

Tentamen i Optik FFY091 - tisdag 17 mars 2020, kl. 14:00-19:00

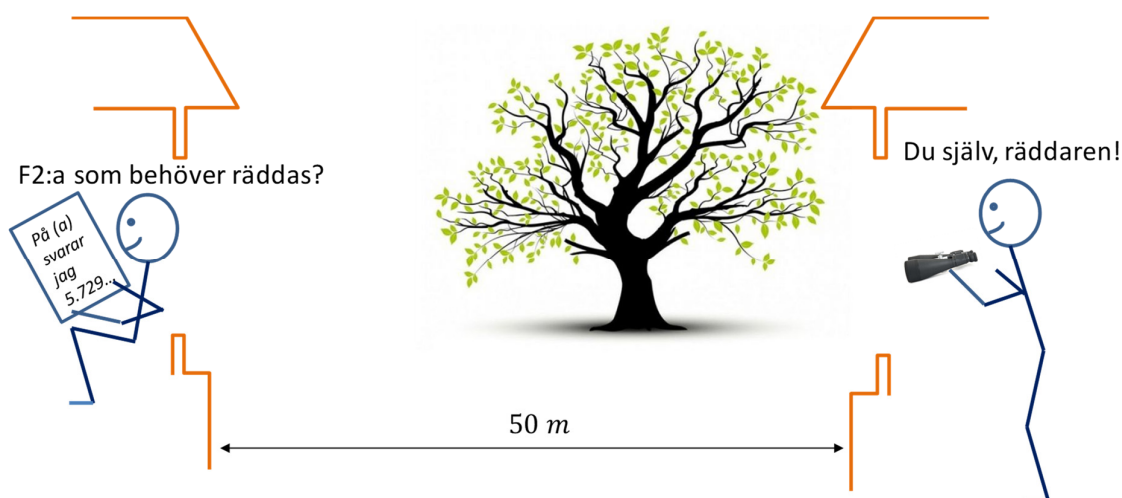
Alla hjälpmedel är tillåtna. Se instruktioner på kurshemsidan. Examinator och jourhavande lärare Jörgen Bengtsson nås på tel. 031-772 1591. På kurshemsidan publiceras lösningsförslag efter kl 21:00, när även de med extra skrivtid lämnat in.

Allergisk mot alla former av geometrisk optik? Mjukstarta då med uppgift 2!

1. Grannsamverkan mot brottsligt många värdesiffror



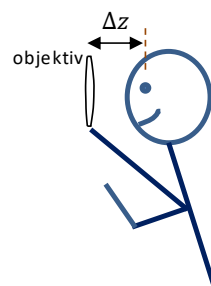
Du har hemtenta i optikkursen. Det har även din granne i huset mittemot. Hen har dessutom för vana att alltid sitta precis vid fönstret som är vänt mot din bostad. Från din position är grannen då 50 meter bort. Du funderar därför på att gå till Clas Ohlson och skaffa en kikare för att kolla att inte grannen gör bort sig genom att använda alltför många värdesiffror.



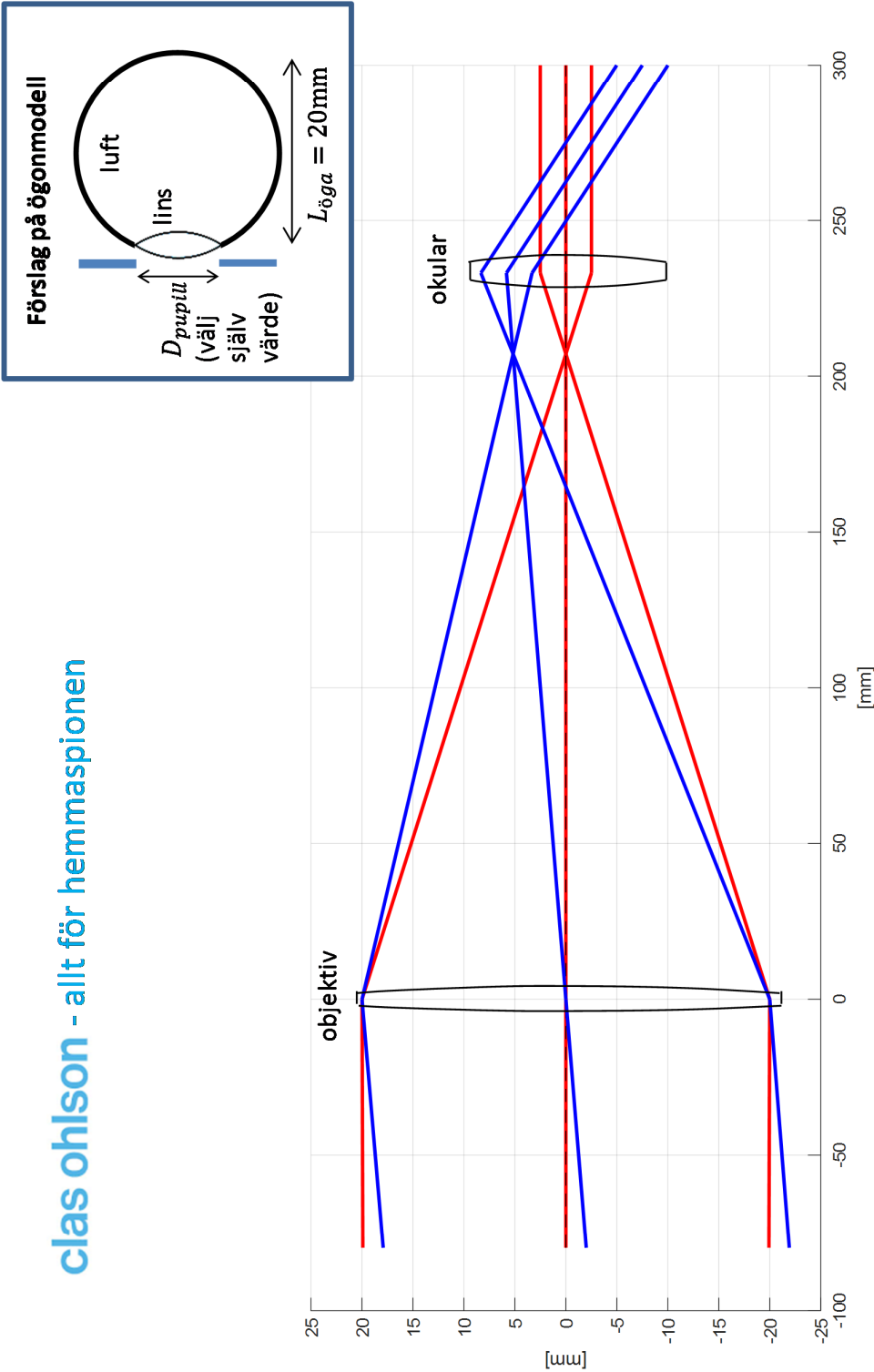
Kikarens linser är av hög kvalitet, och ett strålgångsdiagram visas *på nästa sida* för ljuset från två punktkällor (röda respektive blå strålar) på 50 meters avstånd från kikaren. De utritade linserna anger storleken (diametern) på linserna. Antag vidare att grannen skriver lika stort som du (fast snyggare), och att du har optimal synskärpa.

(a) Kommer du med kikarens hjälp att ha en chans att se vad grannen skriver? (12p)

(b) Vi antar nu att du skruvar loss objektivlinsen så att du håller den i handen och tittar genom den mot din granne. Skulle du kunna se en skarp bild av grannen för något/några avstånd Δz mellan objektivlins och öga, om du varierar Δz mellan 0 och 250 mm? Antag att ögat är ditt verkliga öga! (5p)



clas ohlson - allt för hemmaspionen



2. Arne Weise (1930-2019)

Arne Weise var Sveriges Televisions julvärd under 30 år. Hans mest ikoniska ögonblick var nog när han varje julafton tände stearinljuset i TV-studion.



(a) Vilken effekt [W] sänds ut inom det synliga våglängdsområdet från stearinljuset? (3p)

Ledning: Stearinljuset har följande data

- Vikt: 100 gram
- Brinntid: 10 timmar
- Total energiutveckling (ljus+värme) vid förbränning av 1 gram stearin: 46 kJ
- Verkningsgrad hos stearinljuset (effekt hos synligt ljus i förhållande till total effektutveckling) kan vi anta är ungefär som verkningsgraden hos en glödlampa.

(b) Antag att Arnes ansikte är ungefär 1 meter från stearinljusets låga. Är intensiteten hos det synliga ljuset som träffar hans ansikte högre eller lägre än den intensitet som träffar ansiktet när han, efter sändning, lämnar studion och kliver ut i fullmånens sken? (3p)

Ledning: Månsken är cirka en halv miljon gånger svagare än solljus, som har en intensitet på cirka 1000 W/m^2 . Vi kan anta att solen/månen enbart sänder ut synligt ljus.

(c) I uppgift (a) antas att stearinljuset har samma verkningsgrad som en glödlampa. Detta är dock inte korrekt eftersom lågan hos stearinljuset har en genomsnittlig temperatur på

$$T_{\text{låga}} \approx 1500 \text{ K}$$

medan glödtråden hos lampan har en temperatur

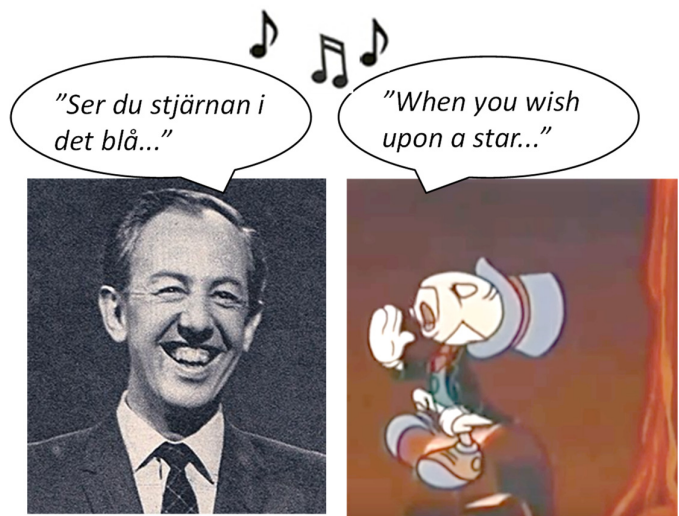
$$T_{\text{glödtråd}} \approx 2500 \text{ K}$$

Så mer korrekt, är stearinljusets verkningsgrad högre eller lägre än glödlampans? Motivera t.ex. genom att skissa schematiskt hur den utsända strålningen beror av våglängden för de två ljuskällorna. (2p)

3. Bengt Feldreich (1925-2019)

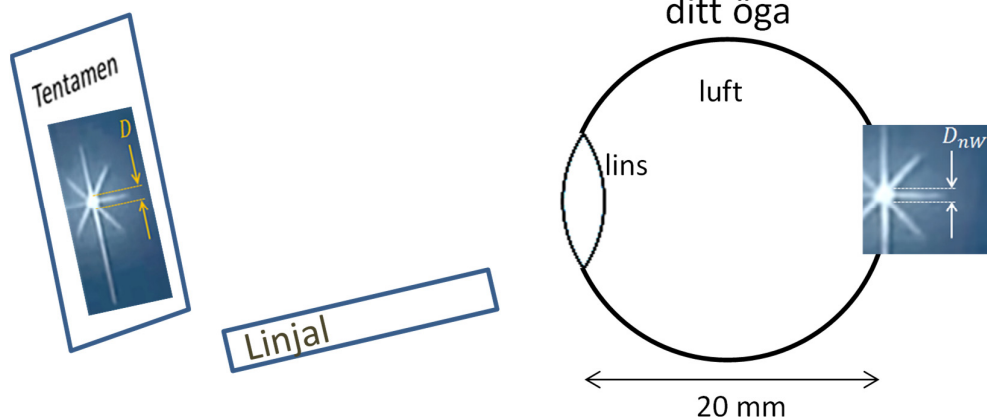
Bengt Feldreichs röst hörs i Walt Disneys TV-program *Kalle Anka och hans vänner* som sänds i Sveriges Television varje julafton klockan 15. Speciellt klassisk är den korta sekvens när han sjunger duett med Benjamin Syrsa.

