

Tentamen i Optik FFY091 - tisdag 16 mars 2021, kl. 14:00-19:00

Alla hjälpmedel är tillåtna, förutom lasrar av säkerhetsskäl då vi inte vill att ni ska få några permanenta ögonskador för att ni har tittat in i en laserstråle under tentan. Notera att alla lösningar måste vara uppladdade innan kl. 19.00 och inget samarbete är tillåtet under tentamen.

Examinator och jourhavande lärare Åsa Haglund nås på e-post asa.haglund@chalmers.se, tel. **031-772 1592**, eller sms **073-142 88 47**. På kurshemsidan publiceras lösningsförslag på onsdag.

Max 60 poäng (exklusive bonuspoäng från HUPParna).

Betygskrav (inklusive bonus): betyg 3: 30 poäng, betyg 4: 40 poäng, betyg 5: 50 poäng.



”en historisk tentauppgift”

1. Missar du mördaren?

Du är på Drottningholmsteatern för att kolla på operan *Maskeradbalen* av Giuseppe Verdi. Operan handlar om mordet på den svenske kungen Gustav III, som inträffade i mars 1792.

För att se bättre vad som händer på scenen, 15 meter bort, använder du din *teaterkikare*. I en teaterkikare är linsen närmast ögat (okularet) negativ, till skillnad från en vanlig kikare. Bilden till höger är stulen från Internet, och visar en teaterkikare.

Du riktar din teaterkikare mot punktkälla A, mitt i Gustavs ansikte (se bilden ovan). En helt korrekt strålgångsanalys för ljuset från punktkälla A genom kikaren visas i den skalenliga figuren på sista sidan av denna uppgift. Denna figur har också distribuerats till alla kursdeltagare före tentan.



- a) Komplettera den påbörjade strålgången (blå strålar, du kan rita med blyerts) genom kikaren fram till slutplanet, för ljus som kommer från punktkällan B på Anckarström! Vi antar att punktkälla B är 1.5 m från punktkälla A, men på samma avstånd i längsled, $s_o = 15 m$, från dig) *Gör lämpliga konstruktioner i skissen och beskriv varje steg i din konstruktion med några få ord (ej fullständig förklaring) som en numrerad lista:*

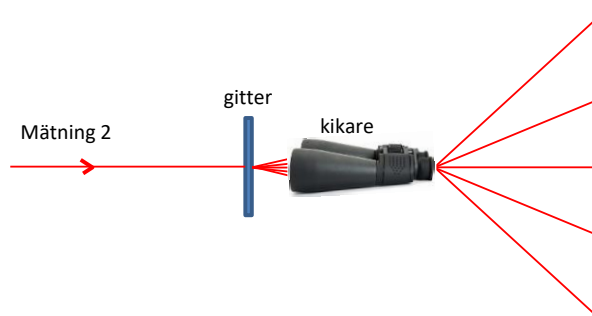
1. Hitta F_{1A} genom att ...
2. ...

Du kan använda beteckningarna K och F för "källa" och "fokus", 1 och 2 för lins 1 och lins 2, och A och B för ljus från punktkälla A respektive B.

Var hyfsat noggrann - du ska använda din skiss i följande deluppgifter. Lämna in skissen med dina övriga lösningar! (5p)

- b) Från din skiss, avgör om bilden upplevs rättvänd eller upp och ned när du kollar i kikaren! (1p)
- c) Från din skiss, bestäm kikarens förstoring i vanlig mening (den som anges på kikaren)! (2p)

Ledning: Förstoringen hos en kikare bestämde du experimentellt i Labb D:

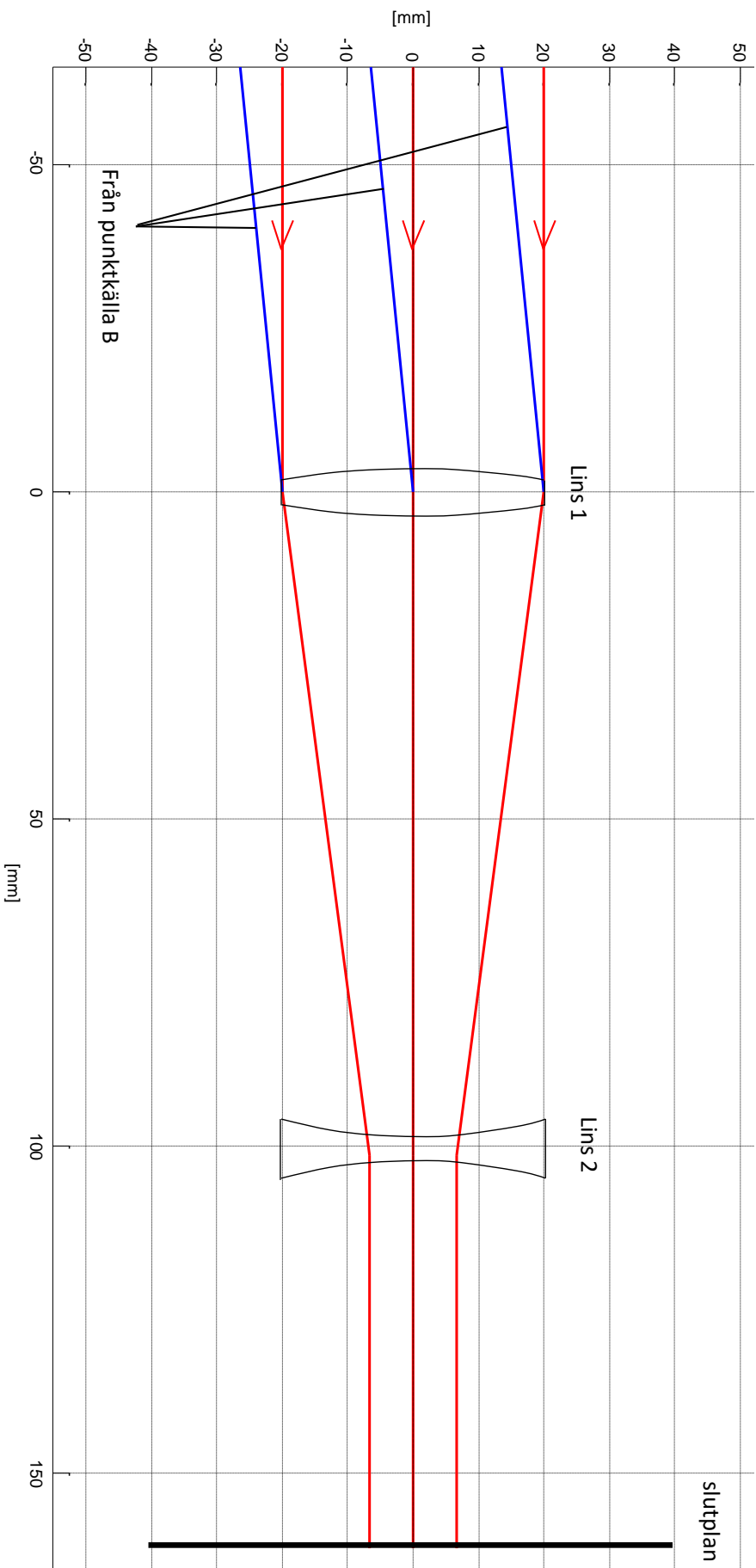


- d) Just i detta ögonblick avlossar Anckarström sin pistol! Kommer du att se gärningsmannen, d.v.s. befinner sig Anckarström inom ditt synfält? (3p)

Ledning: Skissa ditt öga i samma figur som du ritat strålgången. Antag följande...

1. ... att ögats symmetriaxel sammanfaller med kikarens, alltså att ögat ligger "rakt bakom" kikaren.
2. ... att av praktiska skäl kan ögat inte vara närmare okularet än 1 cm.
3. ... att din pupilldiameter är hela 8 mm – det maximala värdet för de flesta personer – eftersom du blivit skrämmd av den otäcka stämningen på teatern.

Strålgång sett från ovan (alla strålar ligger i papperets plan)

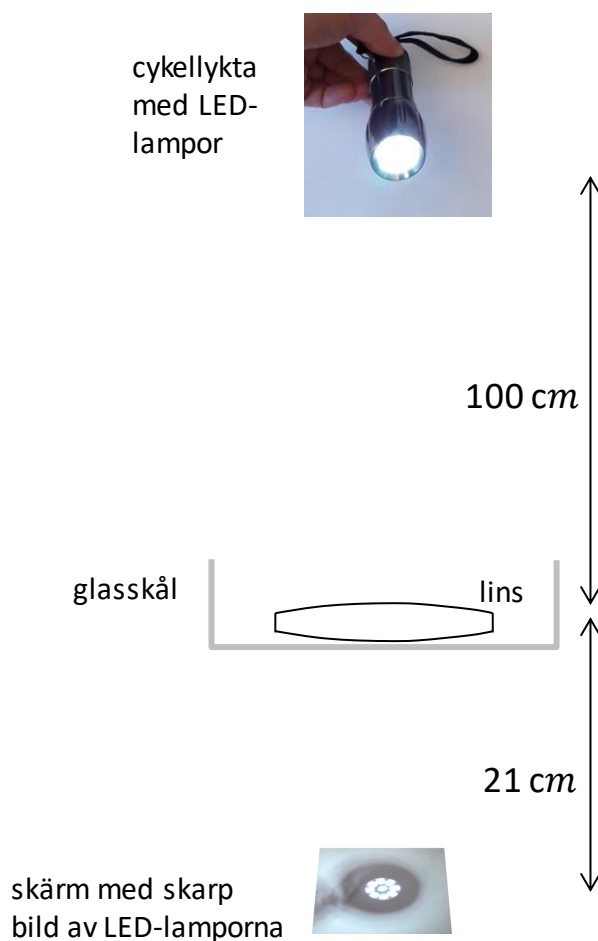


Bifoga detta blad till dina lösningar!

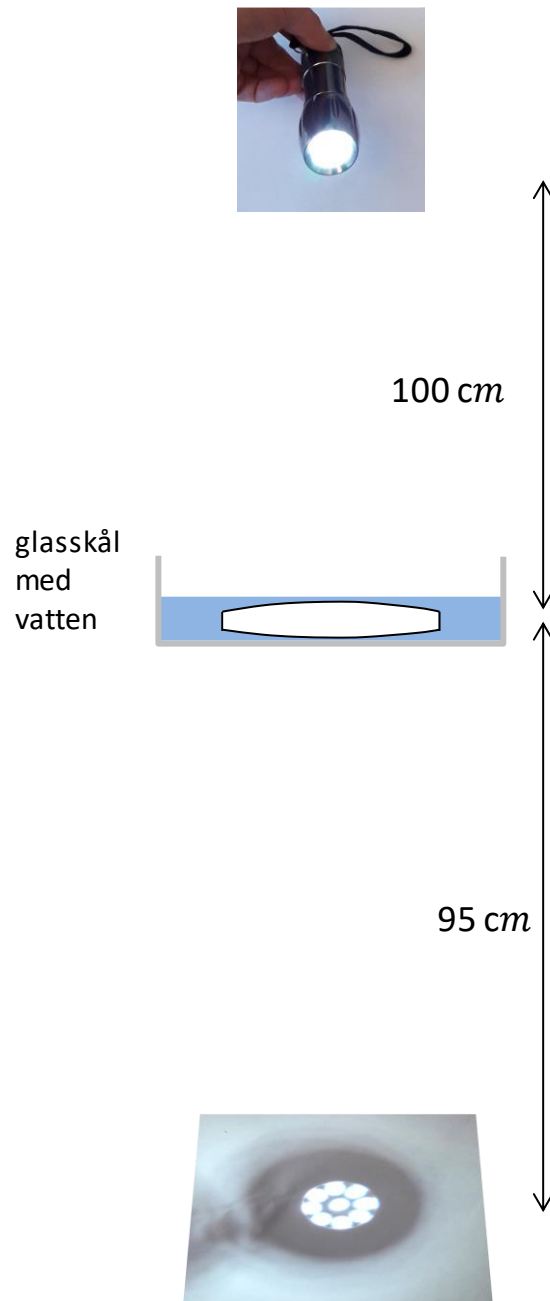
2. Köp inte linser på JULA, eller?

Du har köpt en positiv lins på JULA. Den kostade extra mycket eftersom den påstods vara gjord av ett glasmaterial med extra högt brytningsindex ($n = 1.7$) i stället för $n \approx 1.5$ som är brytningsindex för de vanligaste – och billigare – glastyperna.

För att verkligen bestämma brytningsindexet på linsen gör du ett hemmaexperiment. Du lägger linsen i en glasskål med plan botten. Du lyser på linsen med en cykellykta med LED-lampor som du håller 100 cm ovanför linsen, och får då en bild av LEDarna på avståndet 21 cm under linsen:



Sedan häller du vatten i glasskålen så att det precis täcker linsen. Med cykellyktan fortfarande 100 cm ovanför linsen får du nu en skarp bild av LEDarna på avståndet 95 cm under linsen:



Ur dessa försök, vilket värde får du på brytningsindexet för linsmaterialet? Kan man lita på JULA? (12p)

Ledningar:

- Antag att glasskålens botten är jämntjock – då kan du bortse från den.
- Välj ett lämpligt in- och utplan, och betrakta det som finns mellan dessa plan som en TOK.
- Vilka fokallängder har de två TOKarna för att vi ska få skarpa avbildningar på de uppmätta avstånden?
- Vilken fasmodulering, $\varphi(r) = -\dots + const$, måste en TOK ha för att fungera som en lins med en viss fokallängd?
- Teckna denna fasmodulering fysiskt genom att gå från in- till utplan med TOK-modellen, $\varphi(r) = \dots + \dots + \dots$.

3. Kisdiffraktion

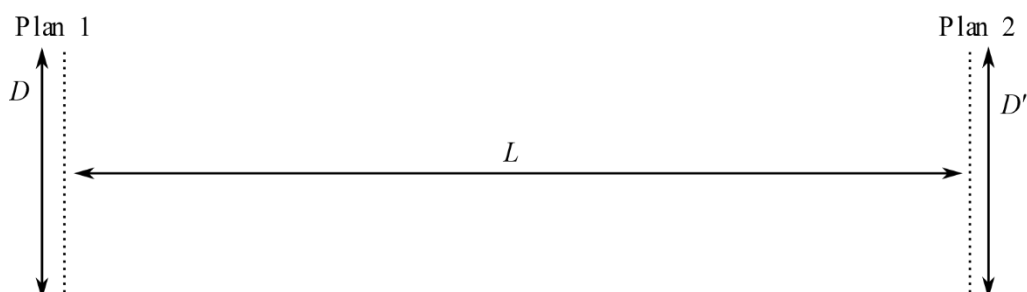
Antag i deluppgifterna som följer att den paraxiella approximationen gäller. Av säkerhetsskäl tillåts ej lasrar som hjälpmedel för att lösa den här uppgiften.

