

Tentamen i Optik FFY091

Tisdag 19 mars 2019, kl. 14:00-18:00

Examinator och jourhavande lärare Jörgen Bengtsson, tel. 031-772 1591, **finns på plats ca kl 15 och 17** för att svara på frågor. För betyg 3, 4, 5 krävs 30, 40 resp. 50 p, inkl. bonus, av max 60 p, se vidare Kursinformation på kurshemsidan. På kurshemsidan publiceras även lösningsförslag efter tentan. Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail.

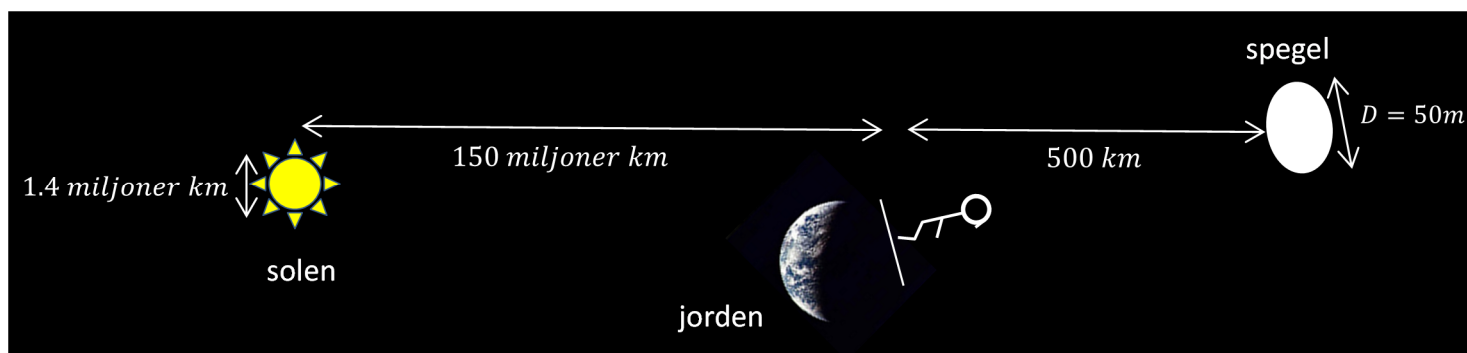
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera mycket kortfattat dina steg – använd gärna enkla skisser, så behövs ofta inga fler ord!
- Gör egna rimliga antaganden där det behövs.

1. En före detta kursdeltagare tipsade om...

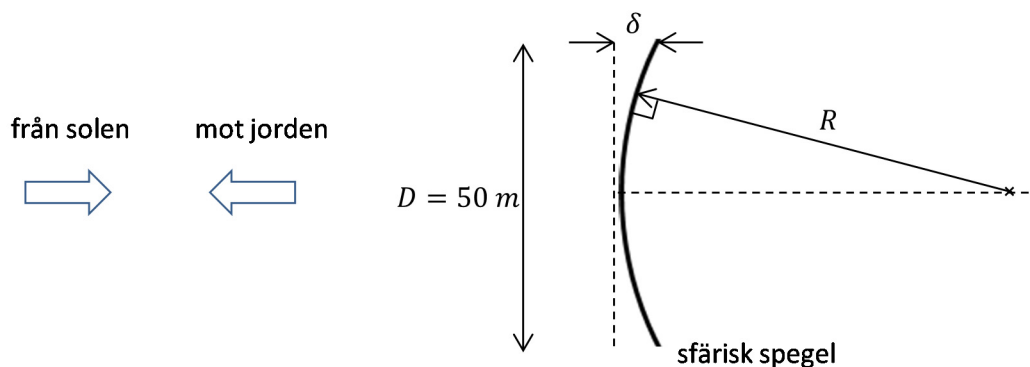


... en artikel i tidningen *China Daily* om att Kina tänker skjuta upp en satellit som ska kretsa 500 km ovanför jordytan och vara försedd med en stor spegel. Spegeln ska reflektera solljus ner till storstaden Chengdu på natten så att gatlyktorna inte behöver vara tända.



Inga data anges för spegeln men vi antar här att den är cirkulär med diametern $D = 50$ meter. Antag vidare att den speglade ytan är perfekt, det vill säga 100% reflekterande och helt fri från mikroskopiska ojämnheter. För att förenkla, antag också att solen-spegeln-Chengdu ligger på nästan rät linje och att spegeln befinner sig rakt ovanför Chengdu, som figuren ovan visar.

(a) Enligt *China Daily* ska satelliten lysa upp ett område på jordytan med en diameter av cirka 30 km. Visa att detta är omöjligt, om spegeln är perfekt plan! (4p)



(b) Antag istället att spegeln har en svagt sfärisk, konvex, krökt yta, som i figuren ovan. Finns det någon krökningsradie R på spegeln som ger ett belyst område på jorden med den önskade storleken (alltså cirka 30 km diameter)?

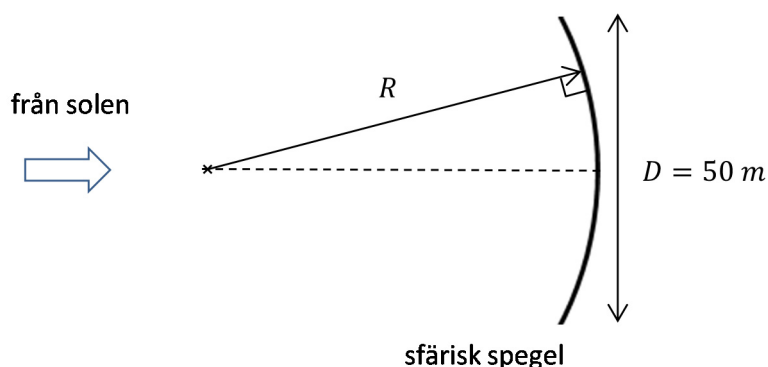
I så fall, vad motsvarar den krökningen för avvikelse δ från plan spegel vid spegelns kant (anges i centimeter)? (5p)

Ledning 1: Alla diffraktionseffekter är helt försumbara.

Ledning 2, teckenkonvention: Eftersom krökningscentrum ligger till höger om spegelytan, medan den var till vänster om spegeln i våra härledningar, är det $(-R)$ som ska användas som krökningsradie vid konvertering mellan krökningsradie och fokallängd.

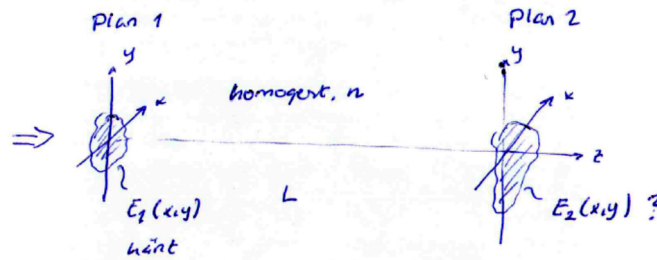
(c) Enligt *China Daily* ska ljuset från satelliten vara åtta gånger starkare än ljuset från fullmånen, för en observatör i Chengdu. Är det rimligt (korrekt storleksordning), om vi antar att spegeln verkligen ger ett belyst område med cirka 30 km diameter på jorden? (2p)

Ledning: Använd den folkliga tumregeln att för en jordisk betraktare är solljus cirka en halv miljon gånger starkare än ljuset från fullmånen.



(d) Man kan misstänka att USAs president Donald Trump (som ej gått Optik F2) är lite orolig för att spegeln kan användas som vapen, under förutsättning att dess krökning kan ändras så att spegeln blir konkav, som visas i figuren ovan. Vad är ditt besked till den amerikanske presidenten – finns det någon krökningsradie R för vilken spegeln kan vara farlig? (3p)

2. Korta frågor – ännu kortare svar!



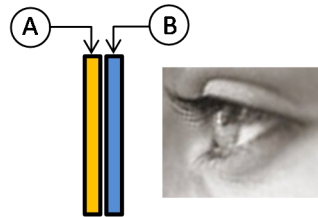
Propagationsmetoden PAS innehåller tre huvudsteg för att beräkna fältet i Plan 2 från fältet i Plan 1. I PAS-skelettet som medföljde HUPP 1 motsvarades dessa steg av matlab-raderna

(Steg 1) $A = \dots *fft2c(\dots);$

(Steg 2) $B = A.*fasfaktor_propagation;$

(Steg 3) $E2 = \dots *ifft2c(\dots);$

(a) Förklara genom att använda begreppet "plan våg" vad dessa tre huvudsteg innebär. Svara med en kort mening för varje steg. (2p)



För att kolla 3D-film på bio används speciella glasögon. "Glasen" i dessa består av två optiska komponenter i form av tunna skivor som limmats ihop.

