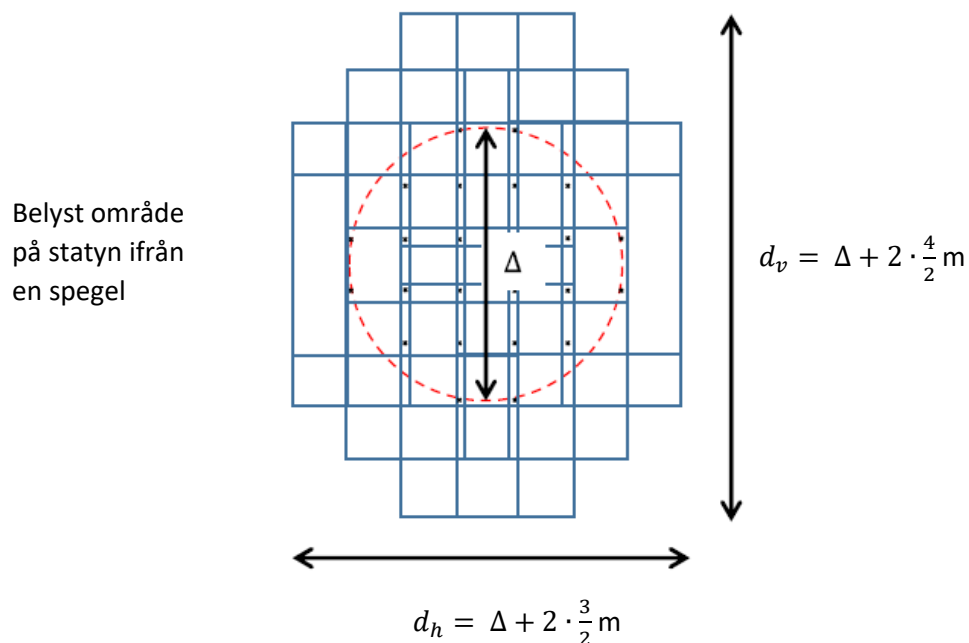
En punktkälla på motsatt sida av solytan ger på samma sätt en rektangulär belysning av torget, men dess centrumposition är förskjutet en sträcka Δ jämfört med första punktkällan:



Sträckan Δ fås ur vinkeln α_{sol} som är skillnad i infallsvinkel för de två plana vågor från respektive punktkälla på solen.

$$\Delta = \alpha_{sol} \cdot L = \frac{D_{sol}}{L_{sol}} L = \frac{1.4 \text{ milj. km}}{150 \text{ milj. km}} 500 \text{ m} \approx 5 \text{ m}$$

där D_{sol} och L_{sol} är solens diameter och avstånd till Jorden. Två diametralt motsatta källor ger alltså två belysta rektanglar på torget, vars centrumpositioner är separerade med $\Delta = 5$ meter. Den totala intensitetsfördelningen från alla källor på solen är alltså en mängd överlagrade rektanglar vars centrumpositioner ligger i ett cirkulärt område med diameter Δ .



Det belysta området är alltså lite elliptiskt med en vertikal utsträckning $d_v = \Delta + 2 \cdot \frac{4}{2} m \approx 9 m$ och horisontell utsträckning $d_h = \Delta + 2 \cdot \frac{3}{2} m \approx 8 m$

De tre speglarna kan ställas in för att belysta var sitt område av statyn. Den belysta arean blir då

$$A_{belyst} = 3 \cdot (9m \cdot 8m) = 216 m^2 \rightarrow \frac{A_{belyst}}{A_{staty}} = \frac{216 m^2}{9 \cdot 5m^2} \approx 4.8$$

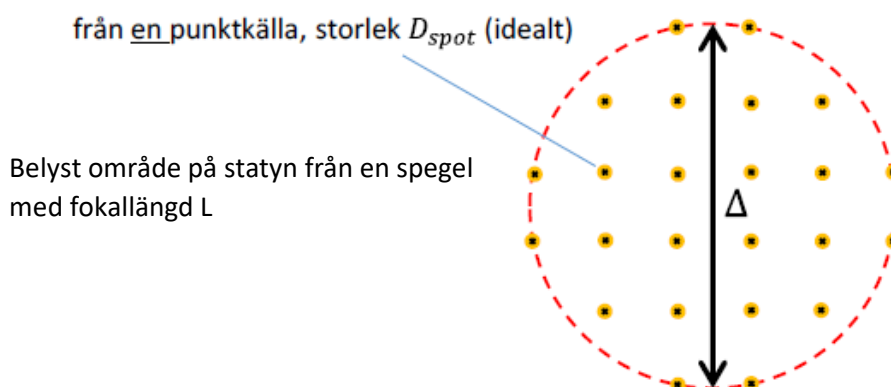
där A_{staty} är statys yta (antagit att statyn har ett rektangulärt tvärsnitt). Hela statyn kommer att kunna belystas av speglarna. Det hade t.o.m. räckt med en av speglarna.