- a) Den paraxiella approximationen gäller (d.v.s. $D, D' \ll L$). Visa att största fasdifferensen $\Delta\varphi_{max}$ mellan två punkter i plan 2 som belyses av en punktkälla i plan 1 ges av:

$$\Delta\varphi_{max} \cong \frac{\pi D D'}{\lambda L}, (D \geq D')$$

$$\Delta\varphi_{max} \cong \frac{\pi(D + D')^2}{4\lambda L}, (D < D')$$

där största utbredningen i plan 1 är D och i plan 2 D' (se bild nedan), λ är våglängden och L är avståndet mellan plan 1 och plan 2:



(2p)

- b) Antag att fältet i plan 1 kan skrivas $E_1(x, y) = E_0(x, y)e^{i\varphi(x, y)}$ där $E_0(x, y) = |E_1(x, y)|$. Enligt Huygen-Fresnels metod fås E-fältet i plan 2 genom att koherent summera bidraget från samtliga punktkällor i plan 1 i varje punkt i plan 2:

$$E_2(x', y') = \iint_{xy} E_1(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy, \quad r = \sqrt{L^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}$$

där "r" är avståndet mellan punkt $(x, y, 0)$ och punkt (x', y', L) . Om $\Delta\varphi_{max}$ från uppgift a) är mycket litet, säg $\Delta\varphi_{max} \leq \frac{\pi}{10}$, kan vi då göra approximationen: $E_2(x', y') \cong const$ överallt i plan 2? varför? (1,5p)

Vad kallas en våg som kan skrivas $E(x, y) = const$? (0,5p)

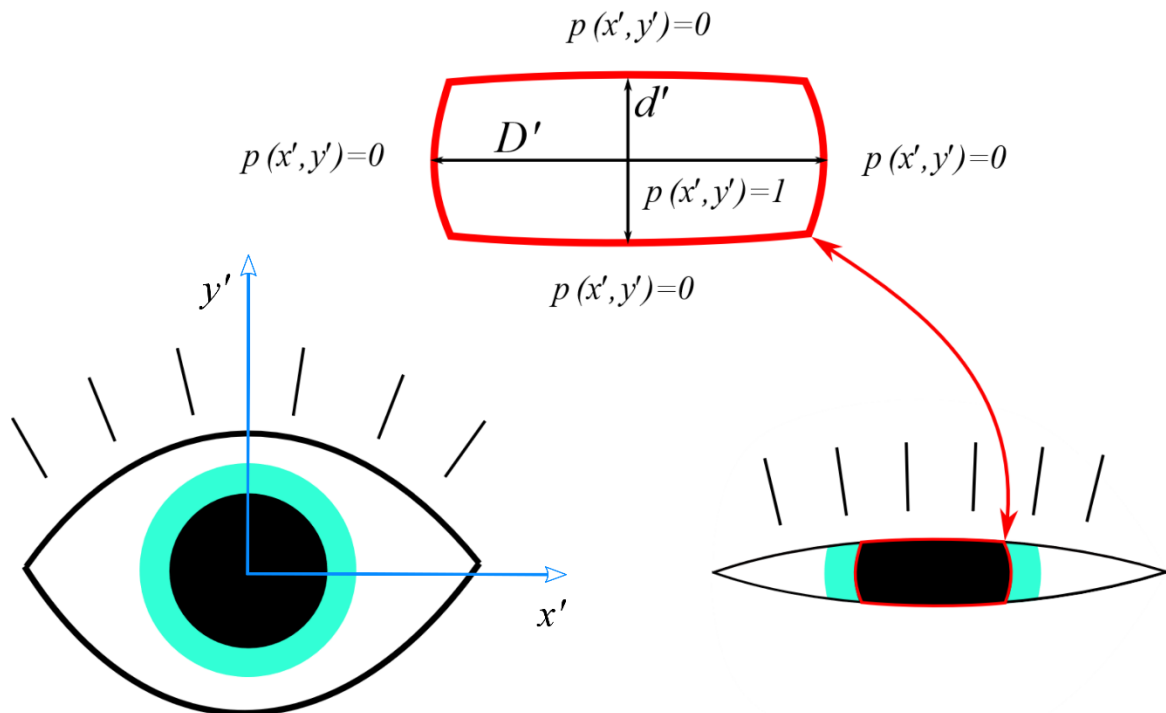
- c) Betrakta en tunn apertur vars transmissionsfunktion ges av:

$$p = p(x', y'), \text{ där } p(x', y') = 0 \text{ för } \sqrt{x'^2 + y'^2} > D'$$

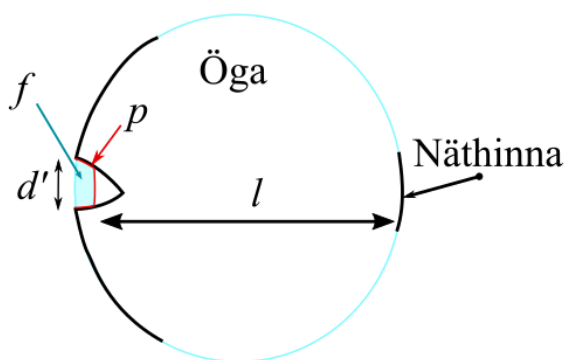
Givet att du har tillgång till ett fält $E(x', y') = const$ i ett känt plan, en lins med fokallängd f , ($f > 0$) samt en skärm som du kan placera valfritt i rummet, skissa en uppställning där funktionen $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ beskriver intensiteten som landar på skärmen. Förklara och ange eventuella avstånd och antaganden! (2p)

Obs: $\mathcal{F}\{g\}$ betecknar fouriertransformen av g i dess rumsliga koordinater och a är enbart en positiv reell konstant vi inte bryr oss alltför mycket om just här och om du vill kan du låtasas att $a = 1$.

d) Antag att du vill bestämma $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ för $p = p(x', y')$ visualiserad nedan:

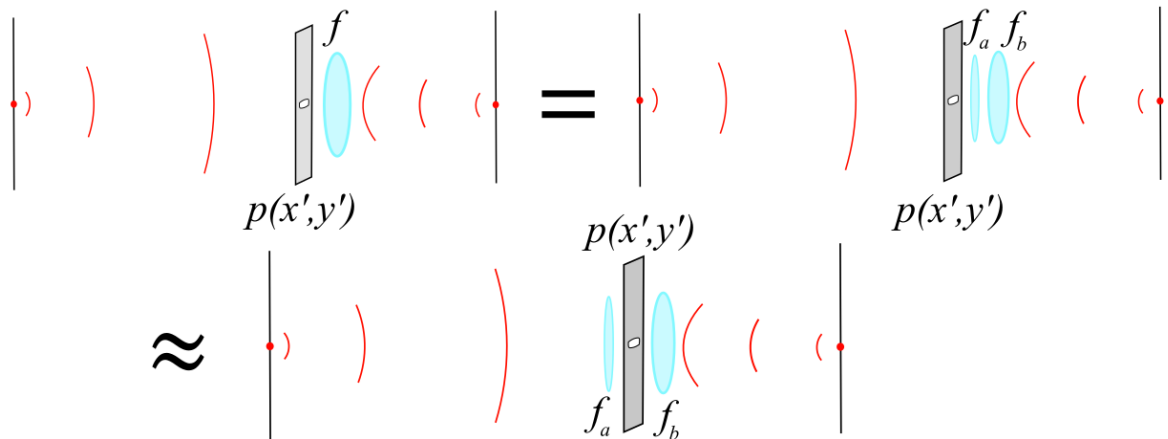


Alltså, $p = 1$ innanför den röda begränsningen och $p = 0$ utanför. Som figuren ovan antyder är ett lämpligt verktyg för att åstadkomma detta det mänskliga ögat + ögonlock. Om $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ beskriver intensiteten som landar på vår näthinna skapas direkt en bild motsvarande det vi vill bestämma i vår hjärna!



Ögonfakta: Pupilldiametern D' varierar mellan 2-4mm i ljusa förhållanden och mellan 4-8mm i mörker. Avståndet lins-näthinna är ungefär 20-25mm. På näthinnan finns en stor uppsättning ljusreceptorer som samlar intensitet och skickar informationen vidare till syncentrum. Linsen i ögat ändrar fokallängd f automatiskt när vi tittar på objekt på olika avstånd så att objektet avbildas skarpt på näthinnan. Genom att kisa kan vi variera andelen ljus som släpps in i ögat men samtidigt också d' .

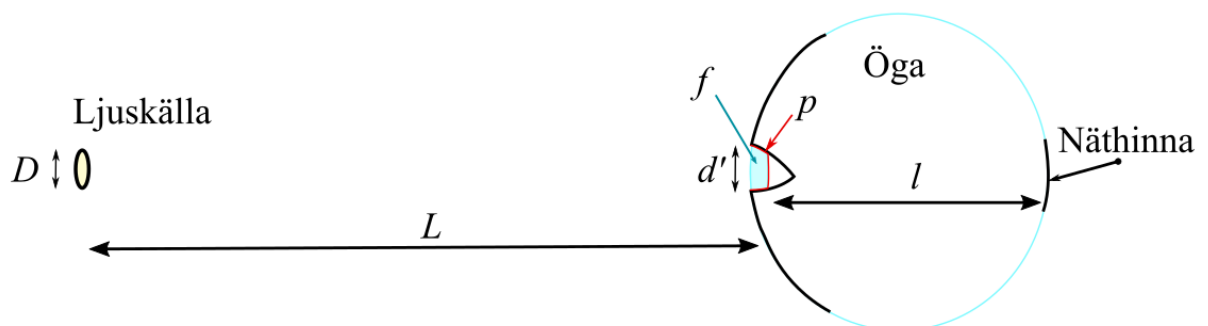
I uppgift c) hade vi tillgång till ett fält $E_2(x', y') = const$ utöver lins och skärm. Beroende på de optiska komponenter, ljuskällor och begränsade avstånd du har tillgång till i hemmet kan det dock vara svårt att åstadkomma ett fält $E_2(x', y') \cong const$. Som tur är löser ett välfokuserat avbildningssystem problemet tillsammans med TOK-tänk:



Observera att lösningen ovan bygger på att ljuskällan består av en enda punktkälla. Med denna insikt ange värden på storleken D och avståndet L på ditt val av ljuskälla (ej laser) respektive dess placering i bilden nedan så att funktionen $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ beskriver intensiteten på näthinnan så väl som möjligt. Vad blir fokallängderna f , f_a och f_b i ditt system? Förklara! Gör rimliga antaganden där det behövs och motivera de val du gör! (3p)

Varför löser det ovan nämnda TOK-tänket problemet? (1p)

Om inte den här smidiga lösningen fanns hur stort hem skulle du då behöva för att skapa $E_2(x', y') \cong \text{const}$ i ett plan med utbredning D' framför p med din ljuskälla? (1p)



Tips: Om du har svårt att hitta en lämpligare ljuskälla kan ficklampan i din mobil vara en bra ljuskälla att utgå ifrån.

För dig med dålig syn: Om ditt öga av något skäl inte är välfokuserat har du förhoppningsvis en kontaktlins eller ett glasöga som gör det välfokuserat. Antag i så fall att effekten av glasöga/kontaktlins är inbakad i ögonlinsen, alltså låtsas som att du inte har något glasöga/kontaktlins och att du ändå ser bra.

- e) Förverkliga systemet från uppgift d), exempelvis med ficklampan i din mobil som ljuskälla. Fundera en extra gång över systemets omgivning och försäkra dig så att det är rätt funktion p du skapar med ditt öga + ögonlock så att du undviker misstag. Skissa nu grovt den intensitet din ljuskälla ger upphov till på näthinnan och beskriv i grova drag hur intensitetsmönstret beror på d' , ($0 < d' \leq D'$). (3p)

Är det någon distinkt del (S) av intensitetsmönstret vars storlek inte varierar när du ändrar d' ? Vad skulle du kalla denna "del" och vilken storlek bör den rimligtvis ha i ditt system? (1p)

- f) På grund av praktiska begränsningar är det inte strikt funktionen $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ vi ser i uppgift e) utan en 3-dimensionell tidsmedelvärdesbildad summa \rightarrow integral:

$$I(x', y') \propto \left\langle \left| \int_{\lambda} \iint_S \mathcal{F} \left\{ p \left(\frac{x' - s_x}{\lambda l}, \frac{y' - s_y}{\lambda l} \right) \right\} dS d\lambda \right|^2 \right\rangle, \{ \mathbf{s} = s_x \hat{x} + s_y \hat{y} \} \in S$$

där l är ett visst avstånd i avbildningssystemet. Om mobilficklampa används som ljuskälla kan uttrycket ovan förenklas till:

$$I(x', y') \propto \int_{\lambda} \iint_S \left| \mathcal{F} \left\{ p \left(\frac{x' - s_x}{\lambda l}, \frac{y' - s_y}{\lambda l} \right) \right\} \right|^2 dS d\lambda, \{ \mathbf{s} = s_x \hat{x} + s_y \hat{y} \} \in S$$

Varför? (2p)

Observera att: $\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g dt$ där T är tiden över vilken funktionen g medelvärdesbildas.

Dessutom, om S är liten relativt den betydande delen av $I(x', y')$ samt har en gynnsam form höftar vi till ännu en förenkling:

$$I(x', y') \propto \int_{\lambda} \left| \mathcal{F} \left\{ p \left(\frac{x'}{\lambda l}, \frac{y'}{\lambda l} \right) \right\} \right|^2 d\lambda$$

Baserat på din undersökning i uppgift e), är detta rimligt i ditt fall? Skulle du i så fall påstå att du bestämt den polykromatiska PSF:en av ett kysande öga? (1p)

4. 3D bio på återseende!

I HUPP 2 undersökte vi ett 3D-bio-system som illustreras i Fig. 1. Glasen i 3D-glasögon (sådana man använder när man ser 3D filmer på bio) består av två tunna skikt limmade på varandra, det första (närmast ögat) är en polarisator, det andra är en kvartsvågspatta med optiska axeln $\pm 45^\circ$ i vinkel mot polarisatorns transmissionsriktning. Innanför glasen på ett par 3D-glasögon placeras två pappersbitar med bokstaven "R" respektive "L". Vidare tar du själv på dig ett par sådana glasögon på vanligt sätt och tittar på R-L-glasögonen. I HUPPEN visade vi att när du tittar med höger öga ser du bara bokstaven "R" medan glasets framför bokstaven "L" tycks ogenomskinligt, och vice versa när du tittar med vänster öga!

Systemet fungerade utmärkt när vi bara kollade på en våglängd åt gången (Fig. 1). Men det är ju rätt tråkigt att bara se en färg! Vi insåg dock ett problem när vi skulle kolla på flera färger samtidigt. En "spökbild" dök upp på glasögat som inte borde släppa igenom något ljus! Detta är p.g.a. att kvartsvågspattan är våglängdsberoende.