(b) Vilka är de två optiska komponenterna? (1p)

(c) Antag att man känner till vilka de två optiska komponenterna i fråga (b) är, men har glömt vilken som är närmast filmduken (position A i skissen ovan) och vilken som är närmast ögat (position B). Hur kan man resonera för att lista ut det? Flera sätt att resonera är möjliga. Var kortfattad, du får utnyttja alla egenskaper du känner till om de två komponenterna utan att behöva bevisa dem. (2p)



En "Michelson stellar interferometer" används för att bestämma diametern hos stjärnor.

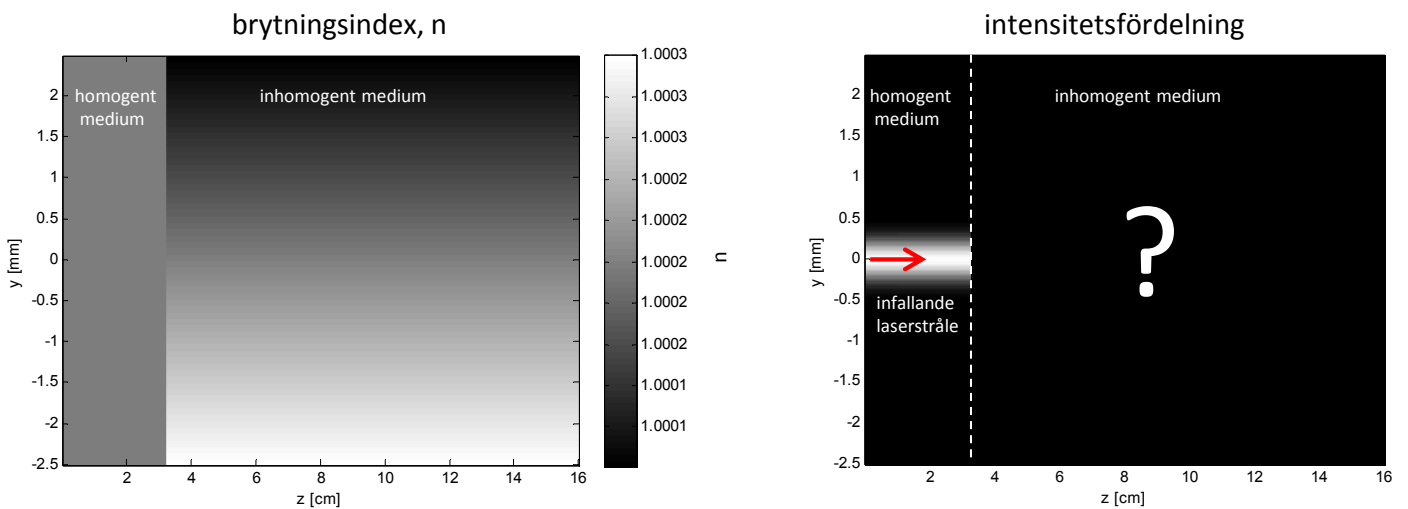
(d) Skissa (med strålar) mycket grovt hur ljuset propagerar i en Michelson stellar interferometer. Du behöver inte förklara några ingående komponenter, så inga ord behövs. (1p)

(e) Intensitetsfördelningen i observationsplanet (på detektorn) har en tendens att bli randig. Vad i strålgångens geometri inuti interferometern är det som gör att just detta mönster uppstår (behöver inte motiveras)? (1p)

(f) Det kan hända att randmönstret blir otydligt (d.v.s. endast en liten skillnad i kontrast mellan ljusare och mörkare ränder) för den *instantana* intensitetsfördelningen i observationsplanet, alltså i ett visst ögonblick. Vad beror det på? (2p)

(g) I praktiken är det alltid *tidsmedelvärdet* som observeras. Om det tidsmedelvärdesbildade randmönstret är otydligt, vad beror detta på och vad säger det om ljuset från stjärnan? (2p)

Svara med 2 korta meningar. Markera i din skiss från uppgift (d) om du vill!

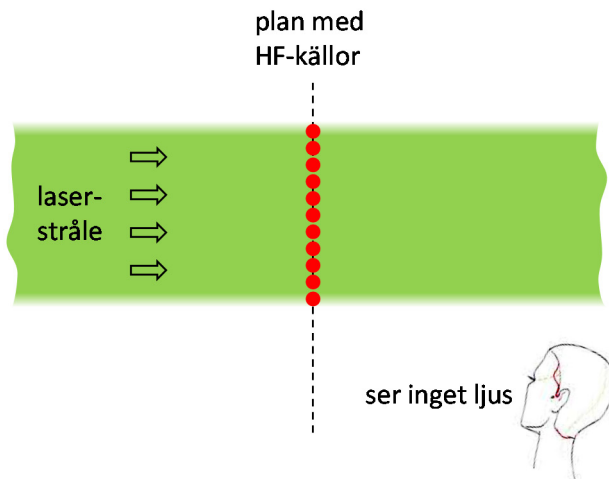


En infallande laserstråle propagerar en sträcka i ett inhomogent medium, vars brytningsindex varierar mycket svagt i rummet, som visas i figuren ovan till vänster. Antag att propagationen därför avviker märkbart från hur strålen skulle propagera om mediet vore homogent.

(h) Skissa grovt hur propagationen skulle kunna se ut i det inhomogena mediet, och motivera med några få ord. (2p)

Enligt Huygens-Fresnels (HFs) princip kan man sätta in ett plan med HF-källor var som helst i en laserstråle. HF-källorna kan tänkas skapa fältet till höger om planet. En HF-källa är en punktkälla som sänder ut ljus i alla riktningar.

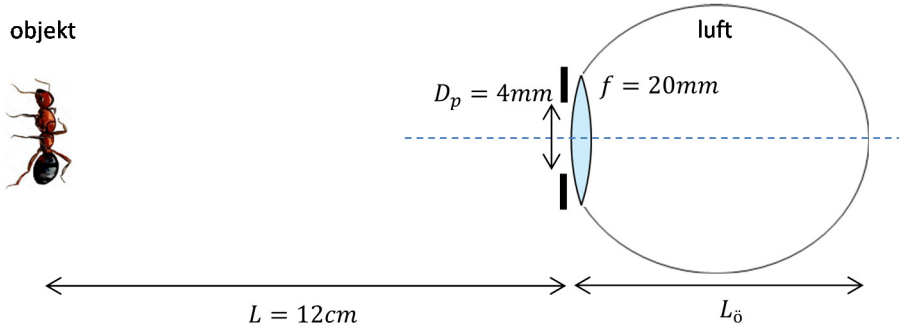
(i) Så varför kan man trots det inte se en laserstråle (utom i Hollywoodproduktioner)? (2p)



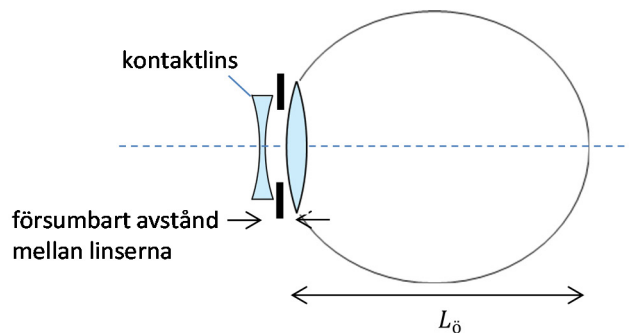
3. Duellen: Kontaktlinser mot glasögon



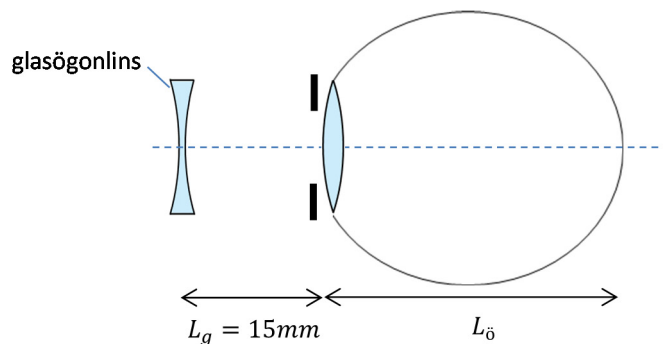
En kraftigt närsynt person ser som skarpast när objektet befinner sig $L=12\text{ cm}$ framför ögat. Personen är så pass gammal att ögonlinsen (fokallängd $f = 20\text{ mm}$) inte längre har förmågan att ändra sin styrka. Även pupilldiametern $D_p = 4\text{ mm}$ antas vara konstant i denna uppgift.