Under denna sekvens visas bland annat nedanstående bild under några sekunder.



(a) Titta nu på stjärnan i bilden! Hur stor är bilden av den stjärnan på din näthinna, d.v.s. vad är diametern D_{nw} ("n" som i näthinna, "W" som i Walt Disney)? Bortse från "strålarna", antag att stjärnan i bilden har diametern D , som du lätt uppskattar med din linjal. (3p)

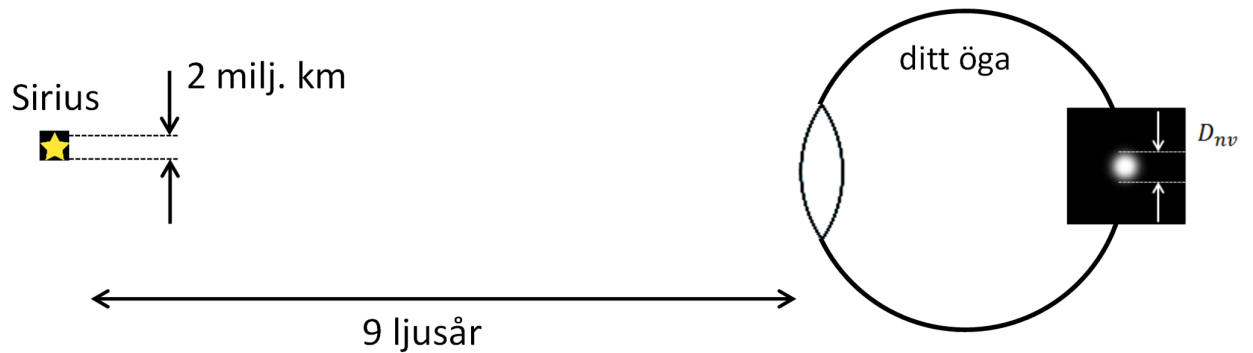
Ledning: Antag att du har ansiktet på ditt vanliga avstånd från tentamenstesens (alternativt från datorskärmen, med 100% dokumentstorlek). Antag också att du har kursens modell-öga, och att du har en ung och flexibel ögonlins som alltid kan ställa in optimal synskärpa.



Walt Disneys filmer är inte alltid helt realistiska. Det mest irriterande exemplet på detta är kanske att storleken på stjärnor alltid överdrivs, d.v.s. tecknarna gör alltid D orimligt stor.

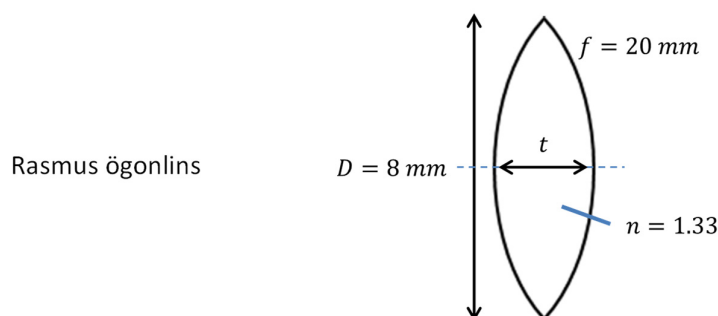
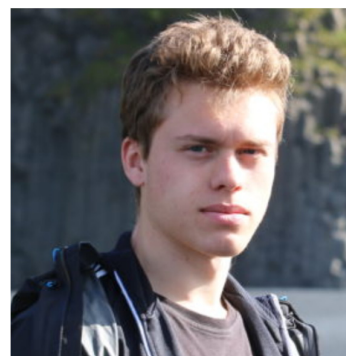
(b) Visa detta faktum genom att beräkna det belysta områdets storlek på din näthinna, D_{nv} ("v" som i verklig), när du tittar mot en riktig stjärna! Hur mycket överdriver Walt Disney den upplevda storleken av stjärnor, d.v.s. vad är värdet på kvoten D_{nW}/D_{nv} ? (5p)

Ledning: Ett exempel på en riktig stjärna är Sirius, himlens ljusstarkaste stjärna. Den ligger 9 ljusår bort, och har en diameter på omkring 2 miljoner km (alltså cirka 1.5 gånger så stor som solen).



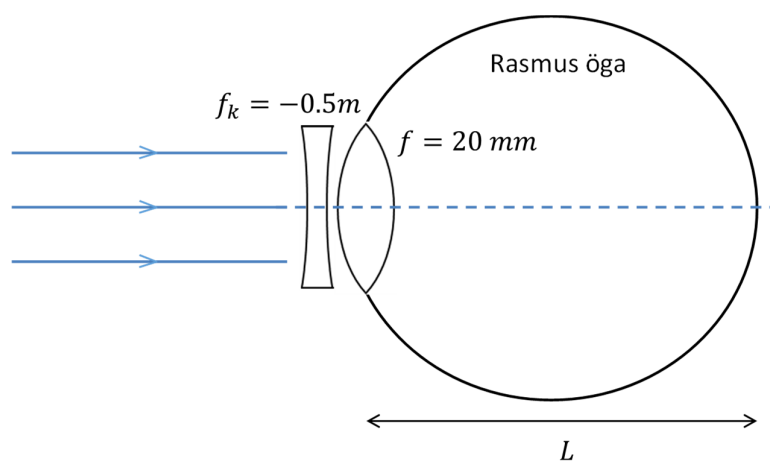
4. Rasmus ögon (känsliga tentander varnas)

Rasmus är en övningsledare i optikkursen. Låt oss anta att han är utrustad med kursens luftfyllda modellöga. Antag också att hans ögonlins har den fixa fokallängden $f = 20 \text{ mm}$, att linsen är gjord av ett material med brytningsindex $n = 1.33$ (samma som vatten), att linsen har diametern $D = 8 \text{ mm}$ och tjockleken noll längs kanten, som visas i figuren.



(a) Vad är linsens tjocklek t på det tjockaste stället? Använd TOK-modellen och antag att paraxiella approximationer gäller. (6p)

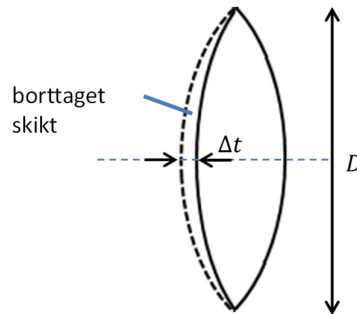
Rasmus är tyvärr närsynt. Alltså är hans öga för långt. För att se skarpt brukade han därför tidigare använda kontaktlinser med en styrka på -2.0 dioptrier (alltså med fokallängd $f_k = -0.5 \text{ m}$). Tack vare dessa såg han avlägsna föremål optimalt skarpt.



(b) Vilken längd L har Rasmus ögon? (4p)

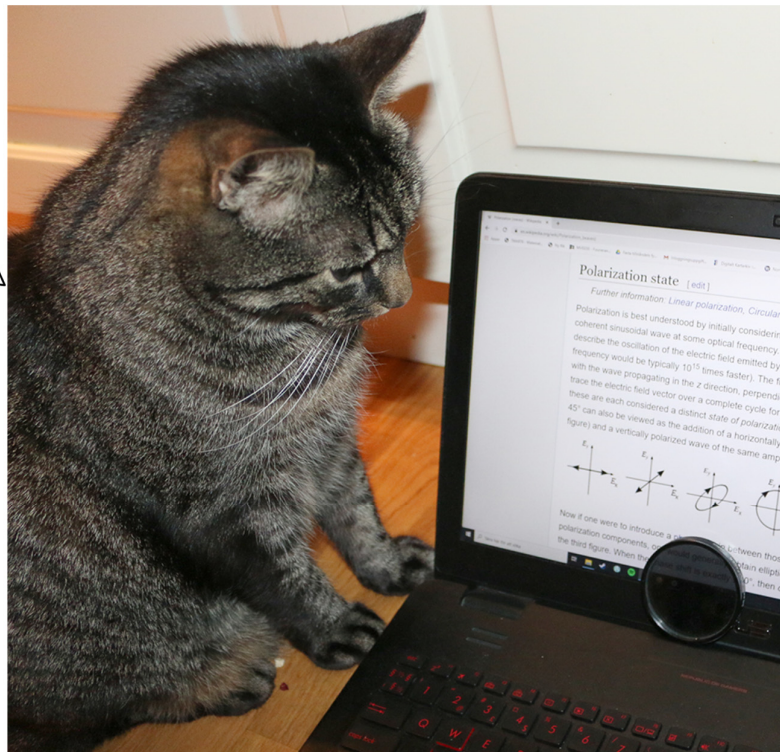
(c) För att bota sin närsynthet, så att han såg optimalt skarpt på långt håll utan kontaktlinser, genomgick Rasmus en så kallad LASIK-operation. Vid operationen görs hornhinnan lite mindre buktig genom att material förångas bort med en högeffektslaser. Med vår ögonmodell är det samma sak som att säga att framsidan av linsen görs lite planare genom att ett skikt på linsen tas bort. Hur tjockt var skiktet som togs bort vid operationen på det tjockaste stället, Δt ? (3p)

Rasmus ögonlins
efter operation



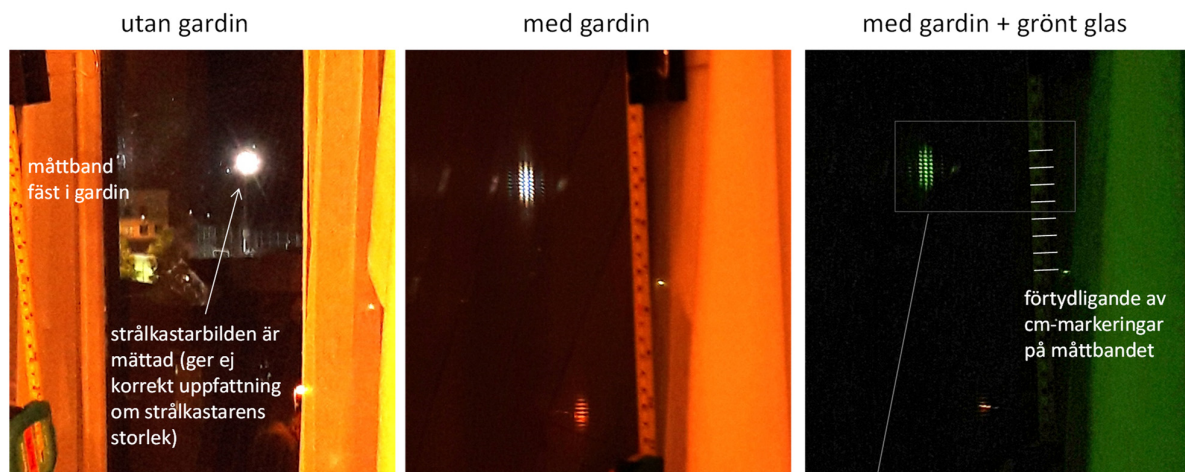
Ledning: (a) och (b)!

PS. Var denna uppgift
lite otäck? Lugna då ner
dig genom att kolla på
Rasmus supergulliga
(och übersmarta?) katt
Linus!



5. IKEA-optik

En kväll tittar Jörgen genom en av IKEAs tunna, svarta gardiner på en stark, men avlägsen, ljuskälla. Han ser då ett prickmönster! I denna uppgift behöver du bara ta hänsyn till prickarna i vertikal-led (markerade i den inzoomade bilden nedan).