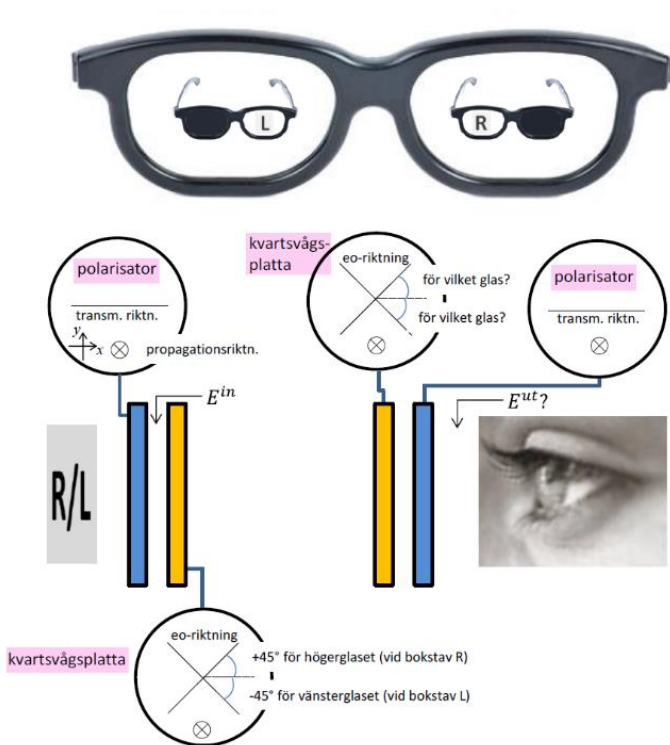
Som tur var fanns det ett enkelt "trick" för att rätta till problemet, nämligen att rotera glasögonen vid bokstäverna 90° (se Fig. 2).

- a) Förklara varför spökbilden försvinner om glasögonen vid bokstäverna roteras 90° genom att beskriva vad som händer med ljuset när det går igenom de olika komponenterna från bokstaven R till observatörens L-glasöga. (5,5p)

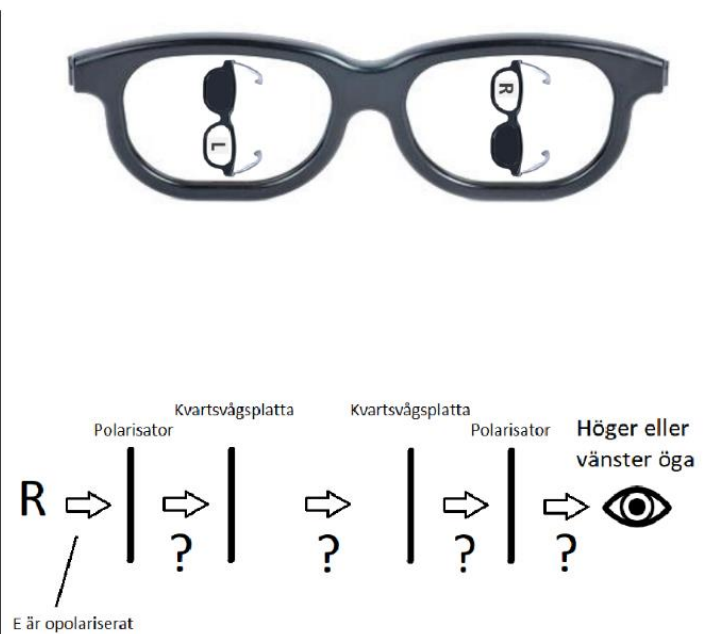
- b) En nackdel med det roterade systemet (Fig. 2) är dock att intensiteten som går igenom glasögat som släpper igenom ljus reduceras för de våglängder som avviker ifrån designvåglängden. Förklara varför det blir så genom att beskriva vad som händer med ljuset när det går igenom de olika komponenterna från bokstaven R till observatörens R-glasöga. (5,5p)

Inga beräkningar krävs, utan enbart ett resonemang. Rita en skiss likt Fig. 2 och visa hur E-fältet ser ut efter varje komponent. Det räcker med att betrakta hur bokstaven "R" ser ut i observatörens R- och L-glas. Antag att kvartsvågsplattan för designvåglängden 550 nm (grönt ljus) adderar en fas på $\pi/2$ rad till fältet polariserat parallellt med extraordinära riktningen jämfört med fältet polariserat parallellt med ordinära riktningen i kvartsvågsplattan. För våglängder som avviker ifrån designvåglängden är denna addering i fas $\frac{\pi}{2} + \phi$, där ϕ är våglängdsberoende. Ljuset från pappret med bokstaven kan betraktas som opolariserat. Därför kan du börja din propagation efter polarisatorn närmast pappret med bokstaven. Detta startfält är markerat med E_{in} i figuren nedan.

Tips: tänk på hur de olika komponenterna i Fig. 1 ändras när de roteras.

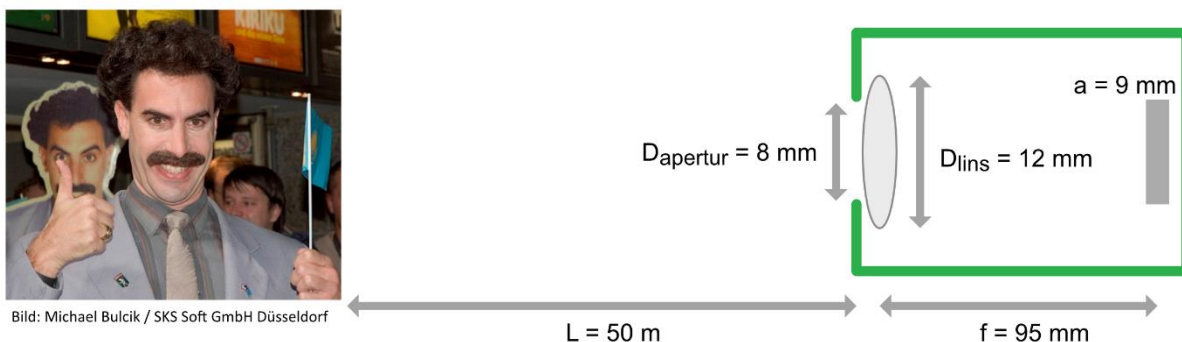


Figur 1: Oroterat system (fungerar för en färg åt gången)



Figur 2: Roterat system (fungerar för flera färger samtidigt!)

5. Bästa paparazzo-bilden?



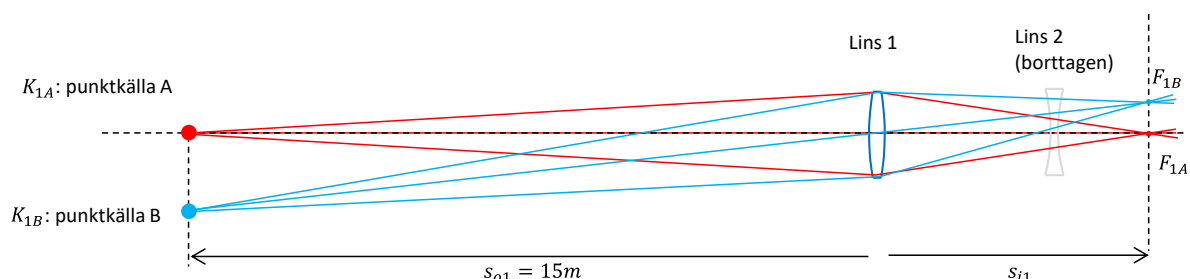
En paparazzo gömmer sig i buskarna utanför en kändis villa och försöker ta några kort av kändisen med sin (mycket enkla) kamera bestående av en apertur (som går att ställa in) med diameter D_{apertur} , en lins med fokallängd f och diameter D_{lins} samt en kvadratisk detektor med sidlängd a . Kortet är taget i dagsljus. Linsen är tillverkad av ett homogent material som har ett brytningsindex som är starkt våglängdsberoende inom våglängdsintervallet för synligt ljus. Paparazzon vill givetvis få så skarpa kort som går! Det är ok att använda det paraxiella antagandet.

- Skapar ljuset som faller in på detektorn en reell eller en virtuell bild i detektorns bildplan? Rätt svar på denna deluppgift ger (1p), felaktigt svar ger (-1p), inget svar ger (0p). Hela uppgiften kan inte ge ett negativt bidrag till tentamen.
- Beräkna minsta spot size på detektorarrayen för ljus av våglängd 550 nm. Använd parametervärden givna i uppgiftsbilden. (1,5p)
- Hur många pixlar (minst) behöver detektorn bestå av för att pixelstorleken inte ska vara begränsande faktorn för upplösning för ljuset av samma våglängd som i b)? (1,5p)
- Vad är storleken på de minsta detaljerna på kändisen (ej på detektorn) som syns på bilden tagen med detta kamerasystem om vi gör pixlarnas sidor hälften så långa som det krävs i c) medan spot sizen fortfarande är av samma storlek som i b)? Antag samma monokromatiska ljus som i b), samt att fokallängden är som den givna i uppgiftsbilden. (2p)
- I verkligheten är det tyvärr inte lika lätt som i b) och c) utan linsen har ju som sagt ett brytningsindex som är starkt beroende av våglängd. Vad medför detta för problem i dagsljus? (1p)
- Vi har nu en bättre lins som inte har ovanstående problematik. Vi tar en bild i mörkare ljusförhållanden, vad händer med skärpan på bilden jämfört en bild tagen i dagsljus med samma bättre lins? Tips: tänk på att kamera-aperturen storlek förändrar sig på samma sätt som ögats apertur vid mörka förhållanden. (1p)

Lösningförslag tenta i Optik FFY091 16:e mars 2021

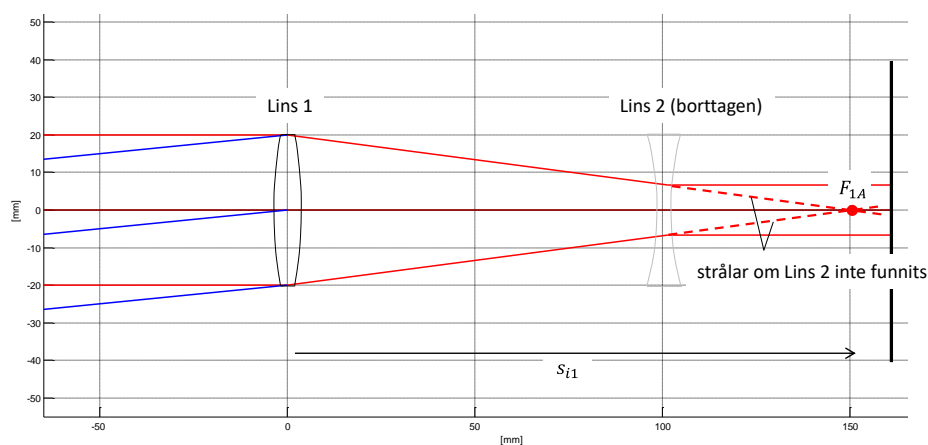
1. Missar du mördaren?

a) Vi börjar med strålgången efter Lins 1. Punktkälla B har samma avstånd, s_{o1} , till Lins 1 som punktkälla A.



1. Därför ligger också fokuset för ljuset efter Lins 1 på samma avstånd, s_{i1} , från Lins 1. Gauss linslag, som relaterar s_i till s_o , innehåller ju inget beroende av läget "i sidled" hos punktkällan: alla punktkällor i ett plan avbildas i ett annat plan (paraxiellt).

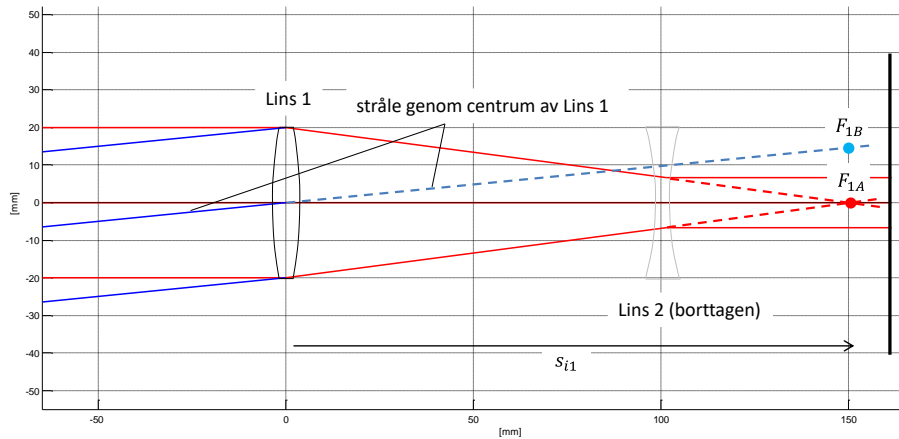
I vår strålgångsskiss kan vi inte direkt utläsa s_{i1} eftersom Lins 2 bryter strålarna innan de hunnit fram till fokus F_{1A} . Vi låtsas därför att Lins 2 är borttagen, och finner läget av F_{1A} genom att förlänga de röda strålarna efter Lins 1 fram till de möts:



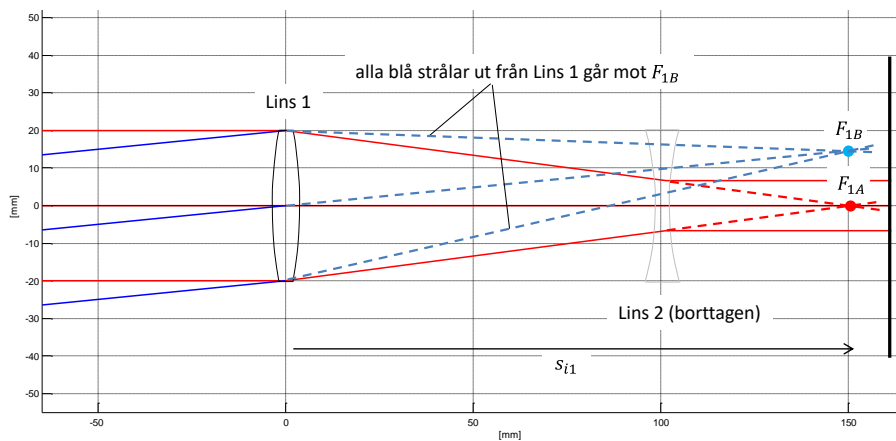
2. Därmed vet vi alltså även läget för F_{1B} i längsled eftersom det är samma som för F_{1A} , alltså s_{i1} efter Lins 1. Positionen för F_{1B} i sidled får vi genom att använda konstruktionsregeln

"En stråle genom centrum av en lins bryts inte"

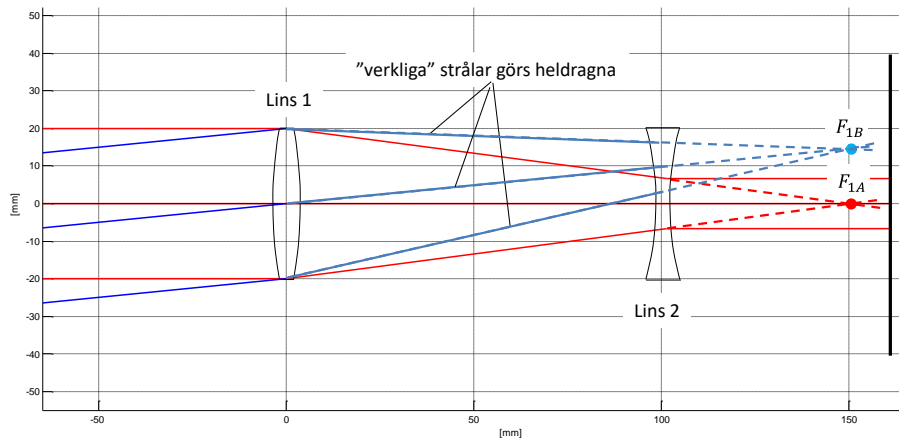
Vi tillämpar denna regel på den blå strålen som går genom centrum av Lins 1, och förlänger den ända till vi befinner oss sträcka s_{i1} bakom Lins 2: här ligger F_{1B} !