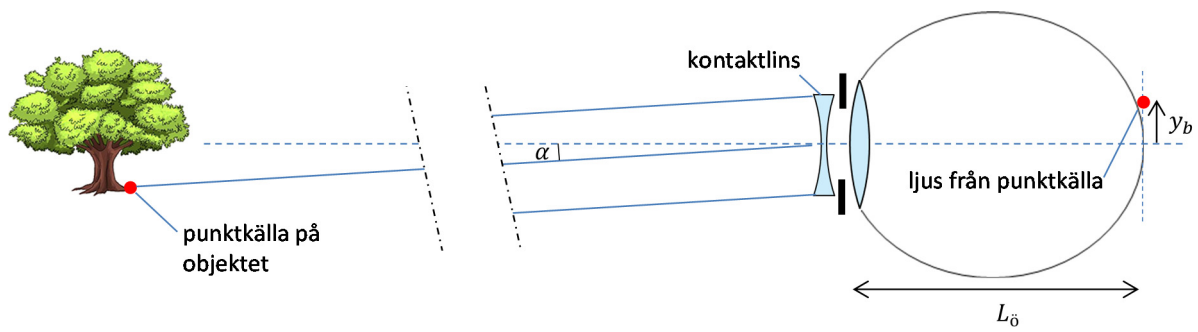
(a) Personen har ögon enligt kursens ögonmodell (förutom att $L_ö$ är ovanligt stor, p.g.a. att personen är närsynt). Vad är ögats längd, $L_ö$, alltså avståndet från ögonlins till näthinna? (1p)



(b) Antag att personen skaffar kontaktlinser. Vilken styrka (uttryckt i dioptrier) ska kontaktlinsen ha för att personen ska se optimalt skarpt på långa avstånd (d.v.s. avlägsna föremål uppfattas som optimalt tydliga)? Antag att avståndet mellan kontaktlin och ögonlins är försumbart litet. (2p)



(c) Samma fråga som i (b), men om personen istället skaffar glasögon: Vilken styrka (i dioptrier) ska glasögonlinsen ha för att personen ska se skarpt på långt håll? Antag att när man bär glasögon är glasögonlinsen positionerad $L_g = 15\text{ mm}$ framför ögat. (2p)



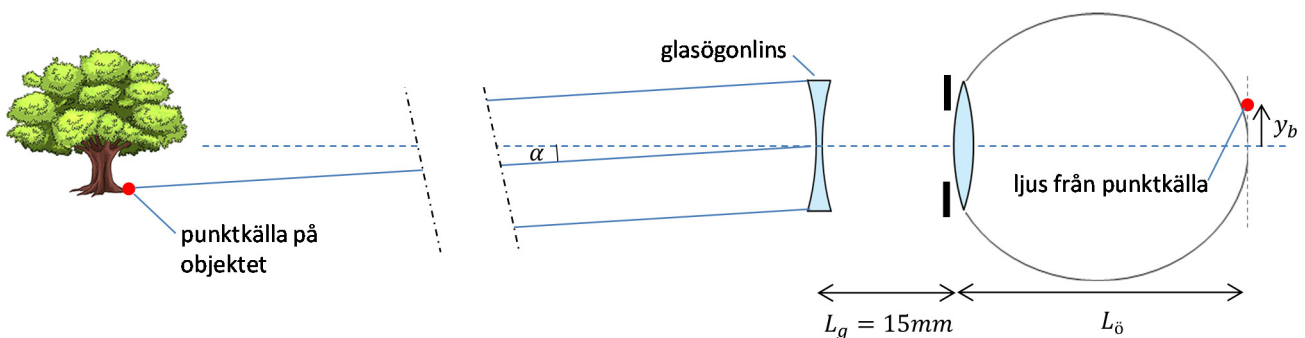
(d) Låt ljuset från en avlägsen punktkälla falla in med den lilla vinkeln α mot ögat med kontaktlinsen vars styrka du bestämde i uppgift (b). Skissa ett stråldiagram där du indikerar "källa" (K) och "fokus" (F) för ljuspassagen genom de två linserna. Använd beteckningarna K_1, F_1 för passagen genom den första linsen och K_2, F_2 för den andra.

Ange dessutom avvikelser y_b från origo på näthinnan för ljusblaffan från punktkällan. Ange sambandet på formen

$$y_b[\text{mm}] = \text{const} \cdot \alpha[^\circ]$$

där [...] anger dimensionen för den storhet som står framför. Antag för enkelhets skull att näthinnan är plan. (3p)

Ledning: Härled först sambandet med SI-enheter (meter och radianer), och konvertera på slutet.

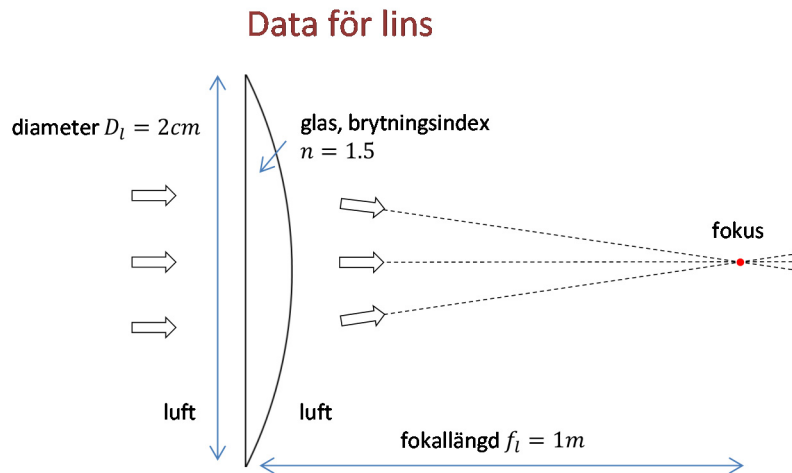


(e) Gör samma sak som i uppgift (d) fast för fallet med glasögonlinsen vars styrka du bestämde i (c). (3p)

(f) Om konstanten const har ett annat värde i uppgift (e) jämfört med uppgift (d), påverkar detta hur personen visuellt uppfattar omvärlden? Så vad är bäst, glasögon eller kontaktlinser? (1p)

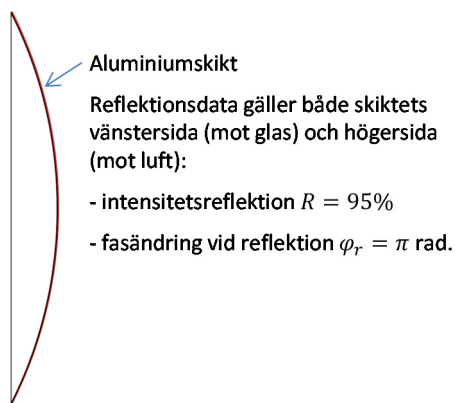
4. Fokuserande lins blir fokuserande spegel

En tunn optisk komponent i form av en plankonvex sfärisk lins har följande data,

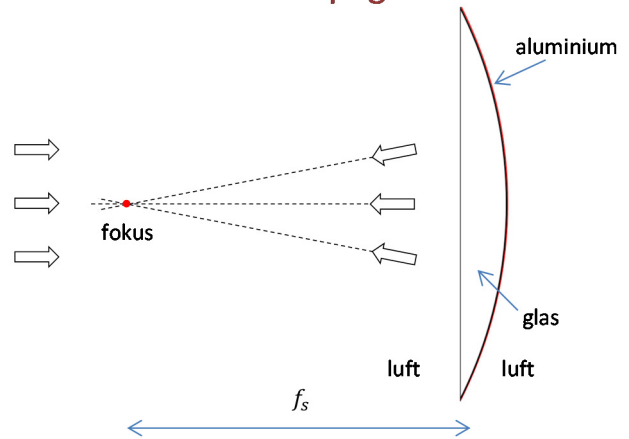


Den buktiga ytan beläggs med ett tunt, jämnt skikt av aluminium, se dess reflektionsdata nedan till vänster. Vid belysning från vänster fungerar nu komponenten som en fokuserande spegel.

Data för reflekterande skikt



Fokuserande spegel



(a) Vad blir fokallängden f_s för spegeln? Använd TOK-modellen! Ljusutbredningen kan antas vara paraxiell. (5p)

(b) Antag att en parallell laserstråle (indikerad med tre pilar i figurerna) infaller från vänster mot linsen respektive spegeln. Blir intensiteten i fokus från spegeln

- minst en storleksordning lägre,
- av samma storleksordning, eller
- minst en storleksordning högre

än intensiteten i fokus från linsen? Den infallande laserstrålen är identisk i de två fallen. (3p)

5. Sagan om ringen – en bluff??

Den före detta kursdeltagaren Erik tipsade om följande optikrelaterade stycke ur bokserien *Sagan om ringen* (*The Lord of the Rings*) av J.R.R. Tolkien:

Är du ointresserad av litteratur? Gå direkt hit!