Bildsekvensen visar hur det ser ut när Jörgen tittar...

... direkt mot ljuskällan utan gardinen fördragen,

... mot ljuskällan genom gardinen,

... mot ljuskällan genom gardinen och han dessutom håller en grön glasskiva framför ögat/mobilkameran.

(Denna bild är extra mörk eftersom en kortare exponeringstid har använts för att händerna inte ska hinna skaka så mycket under tiden bilden tas.)



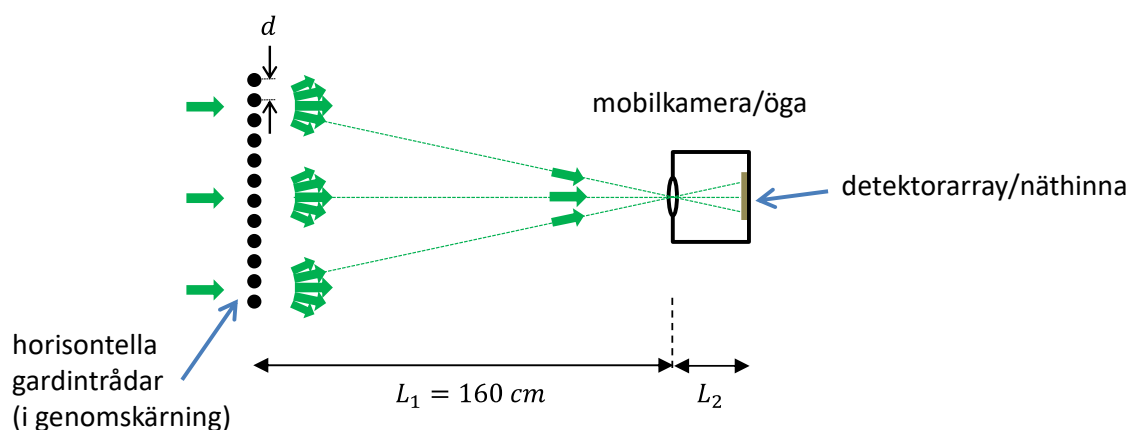
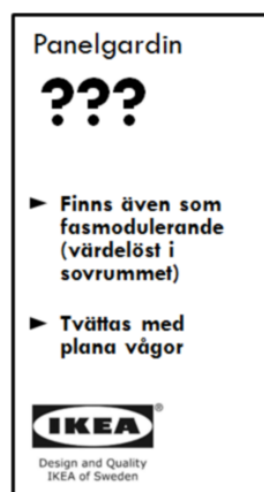
Alla bilderna är tagna från samma position, cirka 160 cm bakom gardinen. Ljuskällan är en strålkastare vid en fotbollsplan, och avståndet till ljuskällan är ungefär 266.14 meter enligt Google.



(Uppgiften fortsätter på nästa sida)

(a) Om gardinen hade varit en optik-komponent, vad hade den då kallats? Med andra ord, vad borde IKEAs namn på gardinen vara? (2p)

Ledning: Antag att det endast finns horisontella trådar i gardintyget (se figuren nedan). De har samma tjocklek och ligger på ett konstant avstånd från varandra, och det ljus som träffar trådarna absorberas.

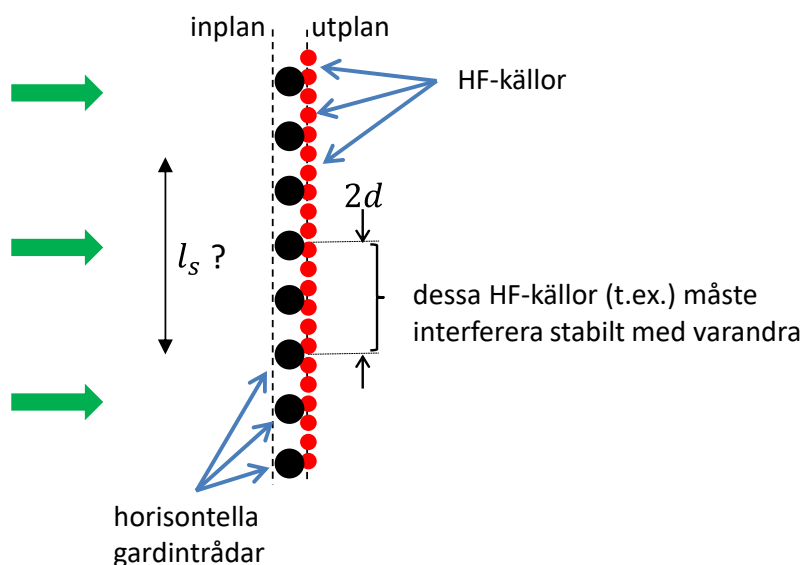


(b) Med hjälp av prickmönstret som visas i den inzoomade bilden, uppskatta avståndet d mellan trådarna i gardintyget! Du behöver endast ta hänsyn till prickmönstret i vertikalled, vilket ger separationen mellan horisontella trådar, alltså det avstånd d som visas i figuren ovan. (6p)

Ledning: Använd måttbandet som hänger i gardinen, och vars centimeter-markeringar är förtydligade med vita parallella streck.

(c) Vad kan sägas om *rumskoherensen* hos ljuset som träffar gardinen? Kan du ge en grov nedre gräns för spatiella koherenslängden l_s ? Med andra ord, komplettera följande mening: "Den spatiella koherenslängden l_s hos ljuset som träffar gardinen är minst av storleksordningen x meter." (eller vilken enhet du anser lämplig) (2p)

Ledning: Här använder vi lämpligen lite ingenjörsmässig magkänsla. Prickmönstret beror på att ljuset träffar en periodiskt varierande struktur. För att ljuset ska "känna" att strukturen är periodisk måste infallande ljusvåg "hänga ihop" över åtminstone två närliggande perioder. Som bilden nedan visar kan man ekvivalent säga att HF-källorna från minst två närliggande perioder måste interferera i vanlig (tidsmedelsvärderad) mening.



(d) Med utnyttjande av resultatet i (c), vad kan du säga om storleken av strålkastaren (dess ljusutsändande yta)? Komplettera meningen "Strålkastarens ljusutsändande yta har en utbredning som är minst/högst (välj rätt alternativ) y meter"! (4p)

--- SLUT PÅ TENTAN ---

Tentamen i Optik FFY091

tisdag 17 mars 2020, kl. 14:00-19:00

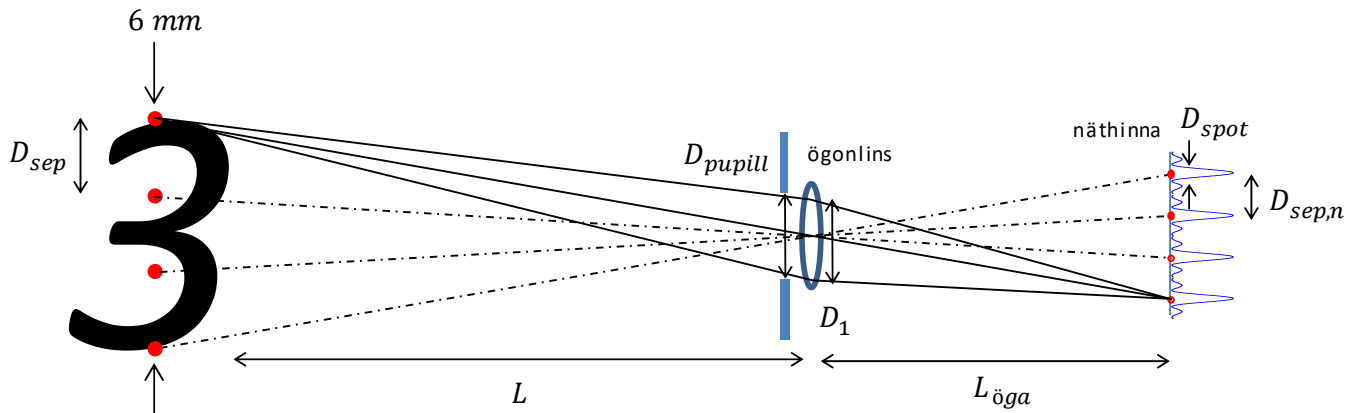
1. Grannsamverkan mot brottsligt många värdesiffror

(a)

Fall 1: Utan kikare

Vi börjar med att kolla på fallet att du tittar utan kikare. Vi gör ett antal godtyckliga, men förhoppningsvis rimliga, antaganden.

Observation utan kikare



1. Grannens handstil har 6 mm höga siffror/bokstäver (jämför med din egen stil).

2. För att kunna identifiera siffrorna/bokstäverna behöver vi kunna upplösa 4 positioner i höjdlängd (t.ex. består ju siffran "3" av tre nästan horisontella streck om man går i höjdlängd). Det betyder att

$$D_{sep} = 6\text{ mm} / 3 = 2\text{ mm} \text{ (ty tre mellanrum mellan de fyra punktkällorna).}$$

Med andra ord ska ljusblaffarna från de fyra rödmarkerade punktkällorna vara hyfsat separerade på näthinnan. Vi antar (godtyckligt igen, men av praktiska skäl är det följande en standard-definition på att punktkällor ska vara urskiljbara i ett avbildande system) att detta är uppfyllt om...

3. ... ljuset på näthinnan från varje punktkälla är separerat från grannpunktkällan med ett avstånd $D_{sep,n}$ (enligt geometrisk optik) större än varje ljusblaffas storlek. Alltså

$$D_{sep,n} > D_{spot}$$

där vi antog att ljusblaffans storlek är minsta möjlig, alltså given av minsta spotsize D_{spot} , eftersom du antas ha riktigt bra syn. $D_{sep,n}$ ges av geometrisk optik

$$D_{sep,n} = |M|D_{sep} = \frac{L_{öga}}{L} D_{sep} = \frac{20 \text{ mm}}{50 \text{ m}} 2 \text{ mm} = 0.8 \mu\text{m}$$

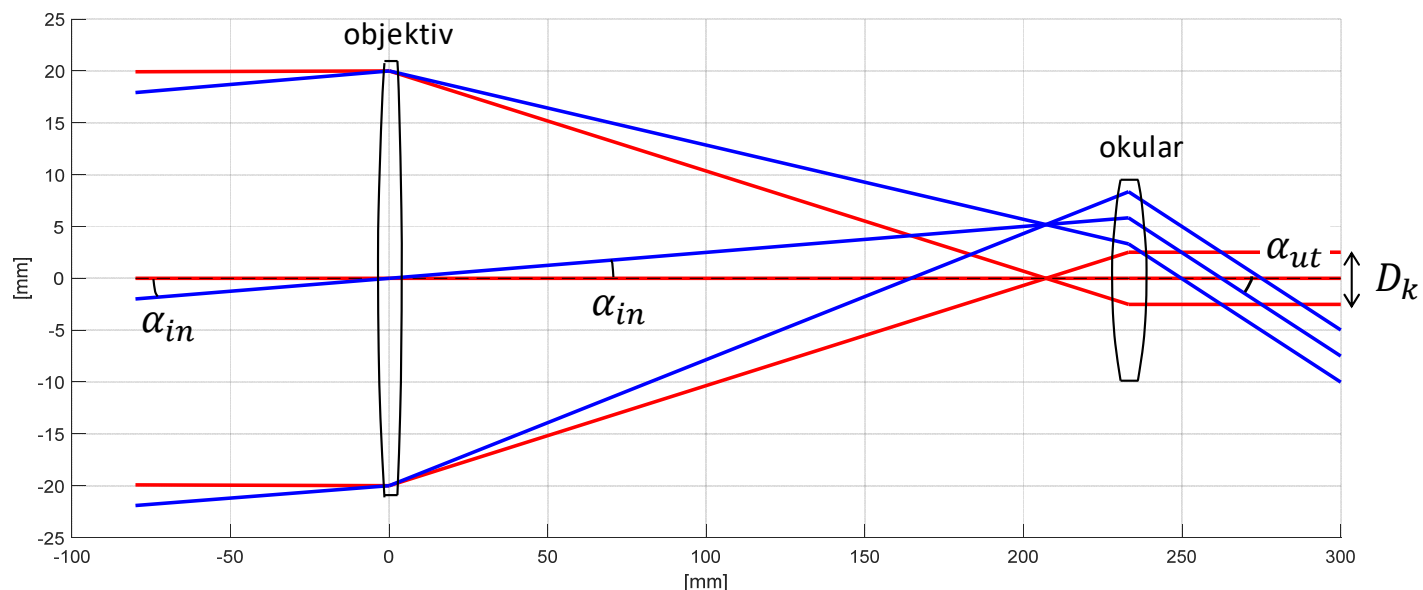
där M avbildningens förstoring och D_{spot} ges av