3. Alla strålar från punktkälla B efter Lins 1 möts i F_{1B} . Vi kan därför rita ut de två blå strålarna från övre respektive undre kanten av Lins 1 så att de också kommer till F_{1B} .



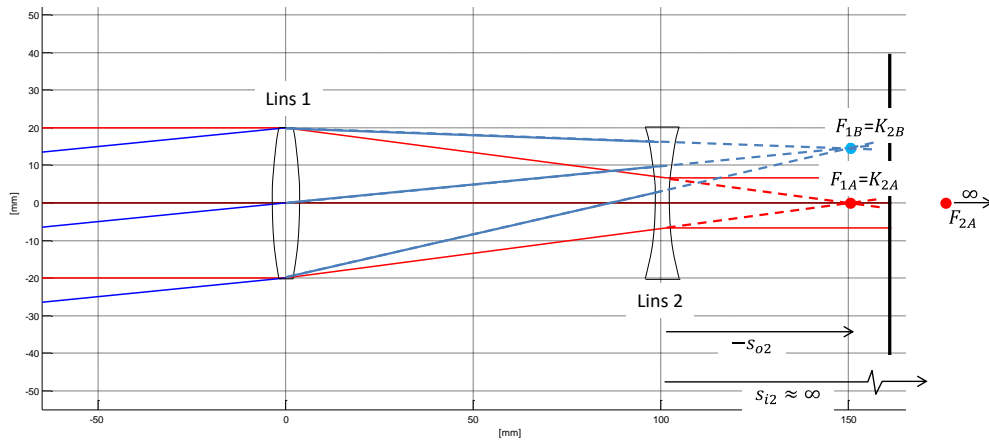
4. Innan de blå strålarna når F_{1B} träffar de på Lins 2. Därför ritar vi bara ut de verkliga, heldragna, strålarna fram till positionen för Lins 2.



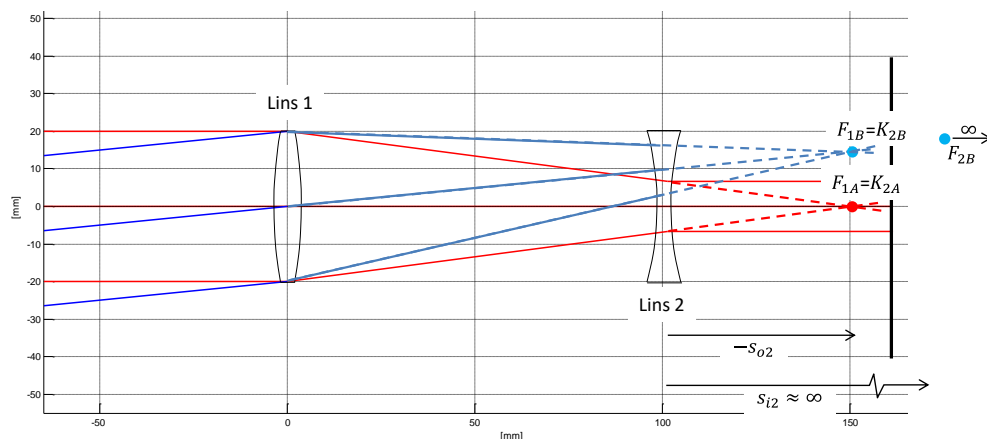
Vi är nu klara med strålgången mellan Lins 1 och Lins 2.

5. För att bestämma strålgången efter Lins 2 börjar vi med att bestämma läget för "källa" och "fokus" för ljuset från punktkälla A, alltså K_{2A} (källan för det infallande ljuset på Lins 2) och F_{2A} (fokus för ljuset som kommer ut från Lins 2).

K_{2A} är ju samma sak som fokus för ljuset ut från Lins 1, alltså F_{1A} , vilken vi redan markerat i vår skiss. Ur strålgångsdiagrammet för de röda strålarna ut från Lins 2, ser vi att dessa tycks vara parallella. De möts alltså oändligt långt bort från Lins 2, d.v.s. avståndet s_{i2} till fokuset F_{2A} är oändligt.



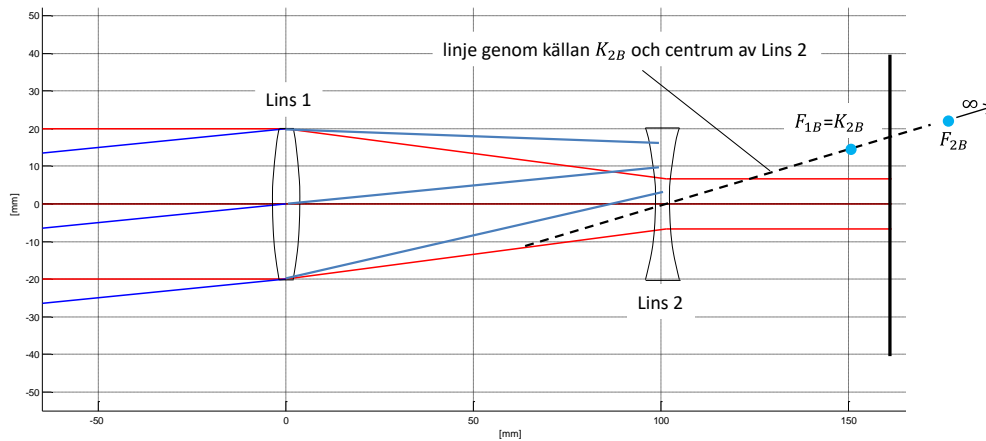
6. Nu betraktar vi ljuset från punktkälla B. Eftersom K_{2B} har samma avstånd (s_{o2}) till Lins 2 som K_{2A} , och Gauss linslag fortfarande inte har något sidledsberoende, är avståndet s_{i2} till fokuset för utgående ljus från Lins 2 samma som för punktkälla A, alltså oändligt.



7. Positionen för F_{2B} i sidled får vi genom att använda konstruktionsregeln

"Fokus F_{2B} ligger på en rät linje genom källan K_{2B} och linsens centrum"

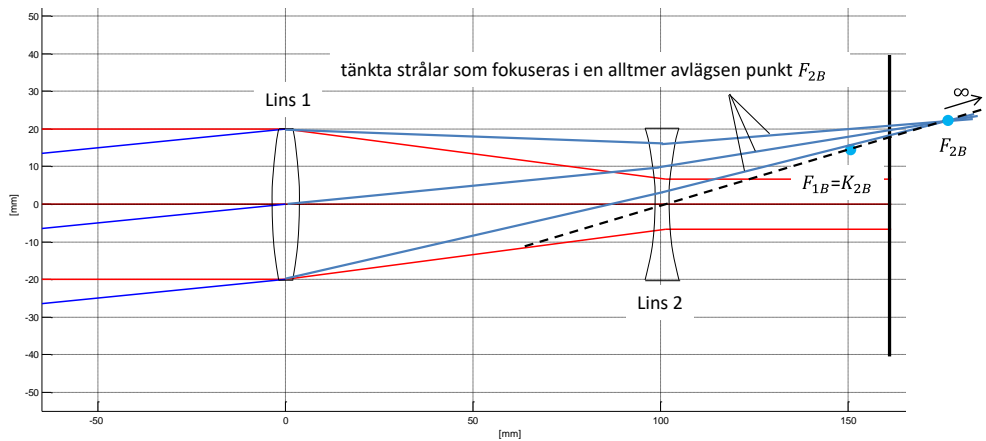
Detta är bara en annan formulering av regeln "En stråle genom linscentrum bryts inte", men som passar bättre i detta fall eftersom konstruktionsregeln gäller oavsett om det faktiskt går något ljus genom linscentrum eller inte (och av vår skiss att döma tycks inget ljus från punktkälla B gå genom centrum av Lins 2).



Fokuset F_{2B} ligger alltså på den streckade svarta linjen i figuren ovan.

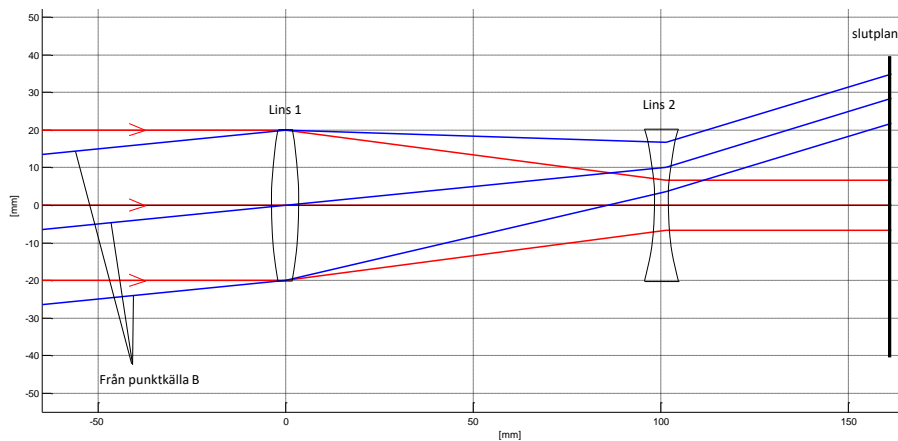
8. Alla de blå strålarna som kommer ut efter Lins 2 möts i fokuset F_{2B} . Eftersom F_{2B} ligger oändligt långt bort är strålarna efter Lins 2 parallella med varandra, vilket ju även gäller de röda strålarna. De blå strålarna är dessutom parallella med den svarta streckade linjen eftersom F_{2B} ligger på denna linje.

(Om du tycker att oändligheten är abstrakt kan du börja med att tänka dig att F_{2B} ligger där vi ritat ut den i figuren, alltså strax till höger om slutplanet. Alla de tre blå strålarna ut från Lins 2 ska komma till denna punkt. De är då inte parallella utan konvergerar till de möts i F_{2B} .



Sedan tänker du dig att du flyttar F_{2B} längre och längre bort längs den streckade svarta linjen, och justerar de tre blå strålarna så att de fortfarande går genom F_{2B} . Då inser du förhoppningsvis att strålarna blir alltmer inbördes parallella, och alltmer parallella med den streckade svarta linjen.)

9. Slutresultatet blir alltså följande strålgångsdiagram, där vi tagit bort alla hjälpkonstruktioner.

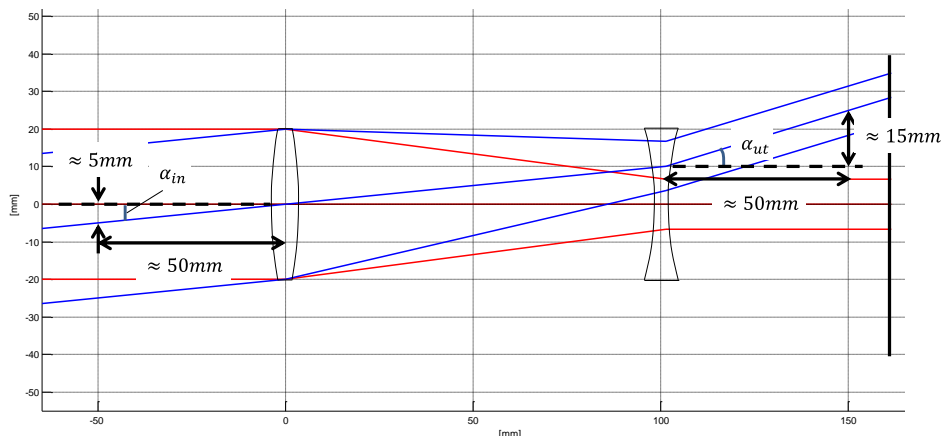


b) Strålarna från punktkälla B kommer in från vänster jämfört med rakt-fram-riktningen (strålgångsdiagrammet visar strålgången sett ovanifrån, så de blå strålarna som kommer in till kikaren "underifrån" i skissen, kommer egentligen från vänster). Som vi ser gäller detta även för en observatör *efter* kikaren: de blå strålarna tycks komma från vänster, om än med en snedare vinkel än utan kikare. Observatören ser därför världen rättvänd, men förstord. Precis det man vill när man går på teater!

Detta till skillnad från en vanlig kikare, där båda linserna är positiva, som ger en spegelvänd bild. En sådan kikare måste ha ett bildvändande prisma inuti strålgången för att vända bilden rätt. Prismet parallellförskjuter också strålgången en aning i sidled, vilket är orsaken till att inte okularet ligger rakt bakom objektivet i en vanlig kikare.

c) Förstoringen hos en kikare (t.ex. 7x, alltså sju gångers förstoring som är ett vanligt förekommande värde hos en vanlig kikare) anger *vinkelförstoringen*, alltså hur många gånger större vinkel ljuset ut från kikaren har jämfört med det som infaller på kikaren, från en hyfsat avlägsen punktkälla (så att ljuset in och ut är ungefär parallellt). Det fordrar att vi gjort en strålgångsanalys för en punktkälla vars ljus kommer in snett, och det är ju precis det vi gjort för punktkälla B!

Vi tar alltså och läser av vinklarna α_{in} och α_{ut} i vårt strålgångsdiagram:



Mätning med linjal i skissen ger att

$$\alpha_{in} \approx \frac{5 \text{ mm}}{50 \text{ mm}}; \quad \alpha_{ut} \approx \frac{15 \text{ mm}}{50 \text{ mm}}$$

eftersom vinklarna är små. Vi skulle förstås lika gärna kunnat beräkna α_{in} utifrån det givna läget på punktkälla B, och α_{ut} hade kunnat mätas upp från den svarta streckade linjen genom Lins 2:s centrum och K_{2B} i punkt 7 ovan, eftersom de blå strålarna efter Lins 2 är parallella med denna.