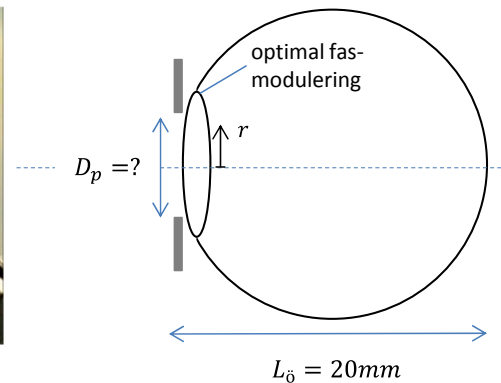
"Yes," said Legolas, "there are one hundred and five [riders]. **Yellow is their hair, and bright are their spears. Their leader is very tall.**"
 Aragorn smiled. "Keen are the eyes of the Elves," he said.
 "Nay! **The riders are little more than five leagues distant,**" said Legolas.

Alven Legolas påstår alltså att hen kan urskilja ryttarnas huvuden (och hårfärg) på ett avstånd av 5 leagues (cirka 25 km). Som framgår av bilden nedan på Legolas liknar hen en människa, så vi kan anta att hens ögon har samma längd, $L_{\text{ö}}$, som en människas och ser samma färger. Även ryttarna kan antas likna människor till storlek och utseende.

Legolas, en livs levande alv



Legolas öga



(a) Uppskatta grovt vilken pupillstorlek, D_p , Legolas måste ha, om hen ska kunna urskilja huvudet på en ryttare (suddigt) på 25 km avstånd! Är *Sagan om ringen* en bluff?

Antag att linsens fasmodulering är optimal, att linsens diameter är minst lika stor som pupillens, och att paraxiella approximationer alltid gäller! (5p)

(b) Ögonlinsens fasmodulering är alltså "optimal" för att avbilda ryttarna. Ut till vilken radie r på linsen skulle det vanliga, paraxiella, uttrycket för linsens fasmodulering,

$$\varphi_{\text{lins},p}(r) = -k \frac{r^2}{2f}$$

fungera tillräckligt bra för den optimala linsen? Gör en grov uppskattning – handlar det om att r maximalt får vara av storleksordningen 0.1 mm, 1 mm, 1 cm, 1 dm, ...? Antag för enkelhets skull att ryttarna befinner sig oändligt långt bort, så att $f = L_{\text{ö}}$. (5p)

(c) Vad kallas det fel i fokuseringen på näthinnan som hade uppstått om Legolas ögonlins haft en fasmodulering som var lika med $\varphi_{\text{lins},p}(r)$ för hela linsen, alltså för alla värden på r ? (1p)

Ledning: Vi observerade ett sådant fokuseringsfel när vi studerade ett teleskop som snurrar runt planeten Mars. Det sökta begreppet består av två ord. Ett exempel på två ord är "svärdfisk abborre".



--- SLUT PÅ TENTAN ---

Tentamen i Optik FFY091

Tisdag 19 mars 2019, kl. 14:00-18:00

Diskussion och lösningsförslag

1. En före detta kursdeltagare tipsade om...

BONUSINFO

För dig som är intresserad av hur inspirationen till tentauppgifter kan uppstå kommer här bakgrunden till just denna uppgift. Det kom ett e-mail från en före detta kursdeltagare i höstas...

Fri 2018-10-19, 14:26

Jörgen Bengtsson

Hej,

Eftersom optikuppgifter på temat "solen i Rjukan" nu ändå redan nåt sin fulla potential är det nog dags för lite förnyelse. Därför vill jag bara säkerställa att du inte missar nyheten om Kinas senaste revolutionerande, miljövänliga nattbelysning; den artificiella månen! Ett, i mina ögon, praktexempel på en tentauppgift i FFY091.

Trevlig helg,

Jörgen



Man-made moon to shed light on Chengdu in 2020 - Chinadaily.com.cn

www.chinadaily.com.cn

Sagt och gjort! Och så här presenteras nyheten i det kinesiska kommunistpartiets engelskspråkiga propagandaorgan *China Daily*.

CHINADAILY 中国日报网 US EUROPE AFRICA ASIA 中文 双语 Français Sign in Subscribe

HOME CHINA WORLD BUSINESS LIFESTYLE CULTURE TRAVEL WATCHTHIS SPORTS OPINION REGIONAL FORUM NEWSPAPER MOBILE

China News Society Innovation HK/Taiwan/Macao Cover Story Photos Environment Health Military

• Home / China / Innovation

Man-made moon to shed light on Chengdu in 2020

By Zhang Zhihao | China Daily | Updated: 2018-10-19 08:18

China's space industry is preparing to launch the world's first artificial moon to help with urban illumination at night, a leading scientist said.

China plans to put an artificial moon in orbit above Chengdu, capital of Sichuan province, from the Xichang Satellite Launch Center in Sichuan by 2020. If the launch proves successful, three more such objects will be launched in 2022, Wu Chunfeng, head of Tian Fu New Area Science Society in Chengdu, told China Daily in an exclusive interview on Thursday.

The artificial moon will have a reflective coating that can deflect sunlight back to Earth, similar to how the moon shines, he said.

The man-made moon is essentially an illumination satellite designed to complement the moon at night, though it is predicted to be eight times brighter, the scientist added.

This is due to the object's planned orbit about 500 kilometers above Earth – much closer than the 380,000-km distance to the moon, Wu said.

Xi's Moments 学习时代

Xi: Step up China-Russia consensus

Advance poverty relief effort, president urges

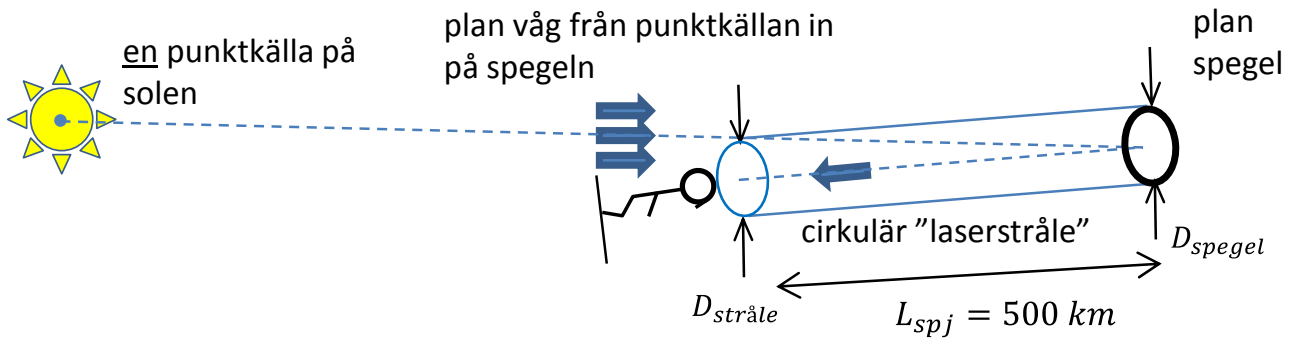
Latest

Man-made moon to shed light on Chengdu in 2020

Ten photos from across China: Oct 12-18

Den allvetande President Xi Jinping löser alla världens problem i sin egen kolumn.

(a) Liksom för alla föremål är solens yta är täckt med punktkällor som var och en sänder ut en sfärisk, laserliknande, våg. Men eftersom solen är en inkoherent ljuskälla, kommer ljus från olika källor inte att interferera med varandra, i tidsmedelvärderad mening, utan deras intensiteter kan summeras.



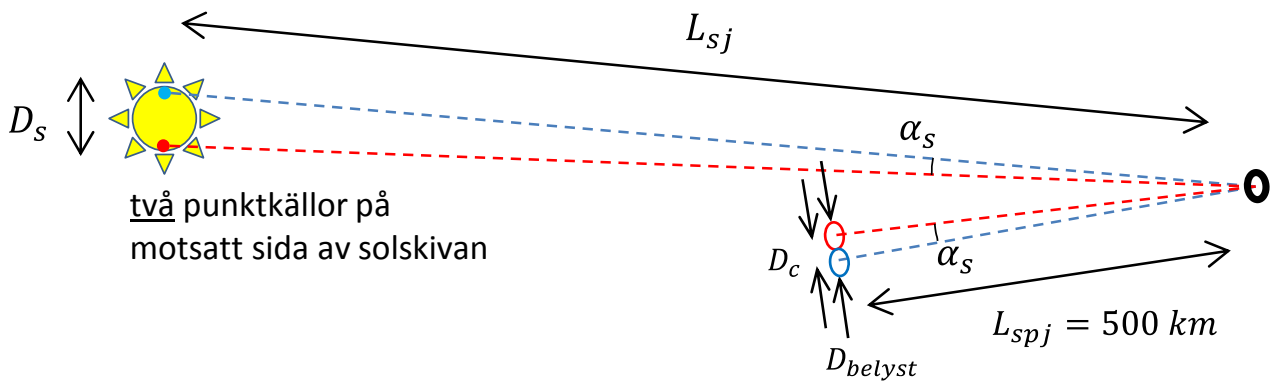
Vi börjar med att betrakta ljus från *en* punktkälla. När den sfäriska vågen från punktkällan når spegeln är den med mycket god approximation en plan våg över spegelns yta. Spegeln skär ut en cirkulär "laserstråle" med plana vågfronter och sänder mot jorden. Denna laserstråle har den gigantiska diametern $D_{spegel} = 50 \text{ m}$, och en sådan bred stråle har extremt liten divergens. Enligt vår tumregel har den, i fjärrfältet, divergensvinkeln

$$\theta_{div} \approx \frac{\lambda}{D_{start}} \approx \frac{500 \text{ nm}}{50 \text{ m}} = 10^{-8} \text{ rad}$$