b)

Om en spegel får en allt kraftigare sfärisk krökning kommer laserstrålen ut från spegeln, från en punktkälla, inte att vara kollimerad utan fokuserad på ett ändligt avstånd. När laserstrålen är fokuserad på statyn (vilket sker då spegelns fokallängd är $L = 500 m$, dvs spegelns krökningsradie är $2 \times 500 m = 1000 m$, så det inte mycket krökning som behövs) är ljuset fokuserat till minsta möjliga spot, med en diameter D_{spot} given av tumregeln

$$D_{spot} \approx \frac{\lambda}{\text{utbredning i Plan 1}} L \approx \frac{550 \text{ nm}}{3 m} 500 m \approx 92 \mu m$$

(Detta kräver en extrem precision hos spegelns ytform, förmodligen är fläcken på statyn från en punktkälla mycket större än så, men så länge den bara är mycket mindre än Δ påverkar det inte svaret på denna uppgift.) D_{spot} är dock inte storleken av det belysta området från alla punktkällor eftersom laserstrålen från varje punktkälla fortfarande är centrerad på samma ställe på statyn som när spegeln var plan. Men eftersom detta ljus nu är fokuserat överlappar inte längre ljuset från olika punktkällor varandra nämnvärt – vi har erhållit en bild av solen på statyn



Diametern på solbilden är $\Delta \approx 5$ meter. Detta resultat hade också kunnat fås direkt med geometrisk optik eftersom vi har en avbildning av solen på torget

$$\frac{D_{solbild}}{D_{sol}} = \frac{L}{L_{sol}} \rightarrow D_{solbild} = \frac{500m}{150 \text{ milj.km}} 1.4 \text{ milj km} \approx 5 m$$

Intensiteten i bilden I_{bild} kan vi få genom att inse att det är effekten som faller på spegeln P_{spegel} som fördelas över bilden på statyn

$$I_{bild} = \frac{P_{spegel}}{\pi \left(\frac{D_{solbild}}{2}\right)^2} = \frac{I_{spegel} \cdot A_{spegel}}{\pi \left(\frac{D_{solbild}}{2}\right)^2} = \frac{I_{spegel} \cdot 3m \cdot 4m}{\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 0.61 \cdot I_{spegel}$$

där I_{spegel} är intensiteten av solljuset som faller in på spegeln och A_{spegel} är spegelns area. Om vi nu ställer in de tre speglarna så att deras bilder av solen överlappar får vi alltså en intensitet I_{total} på statyn

$$I_{total} = 3 \cdot I_{bild} = 3 \cdot 0.61 \cdot I_{spegel} = 1.8 \cdot I_{spegel}$$

Intensiteten kan alltså som max bli ungefär 1.8 gånger högre än intensiteten hos det direkta solljuset, vilket knappast är farligt. Möjligen för Boråsare som inte är så vana vid solljus.

3. Polarisator-bonanza

Vi har att $\vec{J}_{in}^H \vec{J}_{in} = 2^2 + 1^2 = 5$.

a) $\vec{J}_{ut} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger $T = \frac{4}{5} = 0.8$.

b) $\vec{J}_{ut} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger $T = \frac{1}{5} = 0.2$.

c) $\vec{J}_{ut} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/16 \\ 6\sqrt{3}/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6\sqrt{3}/16 \end{bmatrix}$ ger $T = \frac{\left(\frac{6\sqrt{3}}{16}\right)^2}{5} = \frac{27}{320} = 0.0844$.

d) $\vec{J}_{ut} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha \end{bmatrix}$ ger $T = \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{5}$. Vi förenklar detta genom $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$. Vi får $T = \frac{4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{20} = \frac{\sin^2 2\alpha}{20}$. Sätter vi $T = \frac{3}{80} = \frac{\sin^2 2\alpha}{20}$. Detta ger $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och löses av $\alpha = 30^\circ$ eller 60° och ger $\vec{J}_{ut} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$.

e) Efter första polarisatorn har vi $\vec{J}_{ut,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. För en polarisator som avviker med en vinkel φ från referensaxeln gäller följande: $\vec{J}_{ut,k} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \vec{J}_{in,k} =$
 $\left(\text{Antag att } \vec{J}_{in,k} \text{ är } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ smidigt då vi får det från } \vec{J}_{ut,1} \right) =$