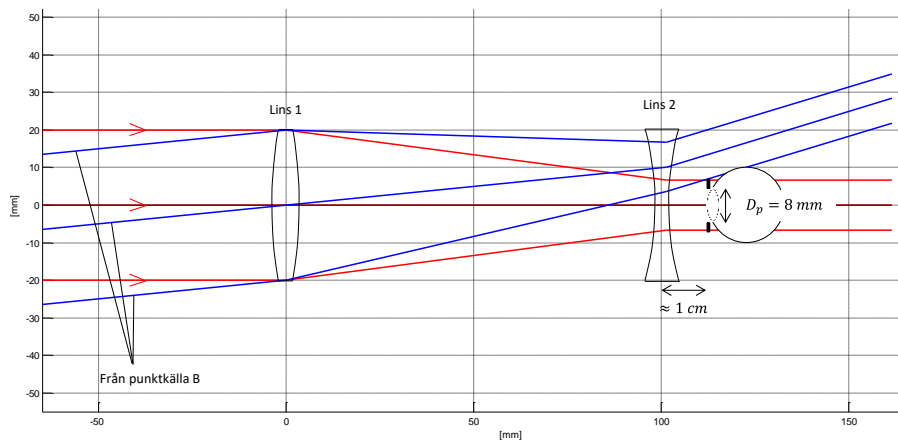
(Vinkel-)förstoringen blir då

$$M_v \equiv \frac{\alpha_{ut}}{\alpha_{in}} \approx \frac{15}{5} = 3$$

Din teaterkikare förstorar alltså 3 gånger. Detta är ett typiskt värde, teaterkikare har i allmänhet en ganska låg förstoring. Å andra sidan är de kompakta och väger inte mycket, vilket förstuds är en fördel om man ska gå på opera.

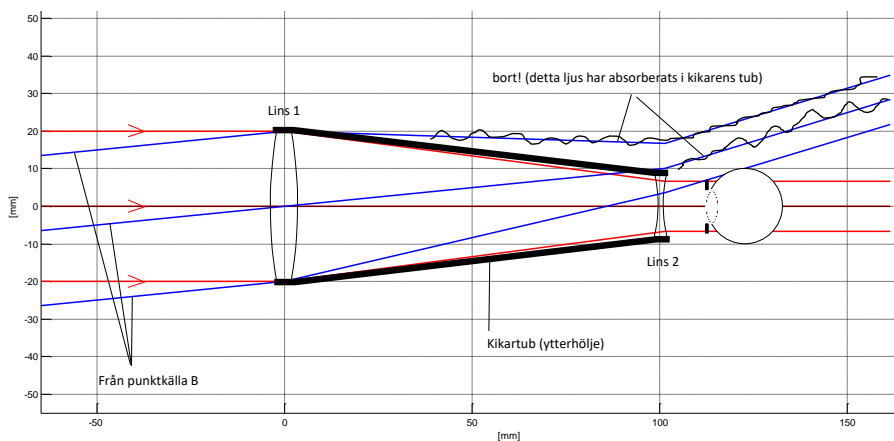
Anmärkning: Vinkelförstoringen är ekvivalent med hur många gånger större ett objekt verkar (d.v.s. hur många gånger större bilden på näthinnan blir, i linjärskala) när vi tittar på det genom kikare jämfört när vi tittar på det direkt utan kikare. Det är alltså logiskt att helt enkelt kalla vinkelförstoringen för kikarens förstoring.

d) Vi lägger in ditt öga enligt Ledningarna 1-3, där vi väljer det minsta möjliga värdet, 1 cm, för avståndet från Lins 2 till ögat.



Vi ser att inget av ljuset från punktkälla B kommer in i ögat eftersom de blå strålarna går utanför pupillen. Vi missar alltså Ankarström totalt, eftersom han inte befinner sig inom vårt synfält!

Anmärkning 1: I allmänhet har Lins 2 en mindre diameter än Lins 1, och kikarens tub har ungefär formen av en avhuggen kon som är smalare närmast okularet. Så i en verklig kikare skulle de blå strålarna till största delen träffa väggen inuti kikarens tub (och absorberas):



Anmärkning 2: Det lilla synfältet är en uppenbar nackdel hos teaterkikaren jämfört med den vanliga kikaren. I den vanliga kikaren är Lins 2 positiv. Det gör att "de blå strålarna" bryts tillbaka mot symmetriaxeln. Det finns därför ett "magiskt avstånd" för ögat från Lins 2 där nästan allt ljus som går genom Lins 2 också går genom pupillen. För teaterkikaren, däremot, får man alltid maximalt synfält genom att trycka ögat så nära Lins 2 som möjligt!

Anmärkning 3: Så hur ser det då ut när man kollar i teaterkikaren? Ljuset från punktkälla B missar ju helt pupillen, men vi ser från skissen att om bara de blå strålarna kommit med lite lägre invinkel (något mindre α_{in}) så skulle åtminstone den "nedersta" (d.v.s. den längst till vänster) blå strålen träffa pupillen längst ut i högerkanten. Men den vänstra delen av pupillen skulle fortfarande vara obelyst, så ljusstyrkan på näthinnan från den punktkällan skulle bli låg. Punktkällorna i närheten av Gustav III:s ansikte belyser däremot hela pupillen och uppfattas alltså som maximalt ljusstarka. Ungefär så här skulle förmodligen totalupplevelsen bli:

Med teaterkikaren



Utan kikare (3x mindre bild på näthinnan)

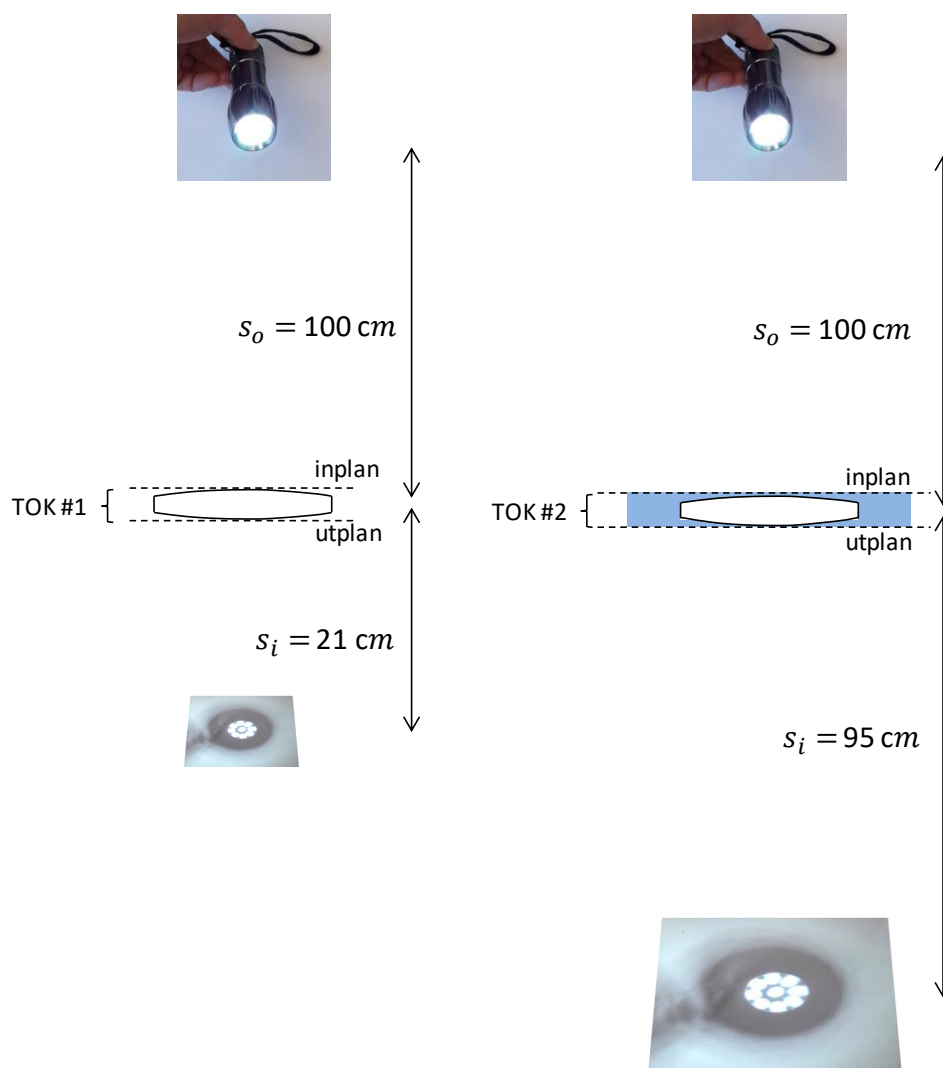


I figuren ovan har vi också lagt in hur motsvarande scen hade sett ut utan kikare – eftersom kikaren förstör 3 gånger, blir alla personer på scenen 3 gånger mindre när vi tittar utan kikare, men å andra sidan ser vi utan problem hela den dramatiska scenen.

2. Köp inte linser på JULA, eller?

Vi väljer in- och utplan enligt figuren nedan och betraktar det som finns mellan in- och utplanet som en TOK. Denna TOK är i båda fallen omgiven av luft (vattnet är helt och hållet en del av TOK#2 eftersom vattnet enbart förekommer mellan in- och utplanet.).

Våra formler för avbildning och för fasmoduleringen hos en lins med viss fokallängd gäller just för fallet att TOKen är omgiven av luft. Formlerna gäller alltså för båda fallen i denna uppgift.



Vi börjar med att beräkna fokallängden för TOK #1, f_1 , genom att använda Gauss linslag för avbildningen av LED-lamporna på skärmen under linsen,

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{100 \text{ cm}} + \frac{1}{21 \text{ cm}} \Rightarrow f_1 = 17 \text{ cm}$$

Och på samma sätt blir fokallängden f_2 för TOK #2 från dess avbildning

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{100 \text{ cm}} + \frac{1}{95 \text{ cm}} \Rightarrow f_2 = 49 \text{ cm}$$

Fokallängden blir längre med vatten, d.v.s. TOKen får svagare linsverkan, eftersom vattnets brytningsindex ligger närmare glasets än vad luftens brytningsindex gör. Vi kan ju ta specialfallet att "vattnets" brytningsindex skulle vara lika stort som glasets. Då skulle optiskt sett TOKen vara bara en plan skiva med homogent brytningsindex – alltså "fönsterglas" – en sådan "lins" skulle följaktligen ha oändligt lång fokallängd.

Vi har sett i en härledning i kursen att en TOK med fokallängden f_1 (i luft, som gäller för våra TOKar) måste ha en fasändring mellan in- och utplan (fasmodulering) som är lika med

$$\varphi_1(r) = -k \frac{r^2}{2f_1} + const$$

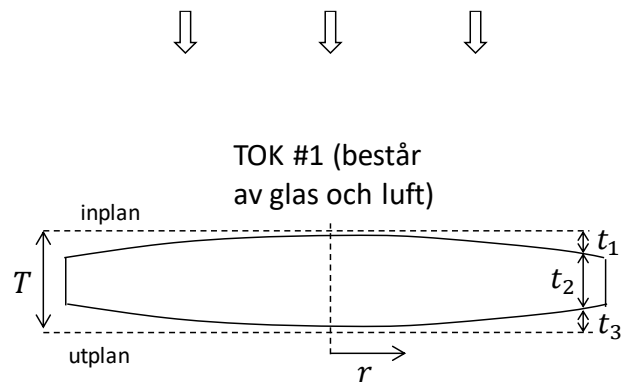
där k är fasändring per längdenhet för propagationen efter utplanet, alltså i luft, och $const$ ett godtyckligt icke- r -beroende uttryck. Här är alltså $k = k_0$. Så mer precis gäller alltså

$$\varphi_1(r) = -k_0 \frac{r^2}{2f_1} + const$$

och samma sak för TOK #2,

$$\varphi_2(r) = -k_0 \frac{r^2}{2f_2} + const$$

Med TOK-modellen för propagation genom en TOK kan vi beräkna hur denna fasmodulering åstadkoms av den fysiska realiseringen av TOKen. För TOK #1 fås

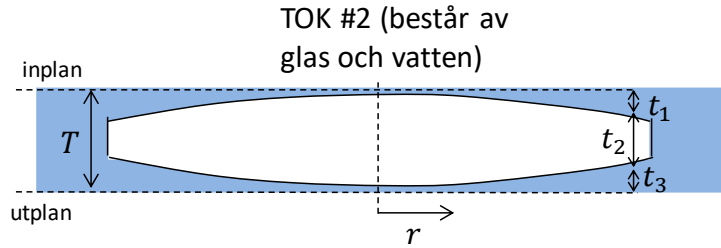


$$\varphi_{1,TOK}(r) = k_0 \cdot t_1(r) + k_0 \cdot n_g \cdot t_2(r) + k_0 \cdot t_3(r)$$

där de tre termerna representerar propagation från inplan till linsyta (i luft), mellan de två linsytorna (i glas med brytningsindex n_g), respektive från linsyta till utplan (i luft).



För TOK #2 är enda skillnaden mot TOK #1 att första och sista propagationen sker i vatten (brytningsindex n_v) istället för luft, så vi får



$$\varphi_{2,TOK}(r) = k_0 \cdot n_v \cdot t_1(r) + k_0 \cdot n_g \cdot t_2(r) + k_0 \cdot n_v \cdot t_3(r)$$

Sätter vi nu uttrycken för fasmoduleringen från TOK-modellen lika med den fasmodulering som krävs för att ge den uppmätta fokallängden hos TOKen fås, för TOK #1,

$$\varphi_{1,TOK}(r) = \varphi_1(r) \Rightarrow t_1(r) + n_g \cdot t_2(r) + t_3(r) = -\frac{r^2}{2f_1} + const$$

Eftersom $t_1(r) + t_3(r) = T - t_2(r)$ fås

$$T + (n_g - 1) \cdot t_2(r) = -\frac{r^2}{2f_1} + const$$

Bakar vi in T i en ny $const$ och löser ut tjockleken $t_2(r)$ på glasmaterialet får vi

$$t_2(r) = -\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_1} + const$$

som alltså talar om hur tjockleken på glaset ska ändras med radialavståndet r . Att koefficienten för r^2 är negativ betyder att linsen ska bli tunnare mot kanten, vilket är precis vad som vi förväntar oss av en positiv lins!

Nu gör vi samma sak för TOK #2, alltså sätter uttrycken för fasmoduleringen från TOK-modellen lika med den fasmodulering som krävs för att ge den uppmätta fokallängden hos TOKen,

$$\varphi_{2,TOK}(r) = \varphi_2(r) \Rightarrow n_v \cdot t_1(r) + n_g \cdot t_2(r) + n_v \cdot t_3(r) = -\frac{r^2}{2f_2} + const$$

Igen använder vi $t_1(r) + t_3(r) = T - t_2(r)$ så att

$$n_v \cdot T + (n_g - n_v) \cdot t_2(r) = -\frac{r^2}{2f_2} + const$$

och sätter in vårt uttryck för glastjockleken $t_2(r)$ som vi fann från TOK #1,

$$n_v \cdot T + (n_g - n_v) \cdot \left(-\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_1} \right) = -\frac{r^2}{2f_2} + const$$

Denna ekvation är uppfylld om koefficienterna för r^2 är samma i vänster- och högerled, d.v.s.

$$(n_g - n_v) \cdot \left(-\frac{1}{2(n_g - 1)f_1} \right) = -\frac{1}{2f_2} \Rightarrow (n_g - n_v)f_2 = (n_g - 1)f_1$$

Löser vi ut det eftersökta brytningsindexet för glas materialet, n_g , ur detta uttryck fås

$$n_g = \frac{n_v f_2 - f_1}{f_2 - f_1} = \frac{1.33 \cdot 49 \text{ cm} - 17 \text{ cm}}{49 \text{ cm} - 17 \text{ cm}} = 1.51$$

Inte det högindex-material du trodde linsen var gjord av. Lurad av JULA, alltså!