Verkligen en mycket liten vinkel! I formeln är D_{start} fältets utbredning i planet där vågfronten är plan, alltså precis efter spegeln, $D_{start} = D_{spegel}$. På sträckan L_{spj} från spegeln till jorden breddas strålen endast

$$\approx \theta_{div} \cdot L_{spj} = 10^{-8} \text{ rad} \cdot 500 \text{ km} = 5 \text{ mm}$$

(och förmodligen ännu mindre i detta fall eftersom vi inte har kommit till fjärrfältet, och strålen därför inte börjat breddas linjärt med avståndet, vilket ovanstående beräkning antar). Vi ser att breddningen är helt försumbar – strålen ser i det närmaste exakt likadan ut som direkt efter spegeln, och har alltså konstant intensitet över det cirkulära tvärsnittet med diameter $D_{stråle} = D_{spegel} = 50 \text{ m}$.



Betraktar vi nu två punktkällor längst upp respektive längst ner på solskivans kant ger båda upphov till var sin laserstråle från spegeln, som ovan. Laserstrålarna är separerade med vinkeln

$$\alpha_s = \frac{D_s}{L_{sj}} = \frac{1.4 \text{ milj km}}{150 \text{ milj km}} \approx 0.01 \text{ rad}$$

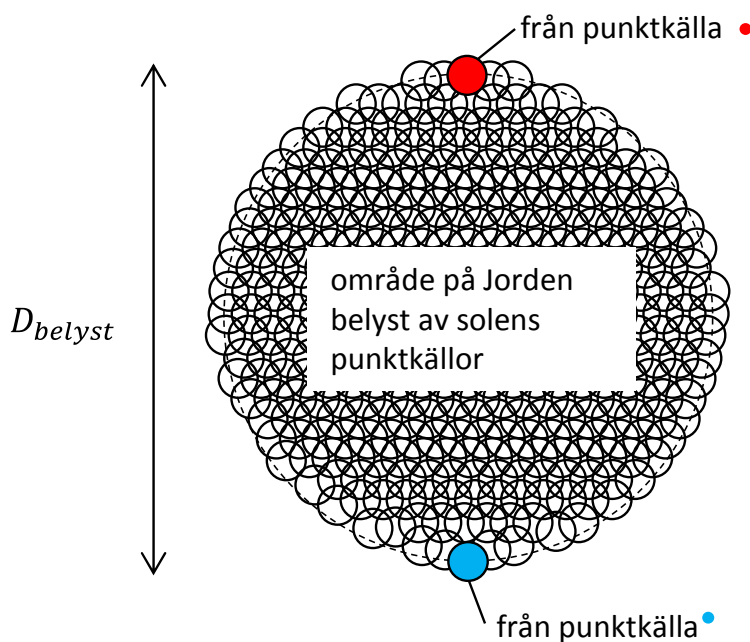
och alltså är deras centrumpunkter separerade med sträckan

$$D_c = \alpha_s \cdot L_{spj} = 0.01 \text{ rad} \cdot 500 \text{ km} = 5 \text{ km}$$

Den belysta ytans diameter, D_{belyst} , är något större än detta värde, eftersom det "yttersta" ljuset från vardera strålen hamnar sträckan $D_{stråle}/2$ längre ut än ljuset i strålens centrum,

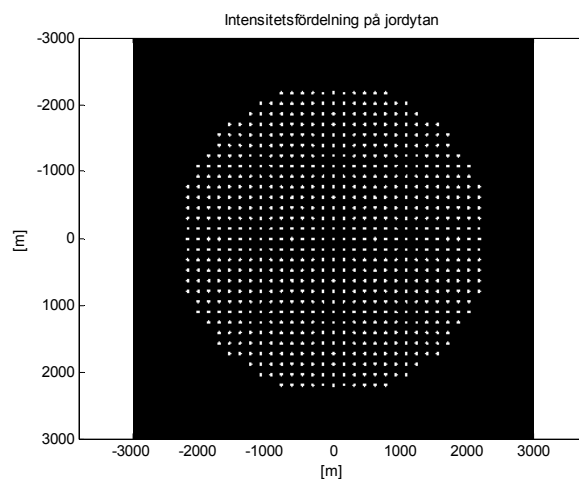
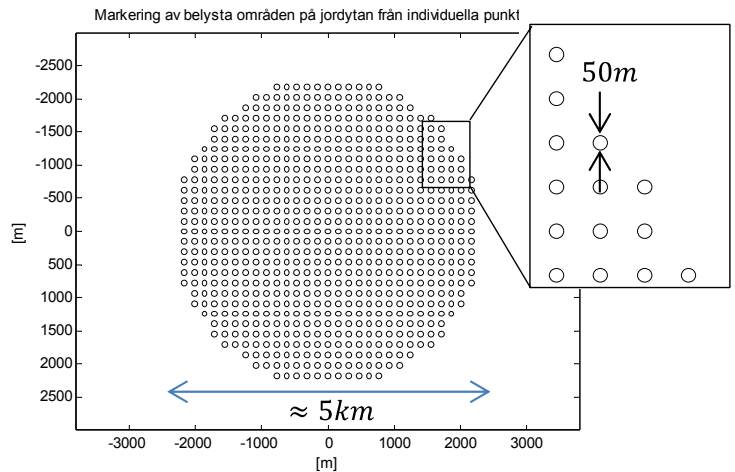
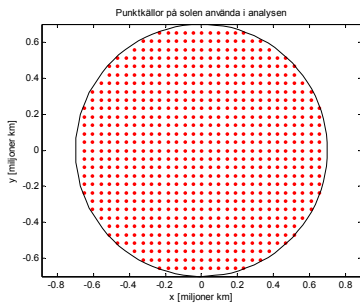
$$D_{belyst} = D_c + D_{stråle}/2 + D_{stråle}/2 = 5 \text{ km} + 50 \text{ m}/2 + 50 \text{ m}/2 \approx 5 \text{ km}$$

I detta fall är alltså strålen från varje källa så smal att det i praktiken är solens ändliga utbredning som bestämmer storleken på det belysta området, som alltså får en utsträckning av cirka 5 km. Eftersom målet med spegeln var att belysa ett område med utsträckningen 30 km ser vi att *det inte fungerar med en plan spegel*.



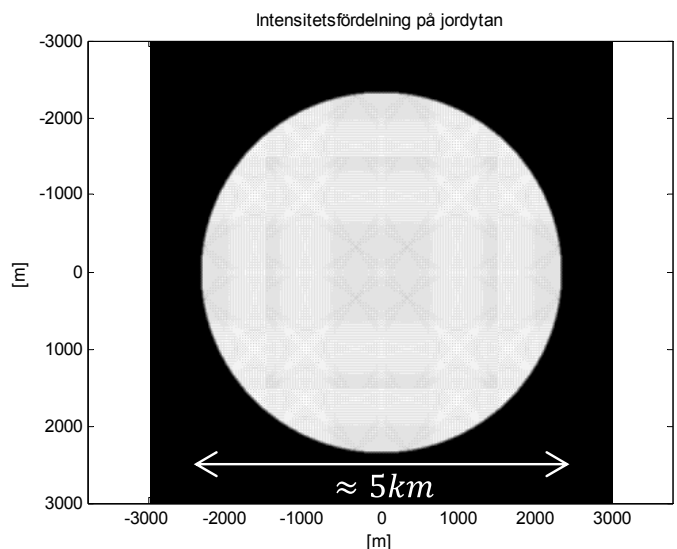
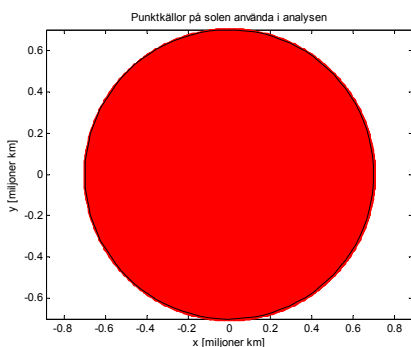
Vi kan naturligtvis också simulera i Matlab, med hjälp av funktionen `xy_source` från HUPP 4, som placerar ut punktkällor på en stjärna (här: solen). Sedan beräknas var på jordytan det belysta området från varje punktkälla hamnar. Det belysta området är en cirkel med diametern 50 m. Detta område är så litet att det krävs fler punktkällor på solen är de vi använt (697 st, närmare bestämt) för att cirklarna på jordytan ska börja överlappa.