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \text{ Detta ger } T_k = \frac{\vec{J}_{ut,k}^H \vec{J}_{ut,k}}{\vec{J}_{in,k}^H \vec{J}_{in,k}} =$$

$$\frac{\cos^4(\varphi) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)}{1} = \cos^4(\varphi) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi). \text{ (Vi struntar i sinus-termen direkt eftersom}$$

den konvergerar mot 0 mycket snabbt och är helt irrelevant för vår gränsvärdesberäkning nedan!) Eftersom vi har en sträng med n polarisatorer som är separerade med vinkeln $\varphi =$

$\frac{\pi}{2n}$ får vi totalt $T_{tot} = \cos^{4n} \left(\frac{\pi}{2n} \right)$. Vi Taylorutvecklar cosinus med en expansionsterm (en

räcker ☺) och får $T_{tot} = \cos^{4n} \left(\frac{\pi}{2n} \right) \approx \left(1 - \frac{\pi^2}{8n^2} \right)^{4n}$. Gränsvärdet är $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{tot} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\pi^2}{8n^2} \right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 4n \frac{\pi^2}{8n^2} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Så vad betyder detta? Om vi har ett oändligt antal perfekta linjära polarisatorer uppställda på detta sätt får vi även full effektr Transmission (efter första elementet som tar bort en av polarisationskomponenterna, y i detta fall). Systemet beter sig som en ideell $\pi/2$ -rotator och kommer rotera infallande x-komponenten till y-riktningen och samtidigt blockera infallande y-komponent.

4. Diffraktionsgitter i simbassängen

a) Gitter ger upphov till spegelsymmetriska diffraktionsmönster. De två ljusstarka punkterna nedan visar första ordningens diffraktion, medan 0:e ordningen saknas. Detta kan skapas med fasmodulerande gitter med 50% duty cycle. Avståndet 1 cm är alltså avståndet mellan diffraktionsordningen -1 till +1 och halva detta avstånd, 0.5 cm är alltså avståndet mellan två närliggande diffraktionsordningar: $\sin \theta_1 = \frac{0.5}{100} = 0.005$

a) Sätter vi in detta i gitterekvationen, så får vi att gitterets period är:

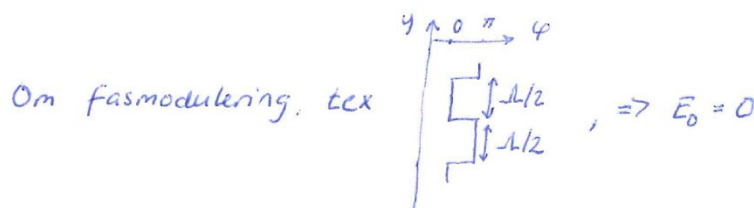
$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sin \theta_1} = 632 \text{ nm} * 100 / 0.5 = 126.4 \text{ } \mu\text{m}$$

Om allt sänks ner i vatten (anta $n=1.33$) så blir våglängden $632 \text{ nm} / 1.33 = 475 \text{ nm}$

$$\rightarrow \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{475 \text{ nm}}{126\,400 \text{ nm}} = 0.00376 = \frac{y}{100} \rightarrow y = 0.376 \text{ cm}$$

Om allt är nedsänkt i vatten blir alltså avståndet ovan $0.376 * 2 = 0.75 \text{ cm}$ d.v.s. kortare än om allt är i luft.

Ljuset i 0:e diffraktionsordningen som ligger mitt emellan de två starkaste synliga diffraktionsordningarna i figuren ovan kommer att öka (ifrån att se ut att var helt utsläckt i fallet ovan). Detta beror på att våglängden blir kortare då gittret nu är nedsänkt i vatten med högre brytningsindex än luft och vi kommer då inte längre få HF-källor som är ur fas med varandra för detta fasmodulerande gitter. I figuren nedan (som användes för att härleda diffraktions-ordningarnas inbördes ljusstryka på föreläsningen) är alltså HF-källornas fas inte 0 eller pi vilket innebär att de inte fullständigt kan släcka ut varandra i "rakt-fram-riktningen", dvs 0:e diffraktionsordningen, och vi kommer då att få viss intensitet där. Intensiteten ökar alltså i 0:e ordningen då den var 0 när gittret testades i luft (perfekt tillverkat gitter för luft).



b) Om vätskan har ett brytningsindex på 1.5 är det samma som gittret, dvs gittret och vätskan ihop kommer upplevas som ett rätblock med ett brytningsindex överallt och diffraktionsmönstret försvinner därmed.