$$D_{spot} = \text{const} \frac{\lambda}{D_1} L_{öga} = \left\{ \text{const} = 2; \lambda = 550 \text{ nm}; D_1 = D_{pupill} = 6 \text{ mm} \right\} = 2 \frac{550 \text{ nm}}{6 \text{ mm}} 20 \text{ mm} \approx 4 \mu\text{m}$$

där const valdes till ett lite högre värde med tanke på att ögon är så förvånansvärt imperfekta (egentligen skulle nog värdet vara ännu ett snäpp högre) att vårt antagande om optimal syn egentligen är milt vansinne. Värdet på D_{pupill} är också ett antagande (detta är ett ganska stort värde på pupilldiametern, men den varierar ju som bekant beroende på belysningen), och λ valdes att ligga ungefär mitt i det synliga området (grönt).

Vi ser alltså att vårt villkor för att kunna urskilja siffrorna/bokstäverna, $D_{sep,n} > D_{spot}$, inte är uppfyllt.

Fall 2: Med kikare



En kikares uppgift är att ta en infallande (nästan) parallell stråle från en punktkälla och göra den till en parallell stråle ut från kikaren med en större avläkningsvinkel α_{ut} än inkommande vinkel α_{in} . En kikares förstoring anges som vinkelförstoringen M_v

$$M_v \equiv \frac{\alpha_{ut}}{\alpha_{in}}$$

Ekvivalent kan man säga att vinkelförstoringen är hur mycket större bilden på näthinnan blir med kikare, jämfört med utan kikare. Ur strålgångsdiagrammet uppskattar man vinklarna

$$\alpha_{in} = \{\text{stråle genom centrum av lins bryts ej}\} = \frac{5 \text{ mm}}{200 \text{ mm}}$$

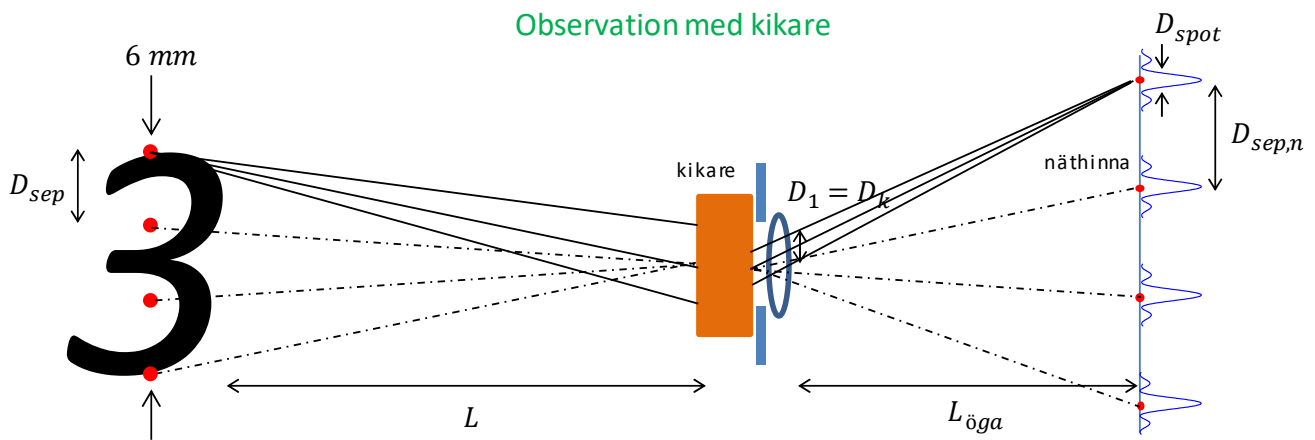
$$\alpha_{ut} = \frac{10 \text{ mm}}{50 \text{ mm}}$$

vilket ger

$$M_v = \frac{10 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \cdot \frac{200 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} = 8$$

Kikaren förstorar alltså cirka 8 gånger. Det betyder att punktkällornas blaffor på näthinnan är separerade med en sträcka $D_{sep,n}$ som är 8 gånger större än utan kikare. Vi får alltså

$$D_{sep,n} = 8 \text{ gånger värdet utan kikare} = 8 \cdot 0.8 \mu\text{m} = 6.4 \mu\text{m}$$



Varje ljusblaffas utbredning på näthinnan blir snarlik den när vi tittar utan kikare. Men med vårt val av pupilldiameter, 6 mm, ser man att det inte är pupillen som begränsar utbredningen D_1 i Plan 1 (direkt efter ögonlinsen) utan diametern på strålen ut från kikaren, D_k . Av strålgångsskissen framgår nämligen att denna diameter är 5 mm, d.v.s. något mindre än pupilldiametern.

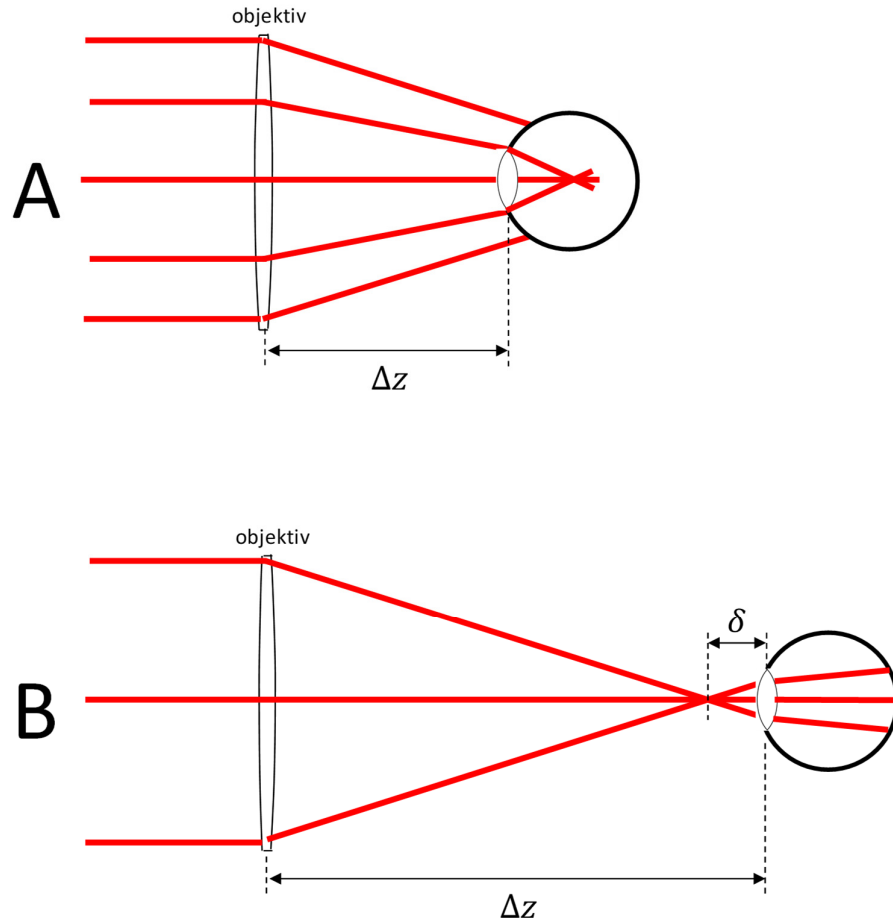
Om vi antar optimala förhållanden, alltså en bra kikare och bra ögon, ges blaffans storlek av minsta spotsize. Med samma resonemang som tidigare vad gäller värdena på $const$ och λ fås

$$D_{spot} = const \frac{\lambda}{D_1} L_{öga} = \{const = 2; \lambda = 550 \text{ nm}; D_1 = D_k = 5 \text{ mm}\} = 2 \frac{550 \text{ nm}}{5 \text{ mm}} 20 \text{ mm} \approx 5 \mu\text{m}$$

där jag avrundade diametern uppåt till hela mikrometer, för att vi skulle se att vi inte bara tog D_{spot} -värdet från fallet utan kikare.

Och se, med kikarens hjälp får vi alltså $D_{sep,n} > D_{spot}$! Så det skulle kanske finnas en chans att bedöma grannens (miss-)bruk av värdesiffror! Men uppenbarligen har vi gjort en räkna ganska godtyckliga antaganden, och antagit nära nog ideala förhållanden. Så det enda som gäller är att faktiskt skaffa den där kikaren från Clas Ohlson och göra ett experiment (men informera din granne först, så att du inte riskerar att få dåligt rykte i grannskapet).

(b)



I **Fall A**, när ögat är till vänster om fokuset ($0 < \Delta z < 200\text{mm}$) träffas ögat av konvergent ljus. Sådant ljus existerar inte i naturen, och ögat är inte gjort för att kunna fokusera detta på näthinnan. Eftersom ljuset "fokuserar sig" redan innan det gått igenom ögonlinsen inträffar fokus för tidigt efter ögonlinsen, alltså framför näthinnan i ögat.

(Enda undantaget är om du är kraftigt "långsynt", alltså har ett för kort öga, och därför bär positiva linser i dina glasögon/linser (precis som objektivlinsen). Då kan du se skarpt om du tar av dig dina glasögon. För att detta ska funka måste dina glasögon vara minst lika starka som objektivlinsen, alltså med fokallängd på högst cirka 200mm , vilket hos optikern uttrycks som en linsstyrka på minst $1/0.2[\text{m}] = +5$ dioptrier.)

I **Fall B** är ögat till höger om fokuset. Då är ljuset som träffar ögat visserligen divergent, men avståndet från fokuset till ögat, δ , är för kort för att ljuset ska kunna fokuseras på näthinnan. I HUPP3a gjorde du ett experiment där du konstaterade att du behöver ungefär $7\text{--}15\text{cm}$ avstånd till ett föremål för att se det skarpt. Det är det avstånd δ du (minst) måste ha från fokuset till ögat för att kunna fokusera till (nästan) en punkt på näthinnan. Men om Δz är 250mm som mest (enligt uppgiftstexten) är δ som mest knappt 50mm enligt strålgångsskissen.

Slutsatsen är alltså att du aldrig kommer att se en skarp bild av grannen på detta sätt (om du inte är kraftigt långsynt)!