Extrakoll: Vi bör kanske för säkerhets skull kolla upp att en lins med högt index skulle gett ett märkbart annorlunda experimentellt resultat. Vi antar alltså nu att $n_g = 1.7$ men att f_1 precis som tidigare är 17 cm , d.v.s. att vi har en lins med samma fokallängd (när linsmaterialet är omgiven av luft).

Vi använder relationen $(n_g - n_v)f_2 = (n_g - 1)f_1$ från ovan för att beräkna fokallängden f_2 när denna lins ligger i vatten

$$f_2 = \frac{(n_g - 1)f_1}{(n_g - n_v)} = \frac{(1.7 - 1)17 \text{ cm}}{(1.7 - 1.33)} = 32 \text{ cm}$$

Avbildningsexperimentet kommer i detta fall att ge en skarp bild på avståndet s_i enligt Gauss linslag

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \Rightarrow \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{32 \text{ cm}} - \frac{1}{100 \text{ cm}} \Rightarrow s_i = 47 \text{ cm}$$

vilket är en stor skillnad jämfört med vårt experiment där bilden uppstod på $s_i = 95 \text{ cm}$ avstånd från den vattenomgivna linsen. Vi bör alltså inte ha några problem med att konstatera om brytningsindex hos linsmaterialet är 1.5 eller 1.7.

3. Kisdiffraktion

- a) Låt oss studera en punkt \mathbf{p}_0 i plan 1 och två punkter \mathbf{p}'_1 och \mathbf{p}'_2 i plan 2. Vi betraktar den utsända vågen från \mathbf{p}_0 som en sfärisk våg vars fasvariation är proportionell mot propageringssträckan: $\varphi \propto kr$. Största fasdifferensen fås från längsta differensen i gånvägsskillnad, vi vill alltså maximera:

$$\Delta r = \left| |\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_0| - |\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_0| \right|$$

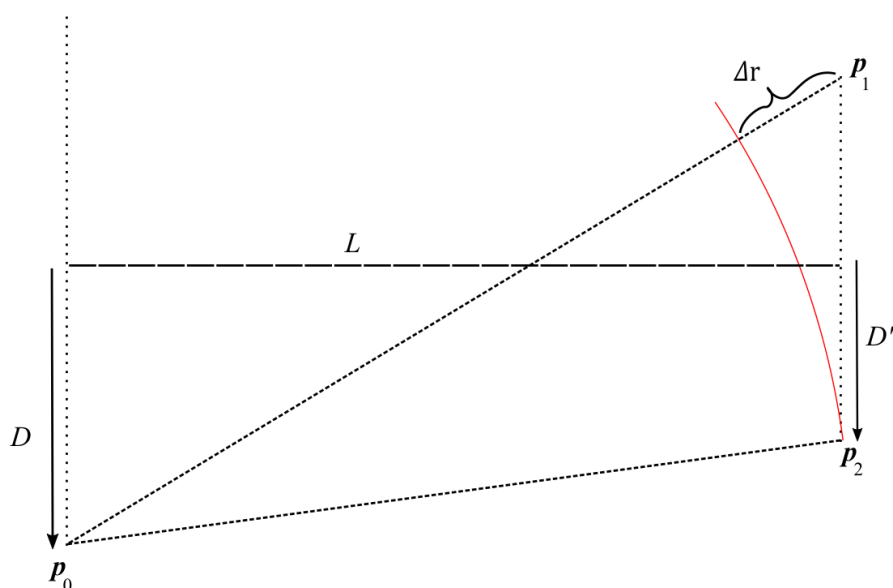
Given den enkla geometrin i uppgiften fås i fallet $D \geq D'$ den maximala fasdifferensen om vi väljer $\mathbf{p}_0 = (0, \mp D/2)$, $\mathbf{p}'_1 = (L, \pm D'/2)$, $\mathbf{p}'_2 = (L, \mp D'/2)$

Vi får:

$$\Delta\varphi_{max} = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \left| \sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2} + \frac{D'}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2} - \frac{D'}{2}\right)^2} \right|$$

I den paraxiella approximationen gör vi förenklingen:

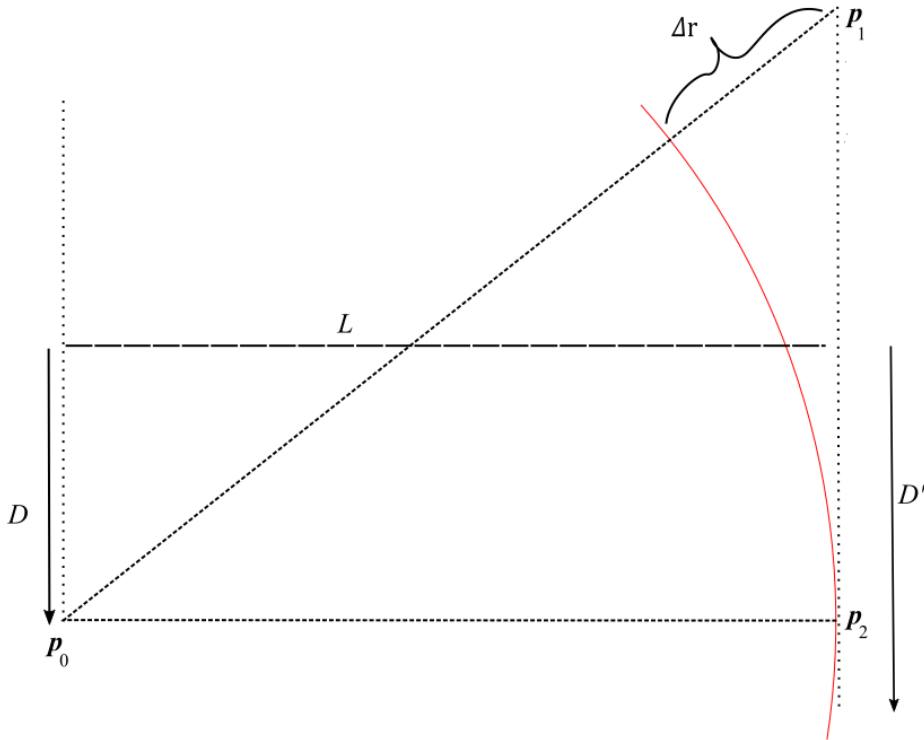
$$\sqrt{1+x} \approx \left(1 + \frac{x}{2}\right), x \ll 1$$



Och vi får:

$$\Delta\varphi_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} \left| L + \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{D'}{2}\right)^2}{2L} - L - \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{D'}{2}\right)^2}{2L} \right| = \pi \frac{DD'}{\lambda L}$$

Om istället $D < D'$ får vi istället maximal fasdifferens om $\mathbf{p}_0 = (0, \mp D/2)$, $\mathbf{p}'_1 = (L, \pm D/2)$, $\mathbf{p}'_2 = (L, \mp D'/2)$



Och vi får:

$$\Delta\varphi_{max} = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \left| \sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2} + \frac{D'}{2}\right)^2} - L \right| = \frac{2\pi}{\lambda} \left| L + \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{D'}{2}\right)^2}{2L} - L \right| = \frac{\pi(D + D')^2}{4\lambda L}$$

- b) Om $\Delta\varphi_{max} \leq \frac{\pi}{10}$ för samtliga punkter \mathbf{p}' oavsett i vilken punkt \mathbf{p} vi betraktar en punktkälla innebär det att för varje punkt \mathbf{p} vi integrerar över så adderar vi ungefär samma E-fält till samtliga punkter \mathbf{p}' . Alltså det $\Delta\varphi_{max} \leq \frac{\pi}{10}$ explicit säger oss är att vi kan approximera:

$$e^{ikr} \cong e^{ik \times const}$$

Och om vi vet att fasan kan betraktas som oberoende av avståndet r så kan även amplituden det:

$$\frac{1}{r} \cong const$$

eftersom fasan varierar mycket snabbare vid optiska våglängder. Då det enda som berodde på x', y' innanför integralen var r och vi har $r \cong const$ fås $E_2(x', y') \cong const$ i plan 2: $\sqrt{x'^2 + y'^2} \leq D'$, alltså en plan våg.

- c) Tumregel 2: fouriertransformen av ett fält erhålls på fokallängds avstånd efter lins. Om fältet beskrivs av $p = p(x', y')$ framför linsen fås alltså fältet $\mathcal{F}\left\{p\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right)\right\}$ på fokallängds avstånd f bakom linsen. Lämpligt i vårt fall är att vi har tillgång till ett konstant fält, alltså en plan våg $E(x', y') = const$. Eftersom aperturen är tunn ges det transmitterade fältet som:

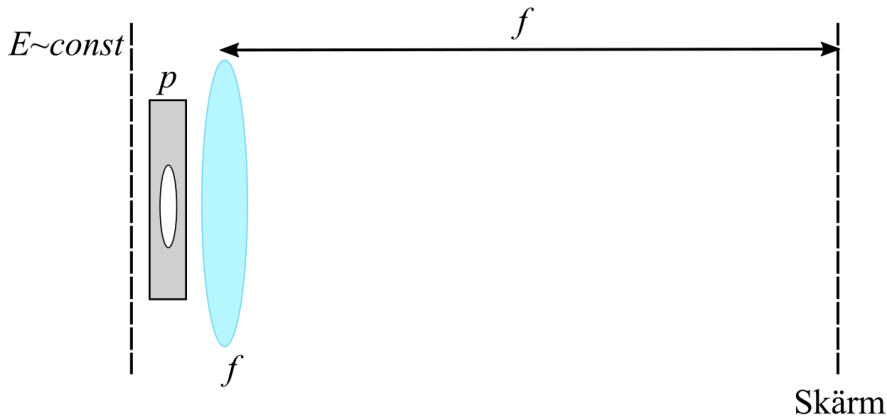
$$E(x', y')_{ut} = E(x', y')_{in} p(x', y')$$

och om $E(x', y')_{in} = const$ fås $E(x', y')_{ut} = const \times p(x', y')$. Så om vi placerar aperturen precis bakom vår plana våg och därpå linsen får vi på fokallängds avstånd efter linsen fältet:

$$\mathcal{F}\{const \times p(ax', ay')\} = const \times \mathcal{F}\{p(ax', ay')\}, a = \frac{1}{\lambda f}$$

Med intensitet:

$$|const|^2 |\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2 \propto |\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$$



- d) Det absolut lämpligaste välfokuserade avbildningssystem vi har att tillämpa i det här fallet är våra egna ögon (eller öga). Aperturfunktionen som skall undersökas kan vi ju enkelt skapa med ögonlock samt en centrerad ögonriktning! Om ögat inte är välfokuserat har man förhoppningsvis något glasöga eller kontaktlins som man även vanligen kompenserar med. Hade vi nu haft ett konstant fält (plan våg) infallande på vårt ögonlock med ögat fokuserat oändligt långt bort så hade vi fått intensiteten $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ (se lösning till "c") för förklaring) på vår näthinna som är direkt det vi "ser" och således kan bestämma. Från uppgift a) inser vi svårigheten i att åstadkomma ett konstant fält över ögat. Vi kan anta att pupillen har diametern $D' = 5$ mm och att vår ljuskälla är en enda punkt. Om vi kräver $\Delta\varphi_{max} \leq \frac{\pi}{10}$ fås villkoret

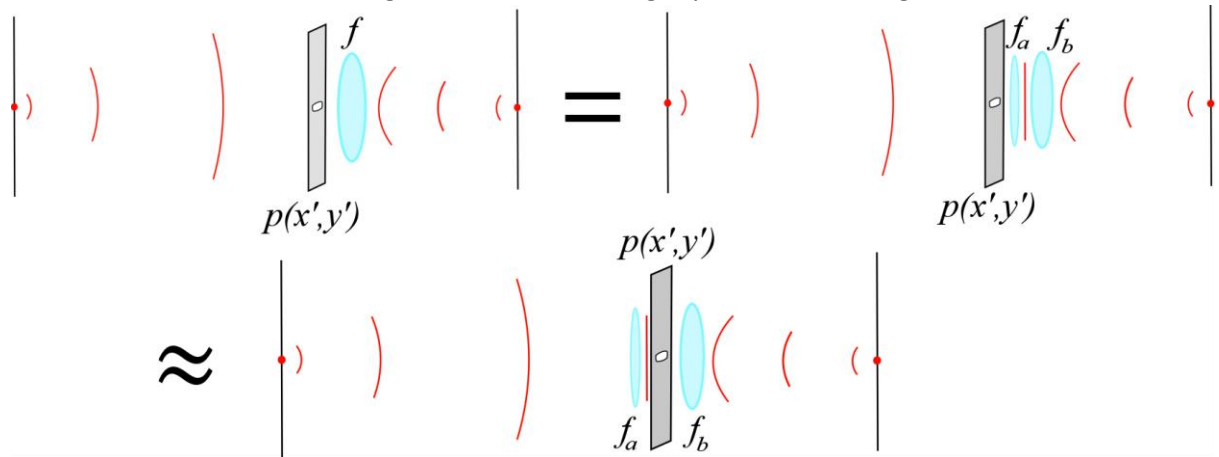
$$L \geq \frac{\pi D'^2}{4\lambda\Delta\varphi_{max}} = 125 \text{ m}$$

För 500nm våglängd. Ett så långt avstånd inom hemmet är uppenbarligen svårt att få till, därtill, om ljuskällan inte är en punkt utan har en viss utbredning i rummet blir avståndet som krävs än längre, 4x längre om $D = D'$ exempelvis. I mitt exempelfall med $D = 2$ mm på min mobil-ficklampa krävs ett hem av storlek $L \geq 245$ m. Har man en spegel kan man halvera avståndet som krävs.