697 punktkällor på solen

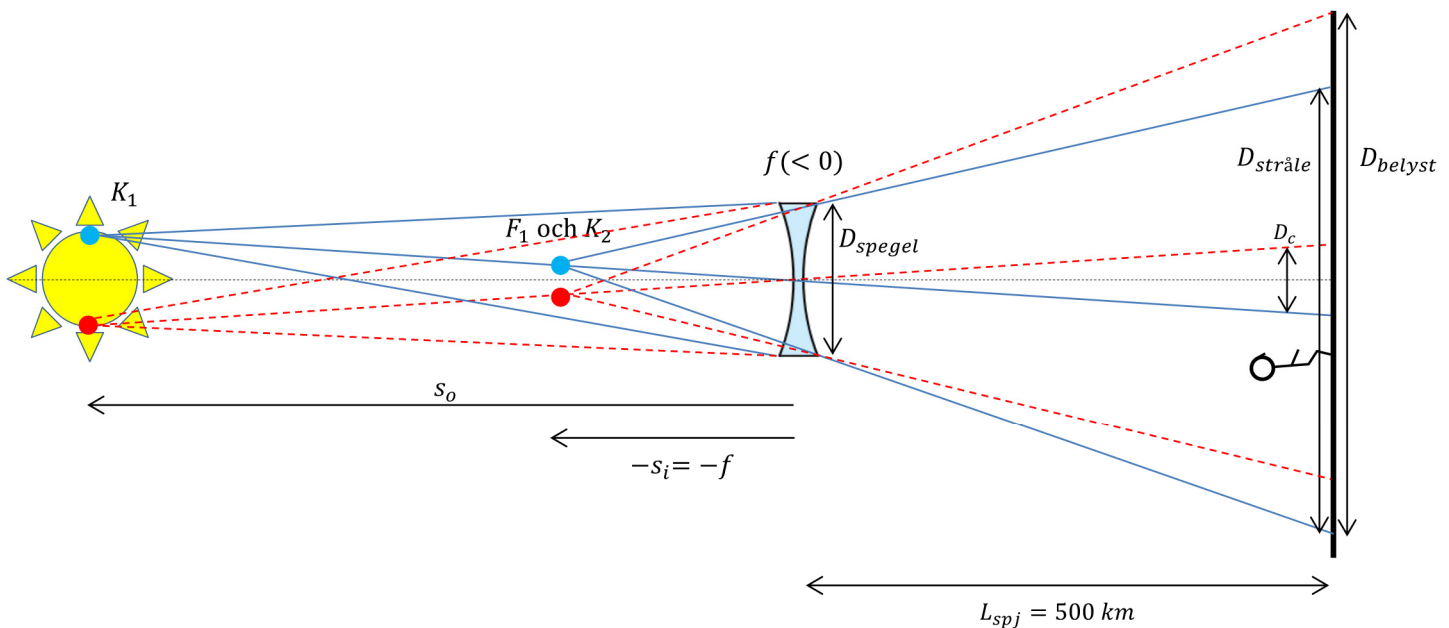


Med extremt många punktkällor i nedanstående simulering fås hyfsat överlapp och nästan jämn intensitetsfördelning, men ett svagt mönster kan fortfarande skönjas i det som ska vara jämnt "vitt":

125609 punktkällor på solen!



(b) Vi använder oss av geometrisk optik. Vi ersätter den konkava spegeln med en negativ lins med samma (än så länge okända) fokallängd. Vi betraktar den blå punktkällan (K_1) på solen:



Eftersom linsen är negativ kommer den att göra de infallande (i praktiken parallella) strålarna divergenta. Efter linsen ser det ut som om strålarna kommer från punkten F_1 . F_1 's avstånd från linsen fås av Gauss linslag

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{s_i} \Rightarrow s_i = f$$

där vi använt att solen är väldigt avlägsen. Eftersom $f < 0$ är även s_i negativ, vilket betyder att F_1 ligger till vänster om linsen (eftersom s_i räknas positiv åt höger). Mer exakt ligger alltså F_1 på avståndet $-f$ till vänster om linsen.

Eftersom laserstrålen nu divergerar efter linsen kommer strålens storlek vid jorden, $D_{stråle}$, att vara större än vid spegeln, D_{spegel} . Med likformiga trianglar fås

$$\frac{D_{stråle}}{D_{spegel}} = \frac{L_{spj} + (-f)}{(-f)} \Rightarrow D_{stråle} = \frac{L_{spj} + (-f)}{(-f)} D_{spegel}$$

Med konstruktionsregeln att "en stråle genom centrum av linsen bryts ej" fås att avståndet D_c mellan centrum punkten för ljuset från den blå källan och centrum punkten för ljuset från den röda källan blir samma som för fallet plan spegel, den beror inte på linsens/spegelns fokallängd. Alltså igen

$$D_c = \alpha_s \cdot L_{spj} = 5km$$

Den belysta ytans diameter, D_{belyst} , fås också av samma uttryck som för plan spegel

$$D_{belyst} = D_c + D_{stråle}/2 + D_{stråle}/2 = D_c + D_{stråle}$$

men med det nya uttrycket för $D_{stråle}$. Alltså

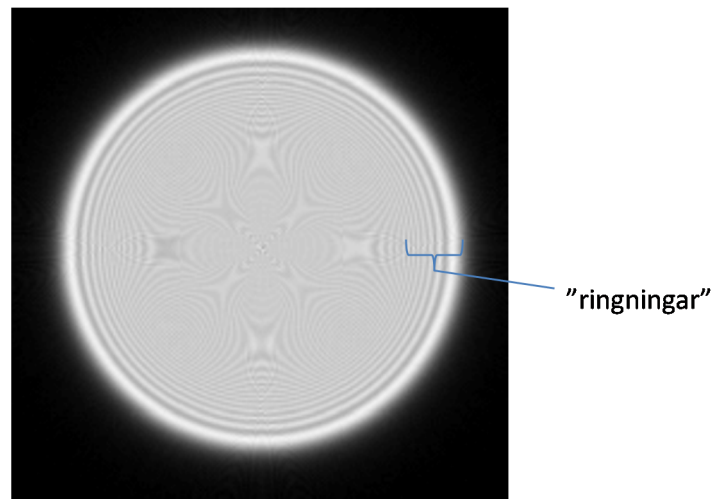
$$D_{belyst} = D_c + \frac{L_{spj} + (-f)}{(-f)} D_{spegel} = 5km + \frac{500km + (-f)}{(-f)} 50m = 30km$$

där den sista likheten kom av att vi ville belysa ett område med diametern 30 km enligt uppgift. Ur likheten kan vi nu lösa ut fokallängden f på spegeln/linsen som ger denna storlek på det belysta området,

$$f = -1002m \approx -1km$$

Vi ser att D_c lämnar ett ganska litet bidrag till D_{belyst} . I detta fall belyser varje punktkälla på solen ett 25 km stort cirkulärt område på jorden, och ljuset från de olika punktkällorna hamnar nästan rakt över varandra, med ett maximalt skift på 5 km.

Slutligen står det i ledningen till uppgiften att "Alla diffraktionseffekter är helt försumbara". Diffraktionseffekter skulle kunna uppstå hos ljuset från varje punktkälla (eftersom den sänder ut koherent, laserliknande ljus). T.ex. skulle man kanske erhålla de för laserljus typiska "ringningarna" i intensitet i kanten av det cirkulära området, där intensiteten går från hög till låg. Nedan visas ett exempel på ringningar för en helt annan geometri:

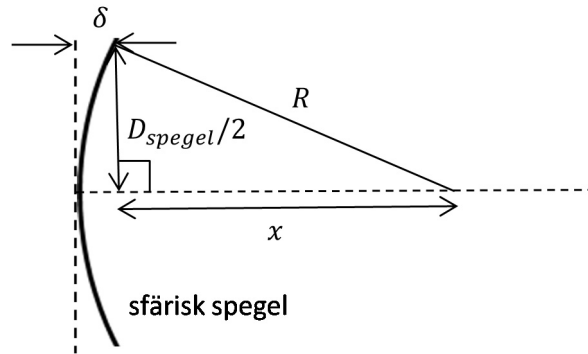


Men eftersom ett mycket stort antal lite förskjutna sådana intensitetsfördelningar ligger ovanpå varandra (en för varje punktkälla på solen) jämnas eventuella ringningar ut helt och hållet.