5. Ringlasers och jordrotation

a)

Summan av fälten på detektorn:

$$E_d = E(\cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t))$$

och motsvarande intensitet fås som

$$I_d = |E_d|^2 = |E|^2(\cos^2(2\pi\nu_1 t) + \cos^2(2\pi\nu_2 t) + 2\cos(2\pi\nu_1 t)\cos(2\pi\nu_2 t))$$

Genom att applicera de trigonometriska identiteterna i ledningen fås

$$I_d = |E|^2(0.5(1 + \cos(2\pi(2\nu_1)t)) + 0.5(1 + \cos(2\pi(2\nu_2)t)) + \cos(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t) + \cos(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t))$$

b)

Om $\nu_1 \sim \nu$, $\nu_2 \sim \nu$ och $\nu = 473.6$ THz, då kan $2\nu_1$, $2\nu_2$ samt $\nu_1 + \nu_2$ betraktas som höga frekvenser. Filtrerar man bort de höga frekvenserna från uttrycket i a) får vi att

$$I_d \sim \cos(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t)$$

Man skulle därmed kunna säga att man mäter skillnaden i frekvens $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$.

c) För konstruktiv interferens ska fältet upprepas varje rundtur: $E(r) = E(r + S)$. Detta ger att

$$\exp(jk_0 r) = \exp(jk_0(r + S)) \rightarrow 1 = \exp(jk_0 S)$$

Eftersom $1 = \exp(jm2\pi)$, där m är ett positivt heltal, så gäller att

$$m2\pi = k_0 S = (2\pi/\lambda)S \rightarrow m = S/\lambda \rightarrow \nu = mc/S$$

d)

Resonansfrekvensen, ν , hos det monokromatiska ljuset i frånvaro av Jordrotationen är given som

$$\nu = m \frac{c}{S}$$

När ringlasern roterar så färdas ljuset olika lång sträcka beroende på om det färdas med- eller moturs. Detta ger upphov till en skillnad i den sträcka som ljuset färdas, ΔS . Enligt ekvationen ovan ändras då den "skenbara" frekvensen, ν , hos de två strålarna. Vi fokuserar här på frekvensen, vilken ges av

$$\nu_1 = m \frac{c}{S - \Delta S} = m \frac{c}{S^2 - (\Delta S)^2} (S + \Delta S) = m \frac{c}{S} \left(1 + \frac{\Delta S}{S}\right) = \nu \left(1 + \frac{\Delta S}{S}\right)$$

$$\nu_2 = m \frac{c}{S + \Delta S} = m \frac{c}{S^2 + (\Delta S)^2} (S - \Delta S) = m \frac{c}{S} \left(1 - \frac{\Delta S}{S}\right) = \nu \left(1 - \frac{\Delta S}{S}\right)$$

Där ν är frekvensen om ringlasern stått stilla utan inverkan av jordrotation. Med dessa två uttryck får man att skillnaden i frekvens blir

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 2\nu \frac{\Delta S}{S}$$

Nu behöver vi klura ut ΔS i termer Ω . Under tiden som laserljuset färdats ett varv i ringlasern har Jordens vinkelhastighet vridet ringlasern en liten vinkel Ωt som i sin tur ger upphov till en skillnad i gångväg för laserstrålarna som färdas åt motsatt riktning. Från triangeln i den översta figuren får vi att

$$\Delta S = \frac{L}{2} \Omega t = \frac{L}{2} \Omega \frac{4L}{c} = \frac{2A\Omega}{c}$$

Där tiden det tar för ljuset att passera en rundtur i ringlasern är $t = S/c = 4L/c$ och $A = L^2$. Slutligen får man att

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 2\nu \frac{\Delta S}{S} = \frac{4A\Omega\nu}{cS} = \frac{4A\Omega}{\lambda S}$$

e)

Om rotationsaxeln inte är rätvinklig mot planet som ringlasern ligger i ändras uttrycket något. Man kan tänka sig att arean projiceras ned på ett plan som är rätvinkligt mot Jordensrotationsaxeln varpå man får en effektiv area $A \rightarrow A \sin(\theta)$ och formeln från uppgift d) modifieras till

$$\Delta\nu = \frac{4A\Omega\nu}{cS} \sin(\theta) = \frac{4A\Omega}{\lambda S} \sin(\theta)$$

f)

Från figuren läser man att $\Delta\nu = 70.6353$ Hz. Med $A = L^2$ och $S = 4L$ får man att (räkna om med $\sin(\theta = 57.7)$ i Göteborg)

$$\Delta\nu = \frac{4A\Omega}{\lambda S} \sin(\theta) = \frac{L\Omega}{\lambda} \sin(\theta) \rightarrow \Omega = \frac{\lambda\Delta\nu}{L \sin(\theta)} = 7.3 * 10^{-5} \text{ rad/s}$$