Hade vi däremot haft en laser hade problemet varit löst, dock hade förmodligen ett annat mycket allvarligare uppstått, nämligen en sönderbränd gul fläck på näthinna.. Så bra då att vi faktiskt inte behöver en plan våg framför ögat! Vi kan nämligen se vår ögonlins som en sammansättning av två tätt ihopliggande sub-linser som tillsammans utövar samma effekt på ljuset som kommer in. Vårt system (öga) är enkelt fokuserat genom att vi helt enkelt tittar på det vi vill fokusera på. Då ändras fokallängden f på ögonlinsen så att en skarp bild fås på näthinna. Låt den främre sub-linsen, sub-lins A, i enlighet med bilden nedan transformera den divergerande sfäriska vågfronten infallande på ögat till en plan vågfront, därefter transformerar sub-lins B den plana vågen till en sfärisk vågfront som konvergerar på näthinna. Om sub-lins A är tunn så att ut- och in-fält enkelt kan relateras via sub-linsens transmissionsfunktion:

$$E(x', y')_{ut} = E(x', y')_{in} T_{lins, A}(x', y')$$

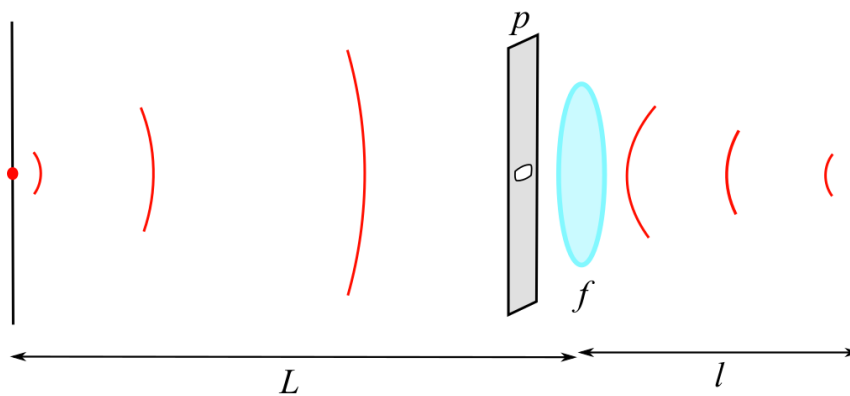
Så inser vi att ordningen på aperturen och sub-lins A kan väljas godtyckligt eftersom deras transmissionsfunktioner kommuterar, enligt TOK-principen. Byter vi plats på sub-lins A och apertur p har vi helt plötsligt en plan våg infallande på vår apertur, vilket är precis vad vi önskar oss! Alltså, om TOK-resonemanget stämmer är samtliga systemsbeskrivningar nedan ekvivalenta:



F

ourierttransformen av p fås därmed på näthinnan om avståndet mellan lins och näthinnan är $l = f_B$ (se lösning uppg c)). På samma sätt, för att vi skall erhålla en plan våg efter sub-lins A krävs $L = f_A$. Observera att ljuskällan här antas bestå av en enda punktkälla. För ett välfokuserat avbildningssystem vet vi att:

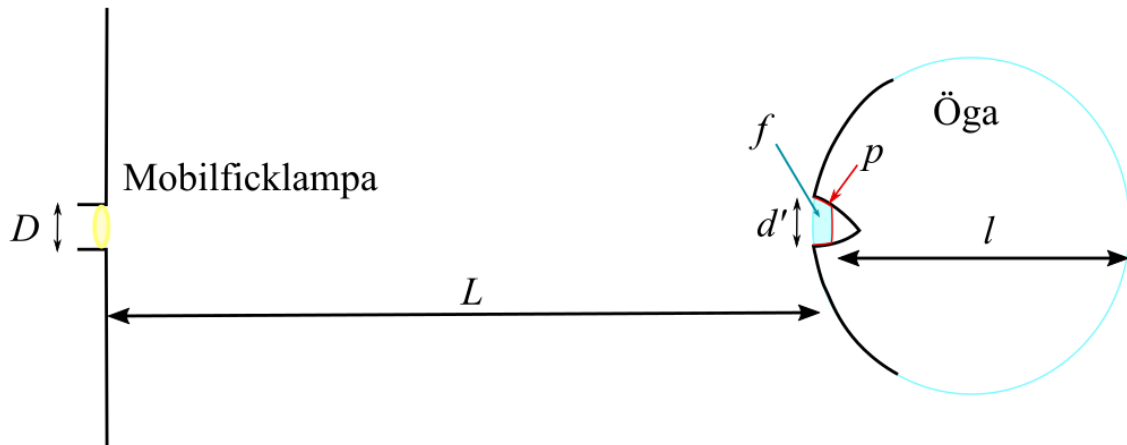
$$\frac{1}{L} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{l}}$$



Vår anledning till omordning av sub-lins och apertur bygger på antagandet att sub-lins A är tunn. Eftersom tjockleken t på en lins i den paraxiella approximationen förhåller sig till dess fokallängd som $t \propto \frac{1}{f}$ fås därmed tunnast sub-lins A om vi maximerar avståndet L . Detta går även att inse om man tänker att sub-lins A blir mer och mer obetydlig ju närmare infallande våg är en plan våg vilket vi får när vi ökar L . Alltså är vår approximation bättre ju längre bort från vår ljuskälla vi kan placera ögat.

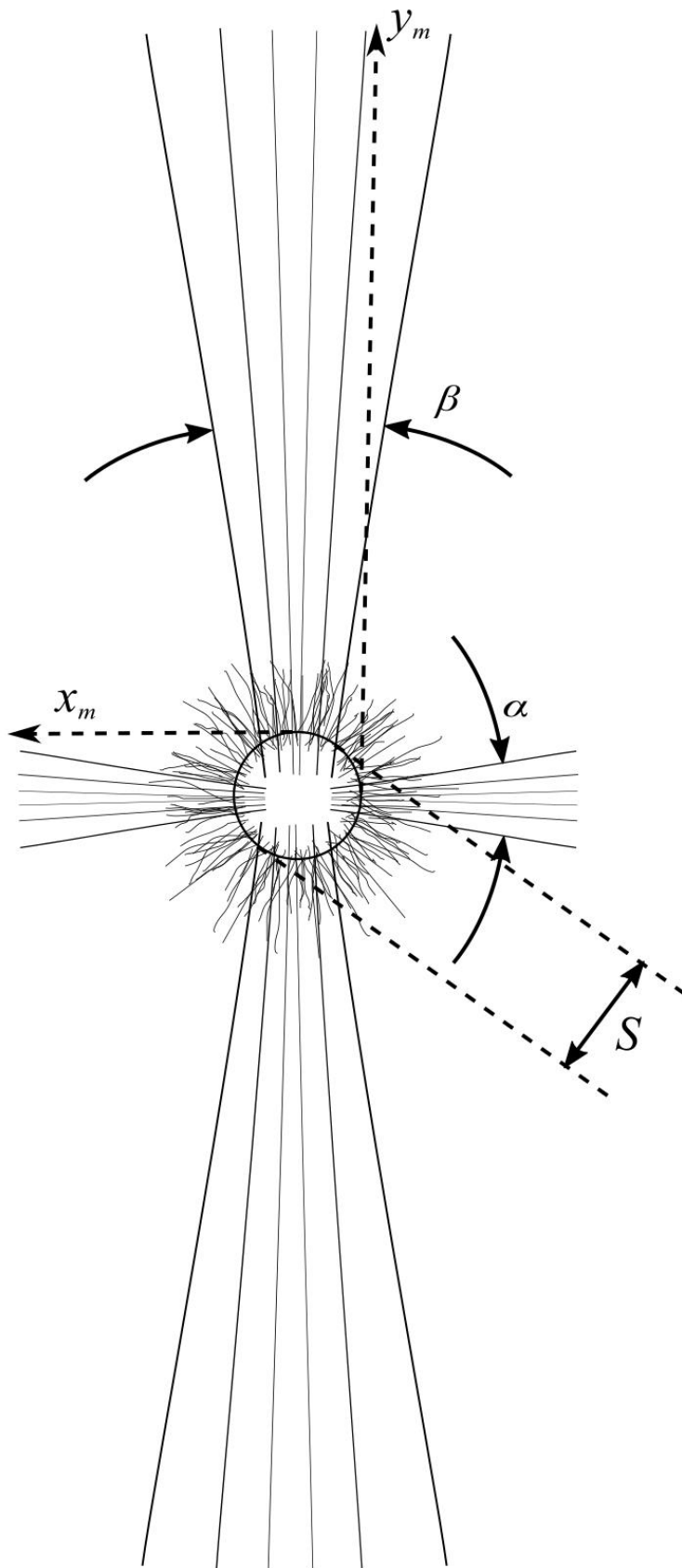
Vi vet att vi skall använda ögat + ögonlock som fokuserat avbildningssystem respektive apertur. Vi vet även att vi vill maximera L så beroende på rumsstorlekar du har tillgång till kan detta variera, i mitt exempelfall använder jag $L = 5\text{m}$. Har man en spegel kan man dubbla avståndet. Eftersom systemet ovan bygger på ljus från en punktkälla vill jag använda en ljuskälla med minimal

utbredning/storlek i rummet. Därför väljer jag min mobilficklampa som jag lätt har tillgång till med diameter $D = 2\text{mm}$. Tyvärr har jag inget färgfilter eller något som åstadkommer monokromatiskt ljus alltså får den här högst inkoherenta ljuskällan duga i mitt fall. Vi antog ändå att den utgjorde en enda punkt vilket innebär att den enda osäkerheten i $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ vi får på näthinnan ligger i dess våglängdsberoende. Så, mitt system:



Med $D = 2\text{mm}$, $L = f_A = 5\text{m}$, $0 < d' \leq D' = 5\text{mm}$, $l = f_B = 20\text{mm}$ och $f = 19,9\text{mm}$. Storleken på ögat är en uppskattning. Självklart blundar jag med mitt andra öga eftersom systemet enbart innehåller ett öga. (Om L är stort går det bra att titta med båda ögon samtidigt eftersom korrekt apertur p då går att få till framför bägge ögon). Jag iakttar även försiktighet så att min mobilficklampa inte är för stark. Man bör inte kolla i för starkt ljus om man känner obehag eller smärta!

- e) När man väl försäkrat sig om att man centrerat sin pupill i centrum av p samt fokuserar sitt öga på ljuskällan så fås den intensitet på näthinnan som efterfrågas. Utöver dessa förutsättningar väljer jag även att mörklägga rummet och släcka alla andra lampor än mobilficklampen för att minimera intensitet på näthinnan av annat ursprung än min valda ljuskälla. En grov skiss på det jag ser när jag minskar på öppningen d' är:



Jag ser en stark bländande vit spot med storlek S där min ljuskälla är i rummet. Små intensitetslinjer/spikar trär ut från denna spot hela vägen runt när ögat är helt öppet. När jag börjar kisa mer och mer, alltså minskar d' växer de intensitetslinjer/spikar som pekar uppåt, nedåt

och åt sidorna. Deras utbredning över näthinnan, x_m och y_m ($y_m > x_m$) ökar när jag minskar d' medan deras vinkelutbredning α och β minskar och det känns som att intensiteten i de helt uppåt/nedåt och åt sidan riktade spikarna ökar. S håller sig alltså oförändrad tills öppningen blir så liten så att det är svårt att fokusera. När ögat slutligen sluts ser jag inget. Att $y_m > x_m$ är rimligt kan vi dubbelkolla med tumregel 3:

$$D' > d' \Leftrightarrow \frac{\lambda l}{d'} > \frac{\lambda l}{D'}$$

$$x_m \propto \frac{\lambda l}{D'} \quad y_m \propto \frac{\lambda l}{d'} \Rightarrow y_m > x_m$$

Anmärkning: För små d' är p i princip en rektangel. Fouriertransformen för en rektangel är enkel att ta fram analytiskt. Testa eller kolla på nätet och se om det du ser med kysande öga ser ut som $|\mathcal{F}\{p(\frac{x'}{\lambda l}, \frac{y'}{\lambda l})\}|^2$ av en rektangel, fast för många våglängder om du har en vit ljuskälla. "Rectangle aperture diffraction" eller "2D fourier transform of rectangle"

För att analysera resultatet kan vi separera det vi ser i det som är beroende och det som är oberoende av p . Det som beror på p , alltså storleken/formen på öppningen är det diffraktionsmönster vi ville bestämma: $|\mathcal{F}\{p(ax', ay')\}|^2$ medan det som inte beror på p helt enkelt är **bilden av ljuskällan** som får en ändlig storlek S eftersom vår faktiska ljuskälla har en viss utbredning. Storleken S fås från likformighet, eller förstoringen hos avbildningssystemet:

$$\frac{S}{D} = \frac{l}{L}$$

Ger $S = 8\mu\text{m}$ i mitt fall. Räkningen är enkel eftersom min ljuskälla är en cirkulär yta. Om man lyckats emulera en punktkälla med sin ljuskälla väldigt väl finns möjligheten att ens bild faktiskt är mindre än spot-sizen som en punktkälla skapar på näthinnan när ögat är vidöppet. Vi bör kolla för säkerhets skull. I uppgiften antog vi paraxiella vågor, alltså kan vi använda tumregel 3 för att uppskatta D_{spot} :

$$D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda l}{D'}$$

Som i mitt fall ($\lambda = 550\text{nm}$) blir: $D_{spot} = 5,4\mu\text{m} < S = 8\mu\text{m}$. Bilden är alltså aningen större i mitt fall. Hade däremot $D_{spot} > S$ är det svårt att urskilja bilden av ljuskällan då den ser ut som en enda punkt vilket är bättre m.a.p. det vi vill undersöka i uppgiften.

- f) Tidsmedelvärdesoperationen $\langle \blacksquare \rangle$ är nödvändig här eftersom intensiteten vi ser med våra ögon medelvärdesbildas över ett antal tiotals millisekunder. (Mänskliga ögats refresh-rate är 30-60 fps). Om ögat betraktar en mobilficklampa vars ljus är inkoherent tidsmedelvärdesbildas alltså intensiteten över en tid (tiotals millisekunder) som är avsevärt mycket längre än ljusets koherenstid. Eftersom ficklampan är en inkoherent källa kan den betraktas som en stor uppsättning helt okorrelerade punktkällor (slumpmässig fasrelation i varje tidpunkt) där varje punktkälla sänder ut alla våglängder med noll korrelation (total slump/randomness) mellan respektive våglängd. Detta innebär att istället för att koherent summera de elektriska fältbidragen från varje punktkälla och alla dess våglängder för varje punkt på näthinnan fås samma resultat om vi istället inkoherent adderar intensitetsbidragen. Detta är precis vad vi gör i första steget i förenklingen. Vi summerar intensiteten från samtliga punktkällor på ljuskällan över alla våglängder för varje punkt på näthinnan.