2. Arne Weise (1930-2019)

(a) Total utsänd effekt (ljus+värme) från stearinljuset är

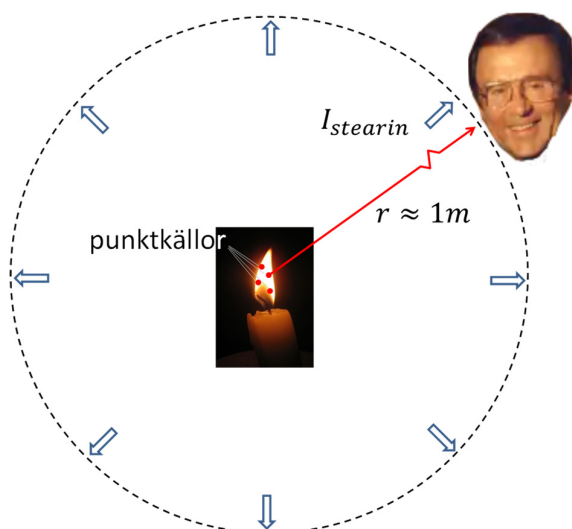
$$P_{tot} = \frac{\text{energi som erhålls vid förbränning}}{\text{ljusets brinntid}} = \frac{\text{ljusets vikt [g]} \times \text{energi hos 1g stearin}}{\text{ljusets brinntid}} = \\ = \frac{100 \text{ g} \times 46 \text{ kJ/g}}{10 \text{ h}} = \frac{100 \times 46 \cdot 10^3 \text{ J}}{10 \times 3600 \text{ s}} = 130 \text{ W}$$

Av denna effekt är det mesta värmestrålning. Om vi antar att verkningsgraden $\eta \approx 5\%$, vilket är det ungefärliga värdet för en glödlampa (numera förbjuden att sälja p.g.a. sin låga verkningsgrad), blir effekten som sänds ut som synligt ljus

$$P_{ljus} = \eta \cdot P_{tot} = 0.05 \times 130 \text{ W} \approx 6 \text{ W}$$

Ja, 6 W låter kanske inte så mycket, men eftersom detta är den rena ljuseffekten handlar det faktiskt om en riktigt stark "lampa": jämför med en LED-lampa med en verkningsgrad på cirka 25% som alltså skulle behöva en total effekt på $6 \text{ W} / 25\% = 24 \text{ W}$ för att vara lika stark. Och det skulle vara en *riktigt* stark lampa – så starka LED-lampor förekommer knappast för vanligt inomhusbruk. Men, som vi finner i uppgift (c), har vi nog varit lite optimistiska när det gäller stearinljusets verkningsgrad!

(b) Lågan hos stearinljuset består av uppretade, upphettade molekyler vars elektronmoln svingar ursinnigt och därigenom funkalar som små antenner som sänder ut elektromagnetisk strålning. Varje molekyllantenn är en punktkälla (mycket mindre än våglängden) och sänder ut en sfärisk våg som är lika stark i alla riktningar, så att intensiteten är konstant på en sfär med centrum i punktkällan.



De olika molekyllantennerna/punktkällorna i lågan är okorrelerade och den totala intensiteten är därför summan av intensiteterna från alla punktkällor för sig. Ingen märklig interferens uppstår alltså (vilket förhoppningsvis stämmer med din erfarenhet av stearinljus) utan totala intensiteten, $I_{stearin}$, är också konstant på en sfär med centrum i ljuslågan. Intensiteten blir därför

$$I_{\text{stearin}}(r) = \frac{\text{utsänd effekt i det synliga området}}{\text{area av sfär med radie } r} = \frac{P_{\text{ljus}}}{4\pi r^2}$$

Arnes ansikte befinner på avståndet $r \approx 1\text{ m}$ från ljuslågan, och träffas alltså av intensiteten

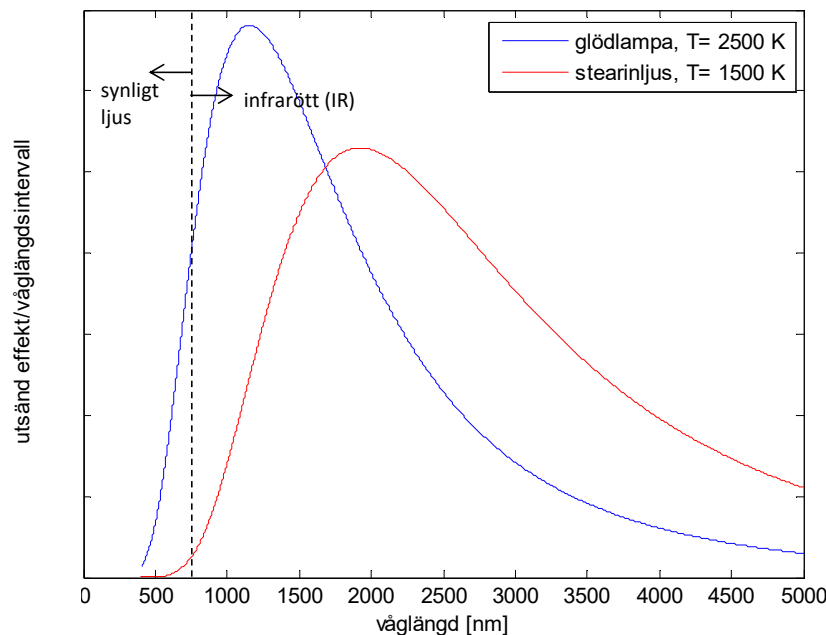
$$I_{\text{stearin}}(r \approx 1\text{ m}) = \frac{6\text{ W}}{4\pi \cdot 1^2\text{ m}^2} \approx 0.5\text{ W/m}^2$$

Detta ska jämföras med intensiteten hos ljuset från fullmånen, som träffar Arne när han lämnar julstudion efter sändning. Enligt uppgiftstexten kunde denna beräknas som

$$I_{\text{måne}} = \frac{I_{\text{sol}}}{\text{halv miljon}} = \frac{1000\text{ W/m}^2}{\frac{1}{2} \cdot 10^6} = 0.002\text{ W/m}^2$$

Ett stearinljus på 1 meters avstånd är alltså *mycket* starkare än fullmånen, med faktorn $0.5/0.002 \approx 200$! Dock överdriver vi stearinljusets ljuseffekt P_{ljus} en smula, se uppgift (c).

(c) Ljuslågan är en termisk källa. En sådan sänder ut strålning i ett brett våglängdsintervall. Ju lägre temperatur källan har, desto mer förskjuts spektrum mot längre våglängder:



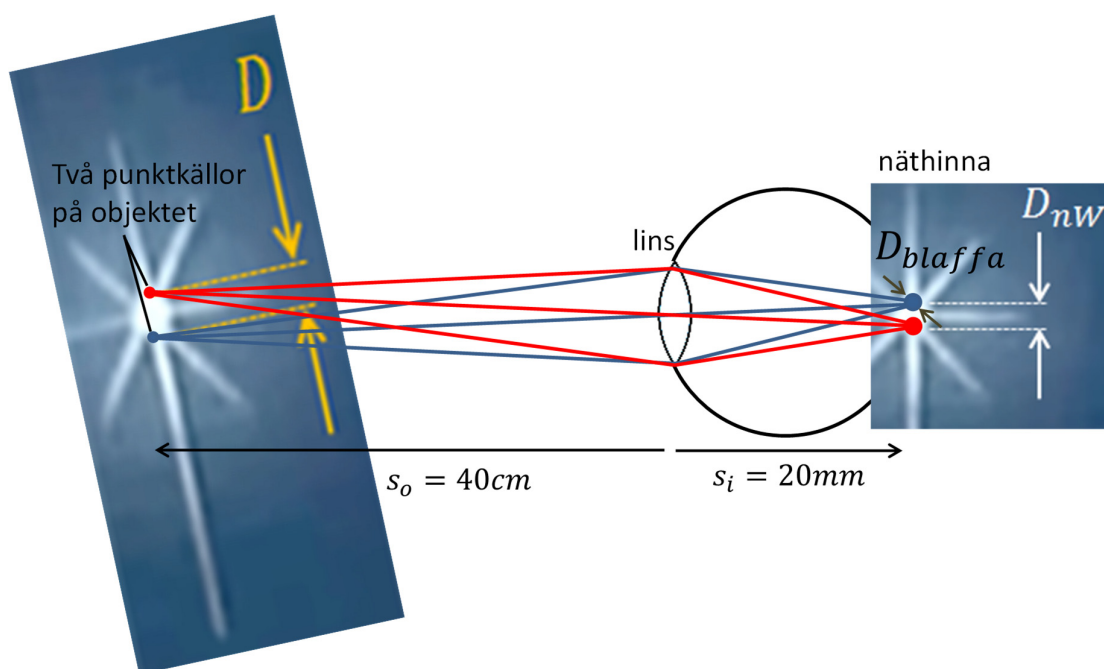
Glödlampen har så låg verkningsgrad för att den sänder ut det mesta av sin strålning i IR-området (IR=infrarött, osynlig "värmestrålning"). Men situationen är ännu värre för stearinljuset, som har lägre temperatur än glödlampen. Som vi ser av kurvorna ovan är det en markant skillnad mellan hur mycket av glödlampans ljus (blå kurva) som ligger i det synliga området jämfört med stearinljusets (röd kurva). Vårt (OK då: Mitt) antagande att stearinljuset har samma verkningsgrad som glödlampen var alltså rejält fel – stearinljuset är en betydligt mer ineffektiv ljuskälla (d.v.s. har betydligt lägre verkningsgrad)!
Så när kommer stearinljus att förbjudas?

3. Bengt Feldreich (1925-2019)

(a) Den tecknade stjärnan avbildas av ögonlinsen på din näthinna. Eftersom du tydligt kan se stjärnans detaljer, och mindre objekt än så (t.ex. prickarna hos de två streckade hjälplinjerna som används för att mäta stjärnans diameter D), är den ljusblaffa som varje punktkälla hos den tecknade stjärnan ger upphov till på näthinnan mycket mindre än bilden av stjärnan, alltså

$$D_{blaffa} \ll D_{nw}$$

med beteckningar från nedanstående figur.



Det betyder att storleken av avbildningen på näthinnan med god noggrannhet kan bestämmas med geometrisk optik (stråloptik). Avbildningens förstoring blir

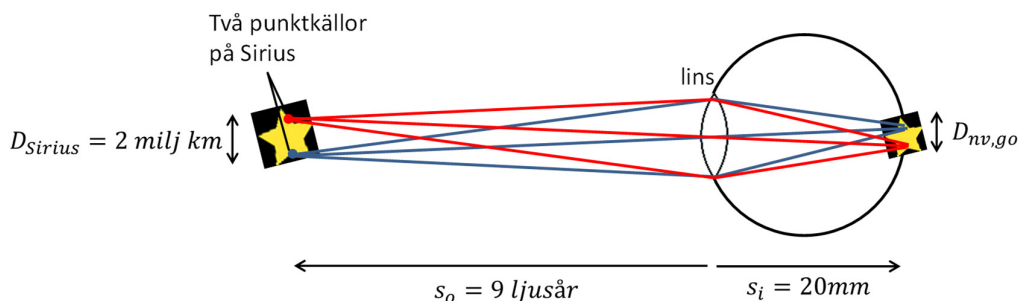
$$M = (-) \frac{s_i}{s_o} = \frac{20\text{ mm}}{40\text{ cm}} = 0.05$$

d.v.s. en förminskning 20 gånger. I uttrycket för M strök vi minustecknet eftersom vi bara är intresserade av avbildningens storlek, och uppskattade avståndet s_o mellan tentatesen/skärmen och ditt öga till 40 cm. Storleken på näthinnan av stjärnans centraldel blir alltså

$$D_{nw} = M \cdot D = 0.05 \cdot 3\text{ mm} = 0.15\text{ mm} = 150\text{ }\mu\text{m}$$

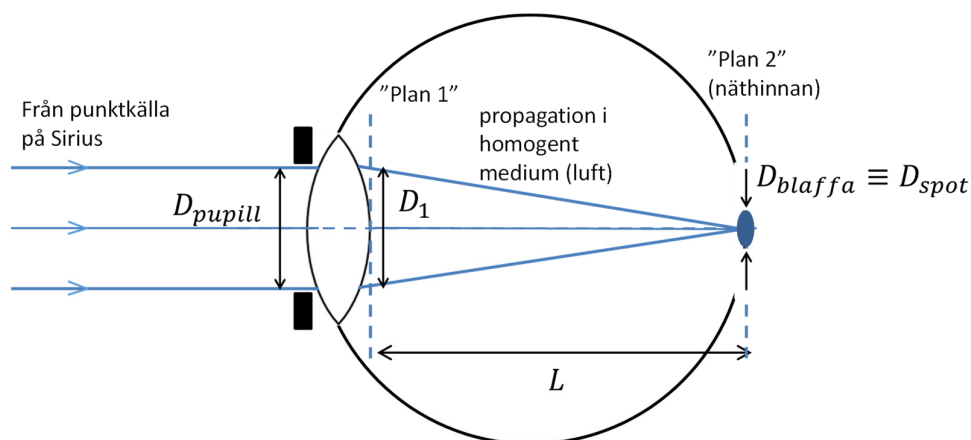
där D uppskattades genom att mäta med linjal direkt i tentatesen (avståndet mellan de två streckade hjälplinjerna).