Krökningsradien på spegeln fås ur sambandet mellan fokallängd och krökningsradie för en sfärisk spegel

$$f = \frac{-R}{2} \Rightarrow R = -2f = -2(-1km) = 2km$$

Där minustecknet i formeln för f som funktion av R kommer av att krökningscentrum ligger *till höger om* spegelytan:



Vi ser att

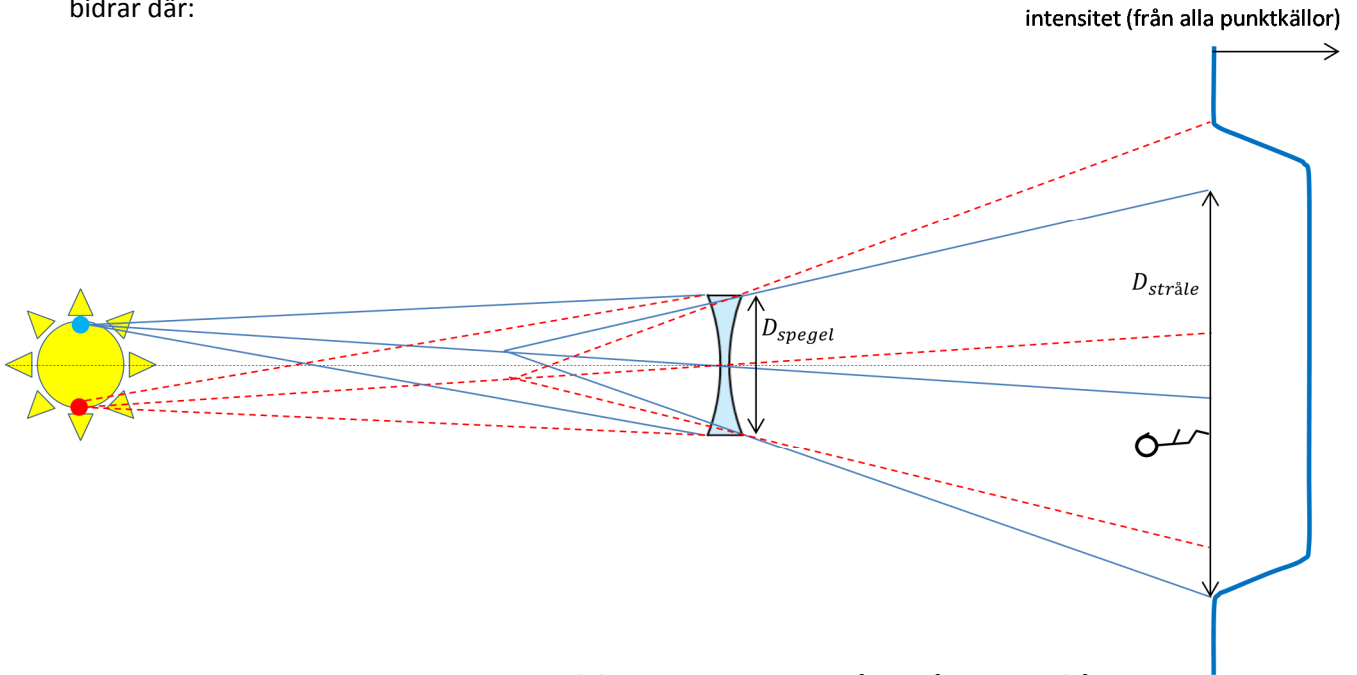
$$\delta + x = R \quad \text{där} \quad x = \sqrt{R^2 - (D_{\text{spegel}}/2)^2}$$

så att

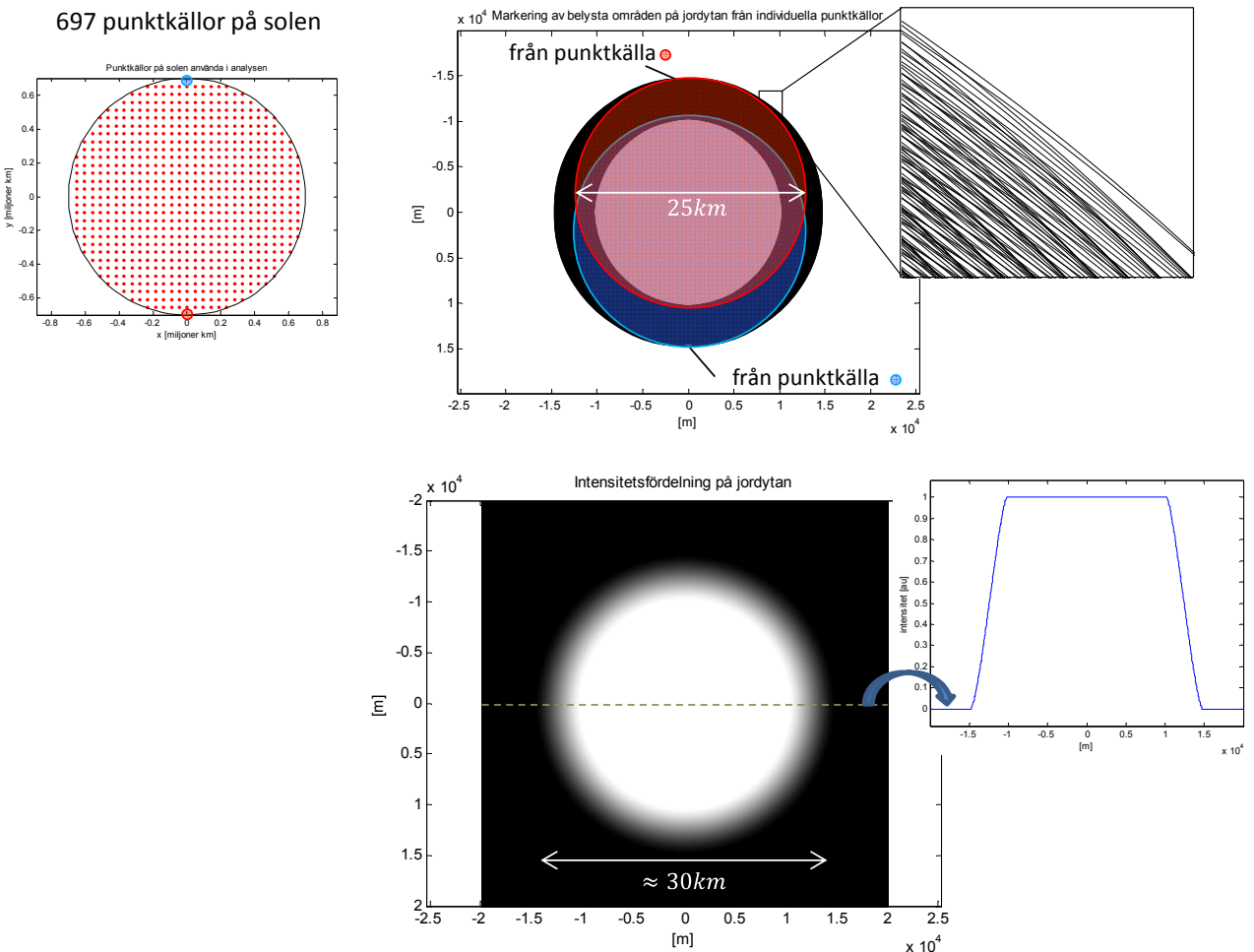
$$\begin{aligned} \delta &= R - \sqrt{R^2 - (D_{\text{spegel}}/2)^2} = 2km - \sqrt{(2km)^2 - (50m/2)^2} = \\ &= 2km \left(1 - \sqrt{1 - (50m/2km/2)^2}\right) = \text{paraxiellt} \approx 2km \left(1 - \left\{1 - \frac{1}{2}(50m/2km/2)^2\right\}\right) = \\ &= 2km \cdot \frac{1}{2}(50m/2km/2)^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{(50m)^2}{2km} = 16cm \end{aligned}$$

En fördjupning på 16 cm (\pm någon centimeter) över en cirkulär yta med 50 m diameter kräver kanske ingen extrem precision utan torde vara möjligt att fixa (?), även i rymden.