I sista förenklingen, hade vår ljuskälla utgjort en enda punktkälla hade bilden S varit en enda punkt vilket förstås skulle reducera den tvådimensionella rumsintegralen som visat. Nu är så inte fallet och exakt resultat beror på den individuella uppställningen. Oavsett fås en ändlig bildstorlek S och denna bild samplas med ett ändligt antal stavar och tappar som sitter på näthinnan. Avståndet mellan dessa ljus-receptorer är på storleksordningen μm , enligt en källa exempelvis: $\delta = 2,5\mu\text{m}$. Med $S = 8\mu\text{m}$ enbart något större än separationen δ inser vi att enbart ett litet antal receptorer ryms inom S . Kanske endast 7-8 st. Redan nu har den tvådimensionella rumsintegralen reducerats till en summa över 7-8 termer. På frågan om jag känner att jag kan urskilja 7-8 individuella separata intensitetsfördelningar när jag kollar på min ficklampa är svaret nej, de ligger så pass nära varandra så att bilderna flyter ihop och ger en starkare, om än något blurrigare intensitet. Alltså anser jag att även den sista förenklingen är godtagbar i mitt fall.

Ett annat sätt att komma till samma slutsats är att tända upp rummet och titta på ett objekt av samma storlek som din tidigare ljuskälla. Om objektets bild är väldigt litet i relation till det intensitetsmönster du skissade i uppgift e) så är den slutliga förenklingen godtagbar och slutsatsen densamma. Om man till och med lyckats avbilda ljuskällans bild med storlek mindre än D_{spot} så är förenklingen definitivt korrekt!

Eftersom rumsintegralen eliminerades så att enda intensitetsbidraget kommer från en enda punkt $\mathbf{s} = s_x\hat{x} + s_y\hat{y} = 0$ på objektet beskriver uttrycket helt enkelt Summan av PSF:erna för de olika våglängderna, vilket känns rimligt att kalla för den polykromatiska PSF:en.

Anmärkning: Sista uttrycket kan även kallas för belopp-kvadrat av den polykromatiska fouriertransformen av ett kisanse öga, eller det polykromatiska diffraktionsmönstret av ett kisanse öga.

Bonusinfo: Kisanse med ögat har du nog gjort många gånger förut men kanske har du inte funderat över hur PSF:en ändras? Som du såg i uppgift e) fås starka intensitetspikar i vertikalled när vi betraktade en stark ljuskälla. Under normala välbelysta förhållanden, typ i dagsljus, så märks den här effekten knappt av eftersom intensitetsspikarna som kommer sig av varje avbildad punkt är väldigt mycket svagare än centrum-spoten, alltså blir "spikarna" osynliga. I ett mörkt Göteborg blir situationen däremot ofta annorlunda. Här finns gott om starka ljuskällor i form av gatlyktor, rödljus och strålkastare på bilar. Intensitetsspikarna från dessa starka ljuskällor är ofta starkare än ljuset från den mörka omgivningen, därför kan vi enklare se dem i mörker. Beger man sig ut i trafiken kan de dessutom vara en trafikfara eftersom de kan dölja objekt av mörkare karaktär som är viktiga att uppfatta. En lösning man kan tänka sig är att helt enkelt inte kisa men det gör vi omedvetet när vi är ställda inför en bländande ljuskälla eftersom vi måste minska ljusinsläppet. Så här skulle det kunna se ut exempelvis:



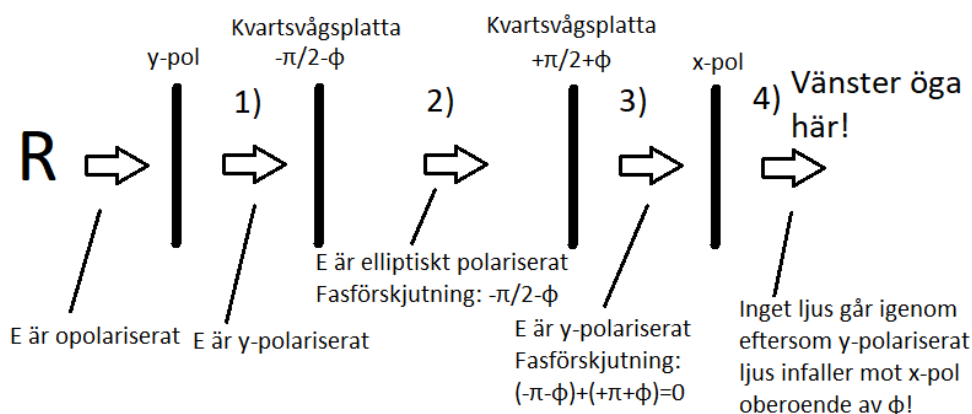
Mer info finns under wikipedias "diffraction spike".

4. 3D bio på återseende!

Vid rotation (90°) av glasögonen med bokstäverna händer 2 saker:

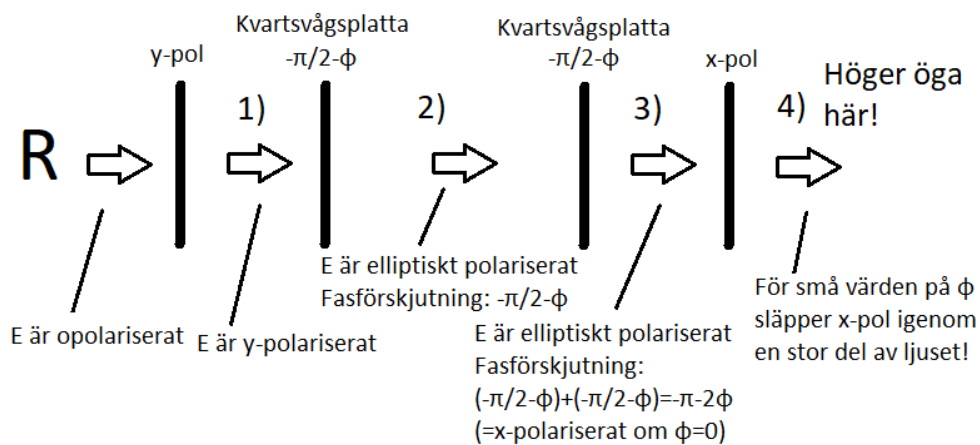
- 1) x-polarisatorn ändras till en y-polarisator vid bokstäverna medan observatörens glasögon fortfarande har en x-polarisator.
- 2) Kvartsvågsplattan för glasögonen med bokstäverna roteras 90° vilket innebär att eo och o-riktningen i kvartsvågsplattan nu har bytt plats jämfört när de var oroterade, d.v.s. R ($+\pi/2 + \phi$) blir till L ($-\pi/2 - \phi$) och vice versa.

- a) (Från R till L) Från bokstaven R till observatörens (vänstra) glasöga L gäller (se även bild nedan):
- 1) Efter polarisatorn vid bokstaven fås y-polariserat ljus eftersom transmissionsriktningen nu ligger i y-riktningen.
 - 2) Detta y-polariserade ljus kan delas upp i två komponenter, ett med E-fält längs eo-riktning och ett med E-fält längs o-riktning för den första kvartsvågsplattan. Kvartsvågsplattan fasförskjuter E_{eo} jämfört E_o med 90° vid designvåglängden vilket resulterar i cirkulärpolariserat ljus ut efter kvartsvågsplattan för designvåglängden (för våglängder som avviker ifrån design blir förskjutningen $-\pi/2 - \phi(\lambda)$ och ljuset ut blir elliptiskt polariserat.)
 - 3) Kvartsvågsplattan vid observatörens vänstra glasöga fasförskjuter E_{eo} jämfört E_o med $\pi/2$, men eftersom fält längs eo- och o-riktningarna här har bytt plats jämfört första kvartsvågsplattan så läggs nu denna fasändring på fältet polariserat i första kvartsvågsplattans o-riktning. Nettoeffekten av de två korsade kvartsvågsplattorna blir alltså att samma fasändring läggs på fält som ligger i eo-riktning och i o-riktning, d.v.s. de två plattorna har ingen effekt på polarisationen. Det innebär att ljuset efter den andra kvartsvågsplattan är linjärpolariserat i y-riktning oberoende av den extra fasförskjutningen ϕ som olika våglängder som avviker ifrån designvåglängden ger, dvs våglängdsberoende!
 - 4) y-polariserat ljus är infallande på en x-polarisator vilket innebär att inget ljus kommer igenom! Dvs, du ser ingen "spökbild" med ditt vänstra öga!



- b) (Från R till R) Från bokstaven R till observatörens (högra) glasöga R gäller (se även bild nedan):
- 1) Efter polarisatorn vid bokstaven fås y-polariserat ljus.
 - 2) Detta y-polariserade ljus kan delas upp i två komponenter, ett med E-fält längs eo-riktning och ett med E-fält längs o-riktning för den första kvartsvågsplattan. Kvartsvågsplattan fasförskjuter E_{eo} jämfört E_o med 90° vid designvåglängden vilket resulterar i

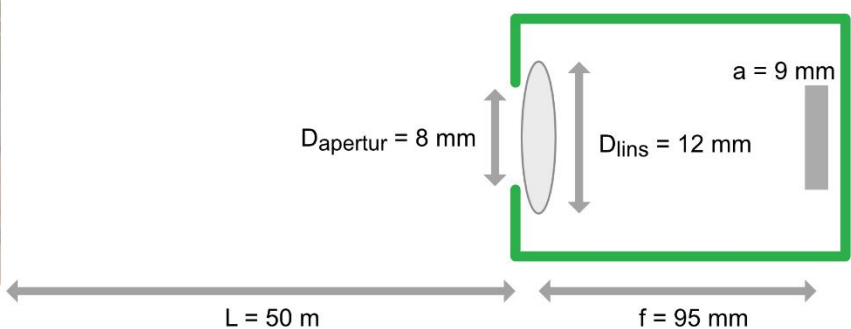
cirkulärpolariserat ljus ut efter kvartsvågspattan för designvåglängden (för våglängder som avviker ifrån design blir förskjutningen $-\pi/2 - \phi(\lambda)$ och ljuset ut blir elliptiskt polariserat).
 3) Kvartsvågspattan vid observatörens högra glasöga fasförskjuter E_{e0} jämfört E_0 med $\pi/2$, men eftersom kvartsvågspattan vid observatörens högra glasöga är orienterad på samma sätt som kvartsvågspattan vid bokstaven "R" (sedd från ljusets propagations riktning) så adderas denna fasförskjutning till den tidigare fasförskjutningen. Den totala fasförskjutningen från de två kvartsvågspattorna är då $(-\pi/2 - \phi) + (-\pi/2 - \phi) = -\pi - 2\phi$. Detta innebär elliptiskt polariserat ljus förutom för $\phi = 0$ då vi har linjärpolariserat d.v.s. x-polariserat ljus (det y-polariserade ljuset efter polarisatorn vid bokstaven "R" har då roterats av de två kvartsvågspattorna och blivit x-polariserat). För små värden på ϕ har vi elliptiskt men nästan x-polariserat ljus.
 4) Vid designvåglängden kommer alltså allt ljus att gå igenom x-polarisatorn. För våglängder som är skilda ifrån designvåglängden kommer ljuset att vara elliptiskt polariserat, och mer likt x-polariserat ljus desto mindre ϕ är.

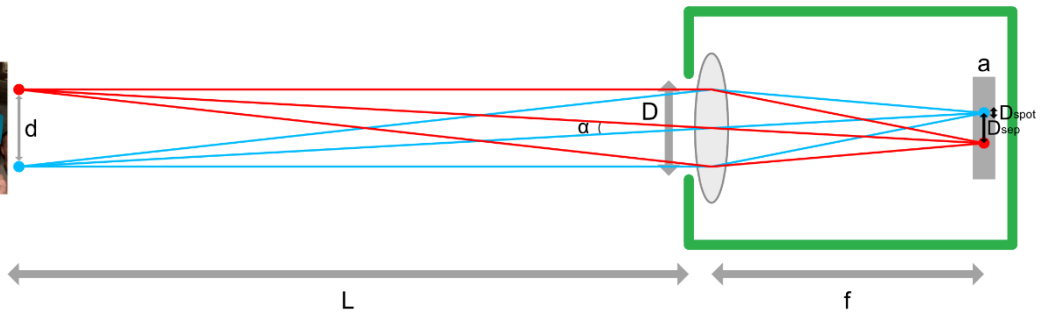


5. Bästa paparazzo-bilden?



Bild: Michael Bulcik / SKS Soft GmbH Düsseldorf





- a) En reell bild.
- b) Vi använder tumregeln med propagationslängd f , $D_{\text{start}} = D_{\text{apertur}}$, våglängden 550 nm samt konstanten 2.44 för ett cirkulärsymmetriskt system (avrundning av konstanten är ok!). Det är viktigt att inse att lensens diameter är irrelevant här, då ljuset beskärs av den mindre aperturen precis innan.

$$D_{\text{spot}} = C \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{apertur}}} \cdot f = 2.44 \cdot \frac{550 \text{ nm}}{8 \text{ mm}} \cdot 75 \text{ mm} \approx 16 \mu\text{m}$$

- c) Frågan kan verka trixig, men om man antar att längden på en sida av pixeln δ_p är lika med D_{spot} så blir uträkningen av antalet pixlar enkel

$$\text{Antalet pixlar} = \frac{\text{Arean av detektorarrayen}}{\text{Arean av en pixel}} = \frac{a^2}{\delta_p^2} = \frac{(9 \text{ mm})^2}{(16 \mu\text{m})^2} \approx 0.3 \text{ Megapixlar (MP)}$$

- d) Vi gör pixlarna dubbelt så små! Spelar det roll? Nej, inte speciellt mycket. Spot size är fortfarande den begränsande faktorn. Om vi antar att det går att urskilja avbildningen av två olika punktkällor på arrayen ifall separationen deras mittenpunkter är större än spot size ($D_{\text{sep}} > D_{\text{spot}}$), eller mer vardagligt att spottarna inte överlappar, så kan vi räkna ut d .

$$D_{\text{sep}} = \alpha \cdot f = \frac{d}{L} \cdot f > D_{\text{spot}} \Rightarrow d > D_{\text{spot}} \cdot \frac{L}{f} = 16 \mu\text{m} \cdot \frac{50 \text{ m}}{95 \text{ mm}} \approx 8 \text{ mm}$$

Vi får därför en upplösning på 8 mm på kändisen, vilket man kan tycka är "sådär", men ändå acceptabelt för ett foto i en skvallertidning. Paparazzon bör nog skaffa sig en riktig kamera, för den här är inte något vidare.

- e) Om lensens brytningsindex är våglängdsberoende kommer lensens fokallängd också att bli det. Det betyder att vi enbart kan fokusera ner "en" våglängd på detektorarrayen, medan övriga hamnar lite ur fokus (framför eller bakom), så att bilden inte blir så skarp överlag.
- f) Nu besvärar vi oss inte med att enbart en färg kan fokuseras ner på detektorn... I denna deluppgiften har vi ljusförhållanden som medför mindre ljus, och därför behöver oftast D_{apertur} vara större. Det betyder att vi får en större D_{start} och då enligt tumregeln även ett mindre D_{spot} . Detta betyder att vi teoretiskt kan få en skarpare bild i mörkare förhållanden. För detta behövs någon typ av stabilisation av kameran samt att personen som fotograferas

står stilla under slutartiden som är förlängd då vi har mörkare förhållanden då exponeringen av detektorn behöver vara längre.