(b) Hurra, det här tycks ju vara nästan samma sak som vi gjorde i (a)! Så vi bestämmer storleken av bilden av Sirius på näthinnan med geometrisk optik, $D_{nv,go}$ (go som i geometrisk optik),



$$D_{nv,go} = M \cdot D_{Sirius} = (-) \frac{s_i}{s_o} D_{Sirius} = \frac{20 \text{ mm}}{9 \text{ ljusår}} 2 \text{ milj km} = 4.7 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 0.5 \text{ nm}$$

Detta är en *väldigt liten* bild, stor som några atomer. Kan det stämma? Nej, varje punktkälla på Sirius ger ju en ljusblaffa i bildplanet (näthinnan)



Och som vi konstaterade i (a) så måste en sådan blaffa vara mycket mindre än den geometrisk optiska bilden för att just geometrisk optik ska ge ett bra värde på storleken av det belysta området på näthinnan, d.v.s. det måste gälla

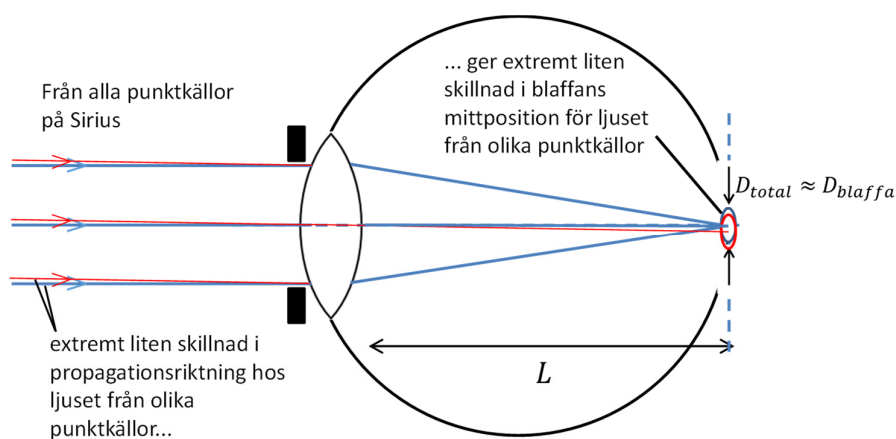
$$D_{blaffa} \ll D_{nv,go} \text{ (villkor för att geometrisk optik ska kunna användas)}$$

Om våra ögonlinser fungerar optimalt, d.v.s. fokuserar ljuset från en punktkälla på Sirius optimalt på näthinnan bestäms D_{blaffa} av storleken av minsta spotsize, d.v.s.

$$D_{blaffa} = D_{spot} \approx \text{const} \frac{\lambda}{D_1} L \approx \text{const} \frac{\lambda}{D_{pupill}} L \approx 2 \frac{550 \text{ nm}}{6 \text{ mm}} 20 \text{ mm} \approx 3 \mu\text{m}$$

där vi tämligen godtyckligt valde $const = 2$ för konstanten i tumregeln om minsta spotsize (som sades i diskussionen till uppgift 1 är till och med ett betydligt högre värde än så på $const$ inte omotiverat, med tanke på hur kassa våra ögon egentligen är) och en våglängd mitt i det synliga spektrumet. Utbredningen D_1 av fältet i "Plan 1" ges av pupilldiametern D_{pupill} , som vi också tämligen godtyckligt satte till 6 mm . Propagationssträckan L är ögats längd, alltså 20 mm .

Vi ser nu att villkoret $D_{blaffa} \ll D_{nv,go}$ inte alls är uppfyllt. Tvärtom så är D_{blaffa} flera tusen gånger större än den geometrisk-optiska bilden $D_{nv,go}$! Det betyder att blafforna från alla punktkällor på Sirius hamnar på väsentligen exakt samma ställe på näthinnan, alltså rakt ovanpå varandra. Så belysningen på näthinnan från alla Sirius punktkällor ser ut som belysningen från *en* punktkälla (fast starkare). Alltså en blaffa med utbredningen $D_{total} = D_{blaffa}$.



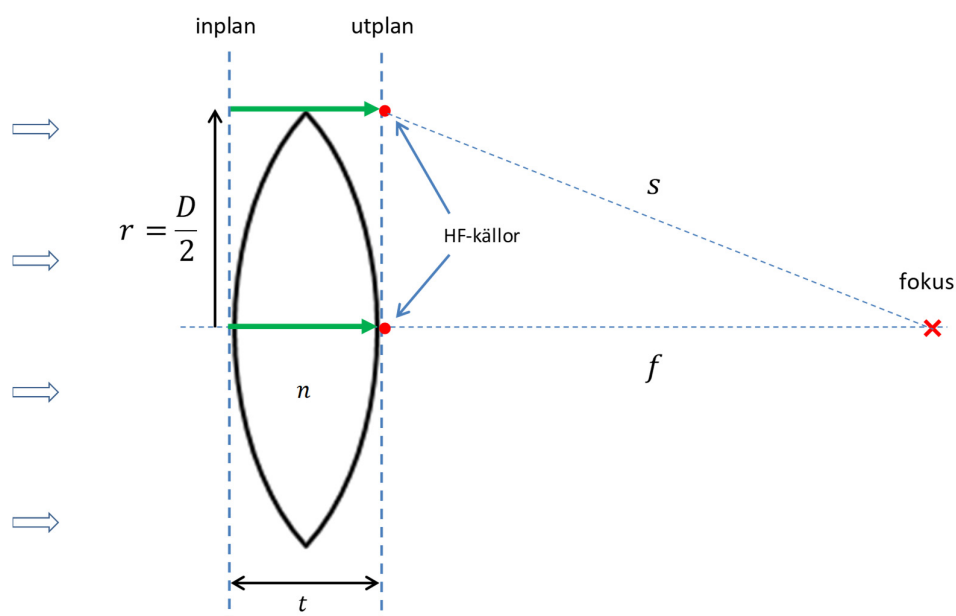
Verkliga storleken av det belysta området på näthinnan när vi kollar på Sirius (eller vilken stjärna som helst) är alltså $D_{nv} \equiv D_{total} = D_{blaffa} = D_{spot} \approx 3\text{ }\mu\text{m}$ för ett nästan idealt öga.

Slutligen konstaterar vi att med Walt Disneys sätt att teckna stjärnor får dessa en överdriven storlek på näthinnan med faktorn

$$\text{Deviation factor from reality in Walt Disney's movies} \equiv \frac{D_{nW}}{D_{nv}} = \frac{150\text{ }\mu\text{m}}{3\text{ }\mu\text{m}} = 50$$

vilket måste betraktas som ett alarmerande resultat för en storproducent av underhållning för barn!

4. Rasmus ögon (känsliga tentander varnas)



(a) Om linsen träffas av normalt infallande plan våg (=parallella strålar) uppstår ett fokus på fokallängds avstånd, f , från linsen. I fokus är ljuset från alla HF-källor i utplanet i fas. Speciellt gäller detta för de två utritade fallen i figuren ovan.

Vi beräknar fasen i fokus från HF-källan på symmetriaxeln ($r = 0$):

$$\varphi_{center} = \varphi_{inplan} + kt + k_0 f = \varphi_{inplan} + k_0 n t + k_0 f$$

där φ_{inplan} är fasen i inplanet, som är konstant (oberoende av r) eftersom vi har en normalt infallande plan våg. När vi använder TOK-modellen för att gå genom linsen är "fasändringen per längdenhet" $k = k_0 n$ eftersom vi hela sträckan mellan in- och utplan befinner oss i linsmaterialet.

Om vi stället beräknar fasen i fokus från HF-källan på linsens periferi ($r = D/2$):

$$\varphi_{kant} = \varphi_{inplan} + k_0 t + k_0 s$$

eftersom hela sträckan mellan in-och utplan nu är belägen i luft, se skissen ovan.

Sträckan s beräknas i den paraxiella approximationen

$$s = \sqrt{f^2 + (D/2)^2} = f \sqrt{1 + (D/2f)^2} \approx f \left(1 + \frac{1}{2} (D/2f)^2 \right) = f + \frac{D^2}{8f}$$

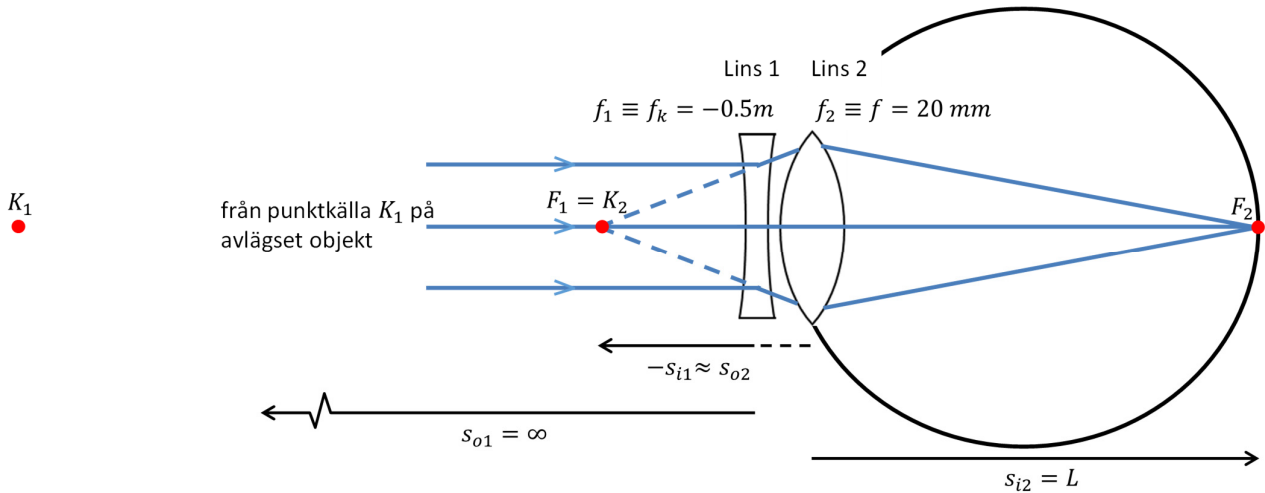
I fokus ska ljuset från HF-källorna vara i fas, d.v.s. fasen i fokus ska vara samma, alltså

$$\varphi_{center} = \varphi_{kant} \Rightarrow$$

$$\varphi_{inplan} + k_0 n t + k_0 f = \varphi_{inplan} + k_0 t + k_0 \left(f + \frac{D^2}{8f} \right) \Rightarrow$$

$$nt = t + \frac{D^2}{8f} \Rightarrow t = \frac{D^2}{8(n-1)f} = \frac{(8 \text{ mm})^2}{8(1.33-1)20 \text{ mm}} = 1.2 \text{ mm}$$

(b) Vi tillämpar lite geometrisk optik för det fall Rasmus enligt uppgiften ser skarpt.



Ljuset från ett "avlägst föremål" i rakt-fram-riktningen infaller på kontaktlinsen, d.v.s. $s_{o1} = \infty$. Kontaktlinsen är negativ och gör utgående ljus divergent. Detta ljus verkar komma från (virtuella) fokuset F_1 . Läget av F_1 inses direkt (eftersom infallande ljus på Lins 1 är parallellt) eller beräknas med Gauss linslag

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i1}} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{s_{i1}} \Rightarrow s_{i1} = f_1 = -0.5 \text{ m} \Rightarrow -s_{i1} = 0.5 \text{ m}$$

Ljuset ut från Lins 1 tycks alltså komma från en punkt 0.5 m till vänster om linsen. Det är detta ljus som Lins 2 "känner", d.v.s. $K_2 = F_1$. Eftersom Lins 1 och 2 är placerade mycket nära varandra är avståndet från K_2 till Lins 2 också 0.5 m, alltså

$$s_{o2} = 0.5 \text{ m}$$

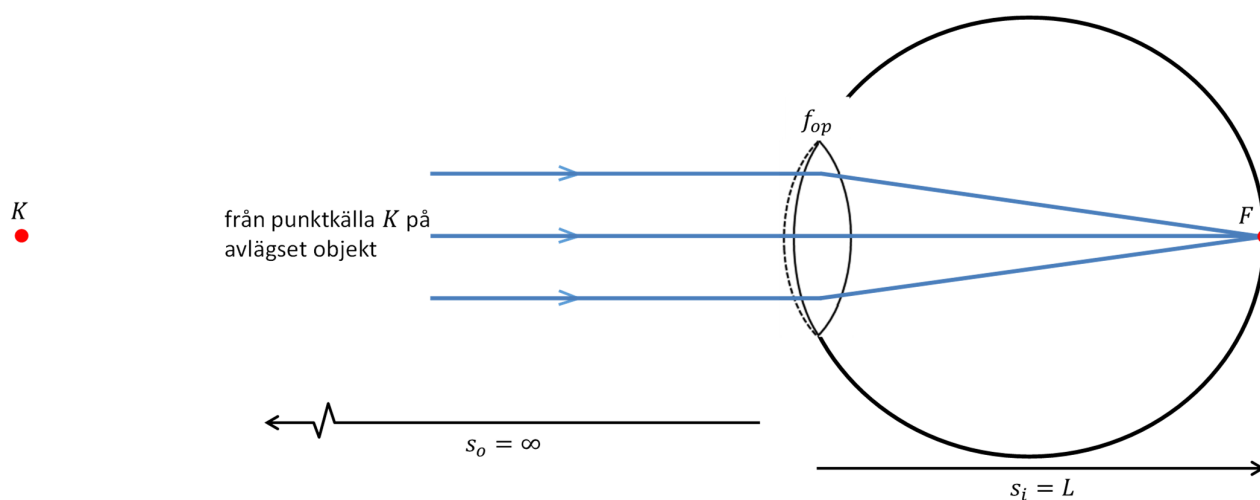
Lins 2 fokuserar detta ljus till ett reellt fokus, F_2 , på avståndet s_{i2} , som ges av Gauss linslag

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} \Rightarrow s_{i2} = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_{o2}}} = \frac{1}{\frac{1}{20 \text{ mm}} - \frac{1}{0.5 \text{ m}}} \Rightarrow s_{i2} = 20.8 \text{ mm}$$

Eftersom Rasmus ser skarpt i detta fall måste F_2 ligga på näthinnan, d.v.s. ögats längd är

$$L = s_{i2} = 20.8 \text{ mm}$$

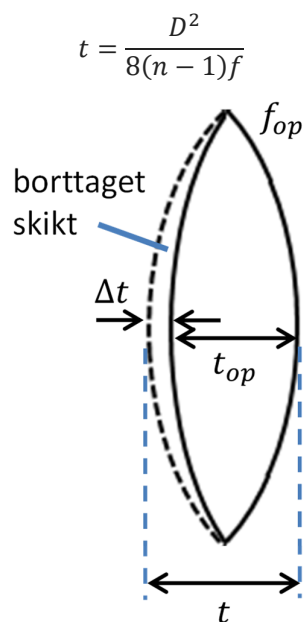
(c) Efter operationen ser Rasmus avlägsna föremål skarpt utan att använda kontaktlinser.



Vi inser direkt att det innebär att linsens nya fokallängd, efter operationen, f_{op} , är lika med avståndet till näthinnan, $f_{op} = L$. Eller så kör vi Gauss linslag

$$\frac{1}{f_{op}} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{L} \Rightarrow f_{op} = L$$

Nu kan vi använda (a) där vi beräknade maxtjockleken av linsen med fokallängd f , resultatet repeteras här:



Om vi kallar linsens nya maxtjocklek efter operation för t_{op} blir alltså

$$t_{op} = \frac{D^2}{8(n-1)f_{op}}$$

Och då blir maxtjockleken av det borttagna skiktet

$$\Delta t = t - t_{op} = \frac{D^2}{8(n-1)f} - \frac{D^2}{8(n-1)f_{op}} = \frac{D^2}{8(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_{op}} \right)$$

Som vi såg är $f_{op} = L$ och från (b) fick vi att $L = s_{i2} = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_{o2}}}$ där f_2 är vad vi nu kallar f och $s_{o2} = -f_k$.

Det betyder att

$$\frac{1}{f_{op}} = \frac{1}{L} = \frac{1}{f} - \frac{1}{(-f_k)}$$

så att

$$\Delta t = \frac{D^2}{8(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_{op}} \right) = \frac{D^2}{8(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{f} - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{(-f_k)} \right) \right) = \frac{D^2}{8(n-1) \cdot (-f_k)}$$

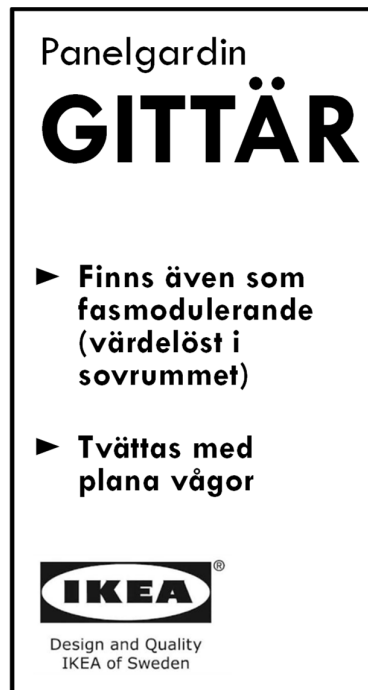
Detta är tjockleken hos en lins med samma styrka som kontaktlinsen fast positiv! Så här i efterhand känns det kanske naturligt: att addera en negativ lins är samma sak som att ta bort en lika stark positiv lins. Maxtjockleken av borttagna skiktet blir

$$\Delta t = \frac{D^2}{8(n-1) \cdot (-f_k)} = \frac{(8mm)^2}{8(1.33-1) \cdot \{-(-0.5m)\}} \approx 50 \mu m$$

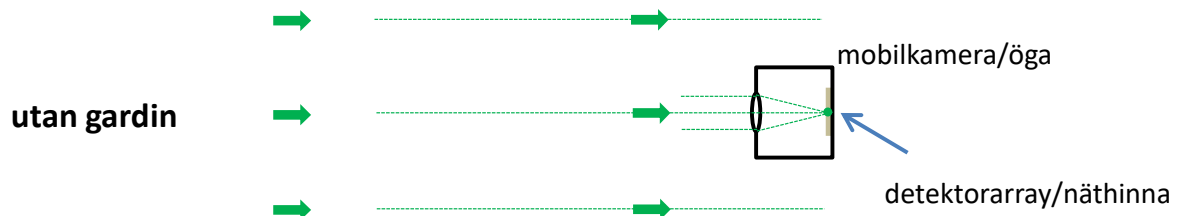
Detta värde ligger mycket nära den verkliga tjockleken av det borttagna skiktet av Rasmus hornhinna, så ögonkirurger är verkligen duktiga på TOK-modellen! Som jämförelse är totala tjockleken av hornhinnan cirka $500 \mu m$, med avsevärd individuell variation, vilket kan vara ett problem (men inte för Rasmus). Man vill nämligen ha kvar tillräckligt tjock hornhinna efter operationen, vilket gör att personer med ovanligt tunn hornhinna kan avrådas från att genomgå operationen.

5. IKEA-optik

(a) Gardinen är en binär, amplitudmodulerande TOK, som blockerar det ljus som faller på gardintrådarna och släpper igenom det ljus som går i mellanrummet mellan trådarna. Eftersom alla trådar (idealt) ligger på samma avstånd från varandra blir moduleringen periodisk. En sådan optisk komponent brukar kallas GITTER. Men eftersom IKEA gärna pepprar med exotiska "svenska" bokstäver skulle gardinen förmodligen döpas till

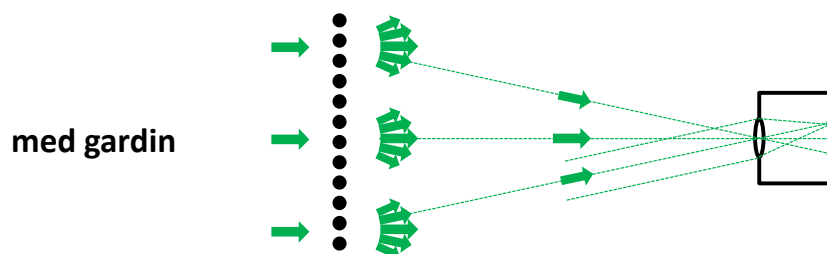


(b) Vid observatören är fältet från varje punktkälla på strålkastaren mycket nära en plan våg, och eftersom strålkastaren är avlägsen (och därmed ser mycket liten ut från observatörens position) kommer fältet från olika punktkällor in med i stort sett samma vinkel (horisontell i figuren nedan). Detta fält fokuseras av linsen i kamera/öga till en ljus fläck rakt fram på detektorarrayen/näthinna:

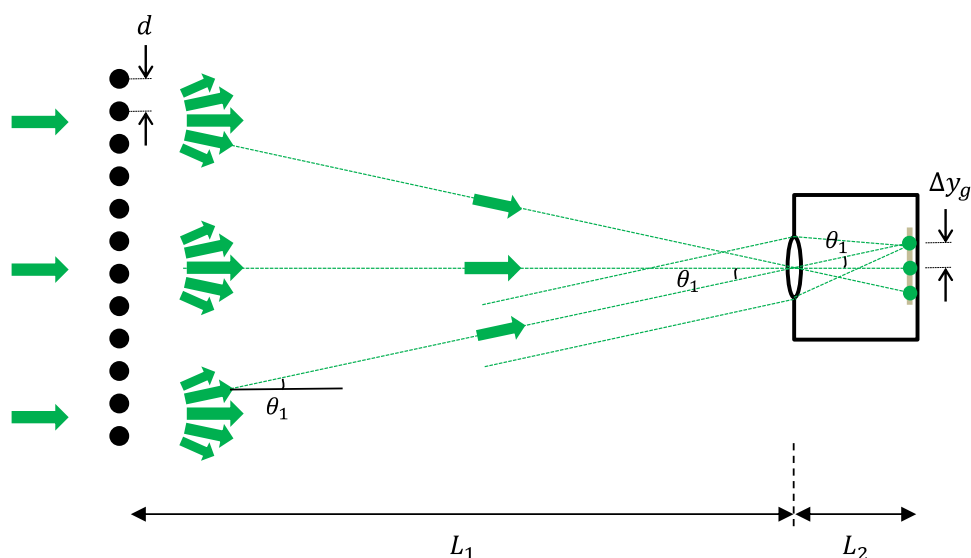


Om vi sätter in gardinen kommer den (nästan) plana vågen att träffa en struktur som ger en periodisk modulering av fältet som passerar igenom. En sådan modulering, som konventionellt åstadkoms med ett gitter, ger som resultat att fältet efter gittret/gardinen propagerar som plana vågor i olika (diskreta)

riktningar, så kallade diffraktionsordningar. Det betyder också att kameran/ögat träffas av fält med dessa olika riktningar. Linsen kommer att fokusera ljuset från varje plan våg till en ljus fläck, men positionen på detektorarray/näthinna beror på hur snett ljuset faller in. Eftersom riktningarna är diskreta så kommer vi att se en vertikal rad med ljusa fläckar där varje fläck svarar mot en viss propagationsriktning hos ljuset efter gardinen.



Låt oss betrakta ljuset i nollte diffraktionsordningen ("rakt-fram-riktningen") och första diffraktionsordningen, d.v.s. den sneda riktning som ligger närmast rakt-framriktningen. Vinkeln som den propagerar med har betecknats med θ_1 i figuren nedan.



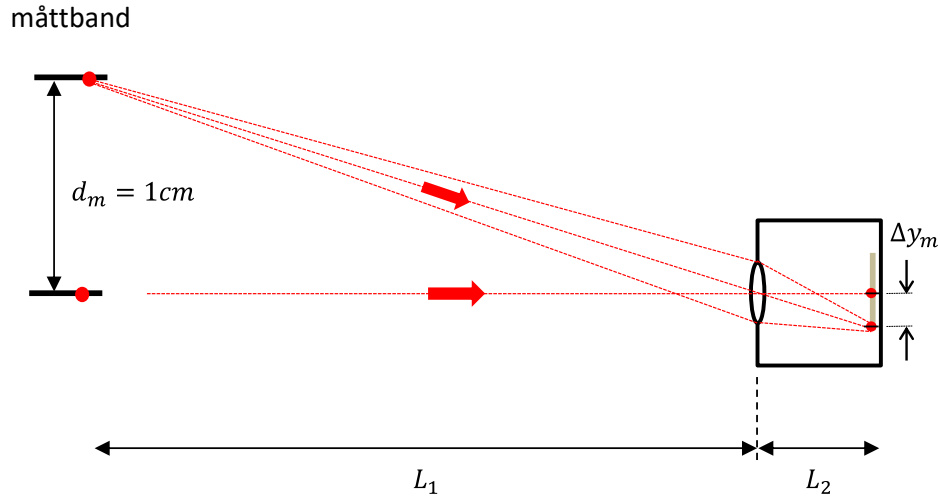
Enligt regeln att en stråle genom centrum på en lins inte bryts fås separationen Δy_g ("g" som i gardin) mellan prickarna på detektorarray/näthinna som

$$\Delta y_g = \theta_1 L_2$$

där θ_1 ges av gitterekvationen

$$(\text{generellt}) \quad m \cdot \lambda = d \cdot \sin \theta_m \quad (\text{här } m = 1 \text{ och små vinklar}) \Rightarrow \lambda = d \cdot \theta_1$$

När det gäller måttbandet avbildas detta på detektorarray/näthinna.



Separationen Δy_m ("m" som i måttband) mellan centimeterstrecken i bilden bestäms därför av avbildningens förstoring M ,

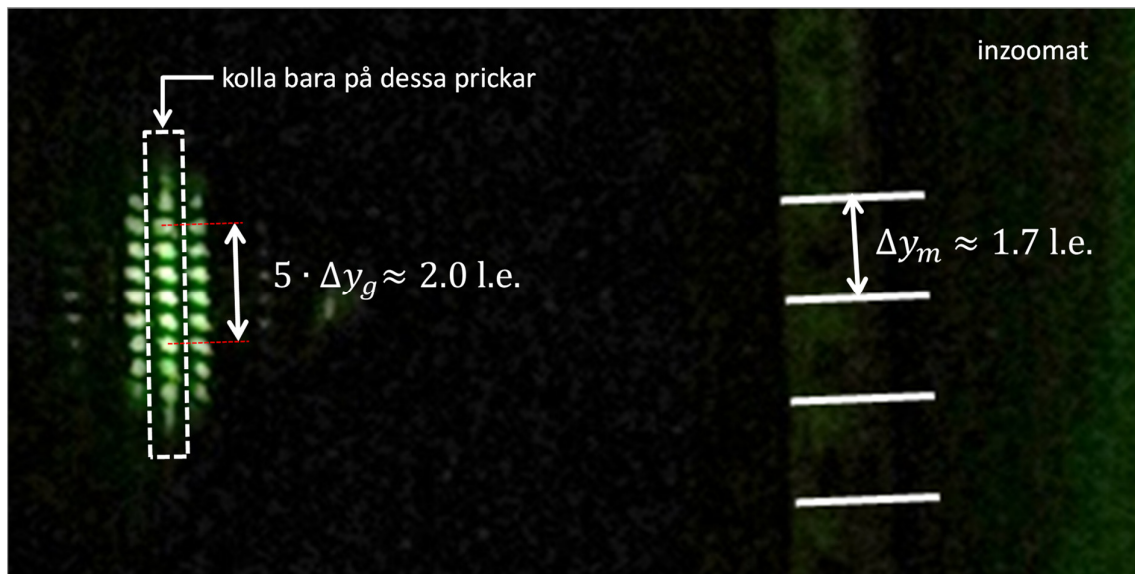
$$\Delta y_m = M \cdot d_m = \frac{L_2}{L_1} \cdot d_m$$

Det bör kanske påpekas att linsen inte samtidigt kan perfekt fokusera en infallande plan våg till skarpast möjliga fläck (såsom visas i första bilden till denna deluppgift) och avbilda måttbandet optimalt skarpt (såsom visas i bilden närmast ovan). Dock, om L_1 inte är alltför kort är fältet från varje punktkälla på måttbandet en hyfsat plan våg när den kommer till linsen, och vi kan därför utföra båda funktionerna samtidigt utan att kompromissa märkbart med skärpan (det är förmodligen så att t.ex. skakiga händer är en betydligt större orsak till oskärpa i detta fall).

Nu bildar vi kvoten mellan cm-streckseparationen och prickseparationen på detektorarray/näthinna. Med användande av härledda uttryck fås

$$\kappa \equiv \frac{\Delta y_m}{\Delta y_g} = \frac{\frac{L_2}{L_1} \cdot d_m}{\theta_1 L_2} = \{\lambda = d \cdot \theta_1\} = \frac{\frac{1}{L_1} \cdot d_m}{\frac{\lambda}{d}} = \frac{d \cdot d_m}{\lambda \cdot L_1}$$

Kvoten bestämmer vi genom att mäta i fotot, som visar intensitetsfördelningen på detektorarrayen i mobilkameran:



$$5 \cdot \Delta y_g = 2.0 \text{ längdenheter}$$

$$\Delta y_m = 1.7 \text{ längdenheter}$$

där jag mätte över 5 prickseparationer för att få lite bättre noggrannhet, och "längdenheter" råkade vara skalan på linjalen i datorprogrammet som jag använde för att redigera bilden (när du mäter med en linjal i bilden på papperet får du ett annat mått, men det är bara kvoten som är intressant).

Kvoten κ blir alltså

$$\kappa \equiv \frac{\Delta y_m}{\Delta y_g} = \frac{1.7 \text{ l.e.}}{\frac{2.0}{5} \text{ l.e.}} = \frac{1.7}{0.4} = \frac{d \cdot d_m}{\lambda \cdot L_1}$$

Det betyder att separationen mellan gardintrådarna blir

$$\Rightarrow d = \frac{1.7}{0.4} \cdot \frac{\lambda \cdot L_1}{d_m} = \frac{1.7}{0.4} \cdot \frac{550 \text{ nm} \cdot 160 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0.37 \text{ mm} \approx 0.4 \text{ mm}$$

eftersom L_1 är avståndet från gardin till kamera, vilket var angivet till 160 cm. Färgfiltret släpper bara igenom grönt ljus, så vi väljer den gröna våglängden $\lambda = 550 \text{ nm}$.

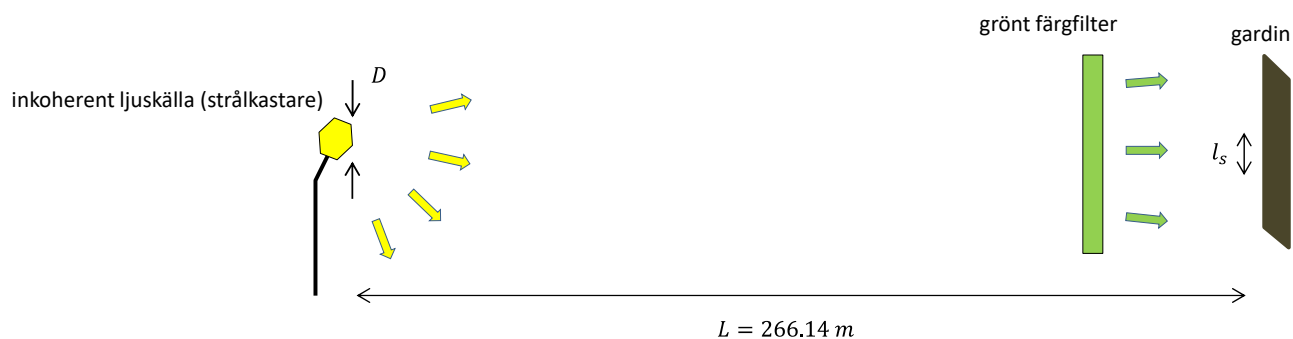
(c) Ledningen ger oss nästan den spatiella koherenslängden l_s direkt. Koherenslängden är ju just det avstånd över vilket fältet behåller sin fasrelation, vilket är nödvändigt för att HF-källorna, som drivs av fältet, ska ge ett stabilt interferensmönster. Alltså är koherenslängden l_s åtminstone 2 "perioder" hos gardinen/gittret, d.v.s.

$$l_s > 2d = 2 \cdot 0.4 \text{ mm} \approx 1 \text{ mm}$$

Vi drar slutsatsen enligt uppgiftsformuleringen

"Den spatiella koherenslängden l_s hos ljuset som träffar gardinen är minst av storleksordningen 1mm ."

(d)



(egentligen placeras färgfiltret efter gardinen, men det spelar ingen roll eftersom dess enda uppgift är att ta bort icke-grönt ljus)

Spatiella koherenslängden bestäms av ljuskällans (strålkastarens) utbredning D och avståndet L . Ju mindre utbredning desto större koherenslängd. Eftersom koherenslängden är *minst* $l_{s,min} = 1\text{mm}$ är utbredningen hos källan *högst* D_{max} , där D_{max} ges av tumregeln för spatiell koherenslängd,

$$l_{s,min} \approx \frac{\lambda}{D_{max}} L$$

(den som önskar kan ha t.ex. en faktor 1.22 framför kvoten, vilket "gäller" för en cirkulär ljuskälla med konstant "ljushet" över hela ytan, och en exakt – men godtyckligt vald – definition av spatiell koherenslängd vid gardinen). Vi får

$$D_{max} \approx \frac{\lambda}{l_{s,min}} L = \frac{550\text{ nm}}{1\text{ mm}} 266.14\text{ m} \approx 15\text{ cm (!)}$$

vilket åtminstone jag tycker låter anmärkningsvärt lite. Nu kan ju dessa tumregler (och vårt magkänsla-resonemang) säkert slå fel på en faktor 2 eller så, men vi borde i alla fall kunna dra slutsatsen enligt uppgiftsformuleringen

"Strålkastarens ljusutsändande yta har en utbredning som är högst 0.2 till 0.3 meter".

Strikt gäller detta ljuskällans utbredning i vertikalled, eftersom den bygger på en uppskattning av koherenslängden i just vertikalled, som figuren ovan visar.