(c) Med en spegel som den i (b) kommer alltså ljuset från varje punktkälla att bli en stor blaffa med utbredningen $D_{stråle}=25$ km på jordenytan. Blafforna från olika punktkällor överlappar varandra nästan helt och hållet, det är bara i kanten av det belysta området, i ett ringformigt område med bredden 5 km som intensiteten gradvis avtar i radiell led eftersom inte alla punktkällor på solen bidrar där:



Eller simulerat med Matlab, som tidigare i (a), där det belysta området på jordytan från varje punktkälla nu är en stor cirkel med diametern 25 km. Det är så mycket att även med bara 697 punktkällor överlappar cirkelarna nästan helt varandra. Det gör att intensitetsfördelningen blir korrekt även med så här få källor:



Vi kan sålunda med god approximation anta att intensiteten är konstant i hela det belysta området. Eftersom effekten som faller in på spegeln, P_{spegel} , fördelas jämnt över det belysta området i Chengdu, med arean A_{belyst} , blir intensiteten där

$$I_{belyst} = \frac{P_{spegel}}{A_{belyst}} = \frac{I_{sol} \cdot A_{spegel}}{A_{belyst}} = \frac{I_{sol} \cdot \pi(D_{spegel})^2/4}{\pi(D_{belyst})^2/4}$$

där I_{sol} är solljusets intensitet på spegeln (samma som solljusets intensitet på jorden). Den folkliga tumregeln säger att

$$I_{sol} = 500000 \cdot I_{måne}$$

där $I_{måne}$ är intensiteten hos ljuset från månen, vid jorden, vid fullmåne. Vi får därför att intensiteten i Chengdu blir

$$I_{belyst} = \frac{500000 \cdot I_{måne} \cdot (D_{spegel})^2}{(D_{belyst})^2} = \frac{500000 \cdot (50m)^2}{(30km)^2} I_{måne} = 1.4 \cdot I_{måne}$$

Vi ser att med våra antaganden blir ljuset från satelliten snarast *lika starkt* som månljuset. Men låt säga att kineserna planerar för en 100 meter stor spegel, då blir I_{belyst} fyra gånger större och vi hamnar nära den ljusstyrka som hävdas i China Daily. Men det är ingen liten spegel...

Observera dock att upplevelsen av ljuset är helt annorlunda än månskenet, trots att det har nästan samma intensitet. Sett från jorden är spegeln mycket mindre än månen; spegeln upptar synvinkeln

$$\alpha_{spegel} = \frac{D_{spegel}}{L_{spj}} = \frac{50m}{500km} = 10^{-4} \text{ rad}$$

vilket är 100 gånger mindre (längdskala) än månens skenbara storlek. Spegeln uppfattas därför som en punkt (som en stjärna) som lyser extremt starkt och kastar en knivskarp skugga. Otäckt, skulle nog de flesta tycka!

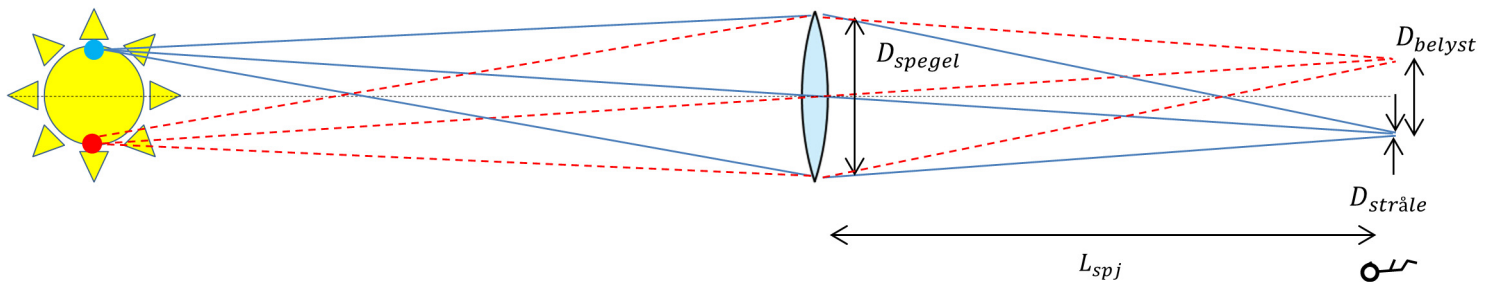
(d) Det "farligaste" som kan hända är om ljuset från varje punktkälla på solen fokuseras av spegeln till minsta möjliga ljusfläck på jordytan. Det kräver en konkav spegel, svarande mot en positiv lins. Vidare måste fokallängden f hos spegeln vara lika med avståndet L_{spj} från spegeln till jorden (infallande ljus från punktkällan på spegeln är, väsentligen, en plan våg även om det inte ser så ut i skissen). Det betyder att spegelns krökningsradie ska vara

$$R = 2f = 2 \cdot 500km = 1000km$$

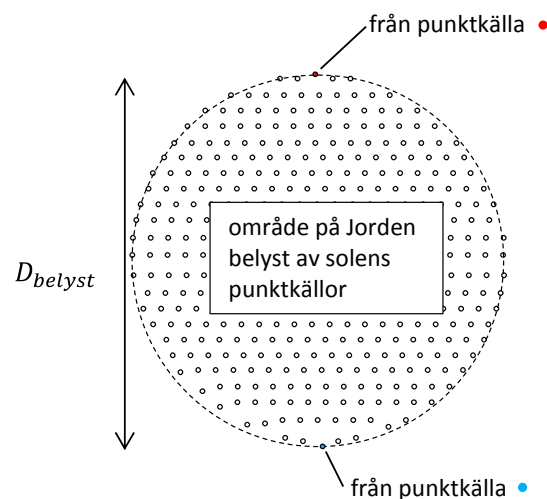
vilket är en synnerligen stor radie, vilket betyder att spegelns yta är nästan plan. Vi kan alltså förvänta oss ett liknande beteende som i (a)-uppgiften. Skillnaden är att ljuset från varje punktkälla blir mycket liten, eftersom den ges av tumregeln för spotsize (precis efter spegeln, Plan 1, är fältet optimalt fokuserat mot en punkt på jorden, Plan 2),

$$D_{stråle} = D_{spot} \approx \frac{\lambda}{D_{spegel}} L_{spj} \approx \frac{550nm}{50m} 500km = 5mm$$

där vi antagit en typisk våglängd (grön) för synligt solljus. Trots att spegeln är långt bort gör dess stora diameter att vi, teoretiskt, kan fokusera ner ljuset från en punkt på solen till en fläck på några millimeter (att detta i praktiken kräver en orealistiskt hög precision hos formen på ytan av jättespeglarna är en annan femma).



Men, och detta är det viktiga, vi kommer INTE att få speciellt hög intensitet på jordytan, eftersom olika punktkällor på solen fokuseras till olika platser. I själva verket liknar belysningen mycket den i uppgift (a), fast varje punktkälla ger en ännu skarpare ljusfläck:



(det belysta området på jorden blir inte prickigt, jag har bara inte orkat rita ut fler punktkällebidrag).

Hela det belysta områdets storlek D_{belyst} blir liksom tidigare

$$D_{belyst} = D_c + D_{stråle}$$

där D_c är separationen mellan mitten av ljusblaffan från den röda respektive blå punktkällan på solen. Den är oberoende av spegelns fokallängd (fås ur "stråle genom mitten av lins bryts ej") och är alltså även i detta fall $D_c = 5km$. I jämförelse är $D_{stråle}$ helt försumbar så

$$D_{belyst} = D_c = 5km$$

vilket också var fallet i (a). Solljuset in på spegeln fördelas alltså över en mycket större area på jorden, så ljuset blir *mycket* svagare än solljuset (med en faktor $(D_{belyst}/D_{spegel})^2 = (5km/50m)^2 = 10000$). Det är alltså helt ofarligt och Trump kan därmed återgå till sitt normala, harmoniska och avspända känsloläge.

Det kan noteras att eftersom varje punkt på solen ger nästan en punkt på jordytan har vi skapat en gigantisk avbildning av solen på jorden. Men som sagt, den är väldigt ljussvag.

2. Korta frågor – ännu kortare svar

(a) PAS – propagation of angular spectrum – bygger på uppdelning av fältet i plana vågor.

(Steg 1) Bestäm styrkan (amplitud och fas) hos de plana vågor i olika riktningar vars superposition (summa) utgör det kända fältet E_1 i Plan 1. Enligt Fourieranalys kan en sådan uppsättning plana vågor alltid hittas, oavsett vad fältet är i Plan 1, med hjälp av en fouriertransform (fft2c) av fältet. Numeriskt blir resultatet matrisen A, där det komplexa talet i varje matrisposition anger amplitud och fas (i origo) för en plan våg. Matrispositionen själv anger vilken riktning motsvarande plan våg har – ju längre från origo åt höger, till exempel, desto snedare går den plana vågen åt höger. A brukar kallas för fältet E_1 s planvågsspektrum eller vinkelspektrum.

(Steg 2) Steg 2 är att man propagerar varje plan våg (i planvågssuppdelningen) sträckan L till Plan 2. Med plana vågor är propagationen väldigt lätt: man multiplicerar bara varje plan våg med fasfaktorn $e^{jk_z L}$. Här är k_z vågvektorns z -komponent, och den är olika för de olika plana vågorna eftersom k_z är mindre ju snedare en plan våg rör sig. Det som i koden kallas `fasfaktor_propagation` är just faktorn $e^{jk_z L}$ för de olika plana vågorna. Matrisen B blir det sökta fältet E_2 s planvågsspektrum.

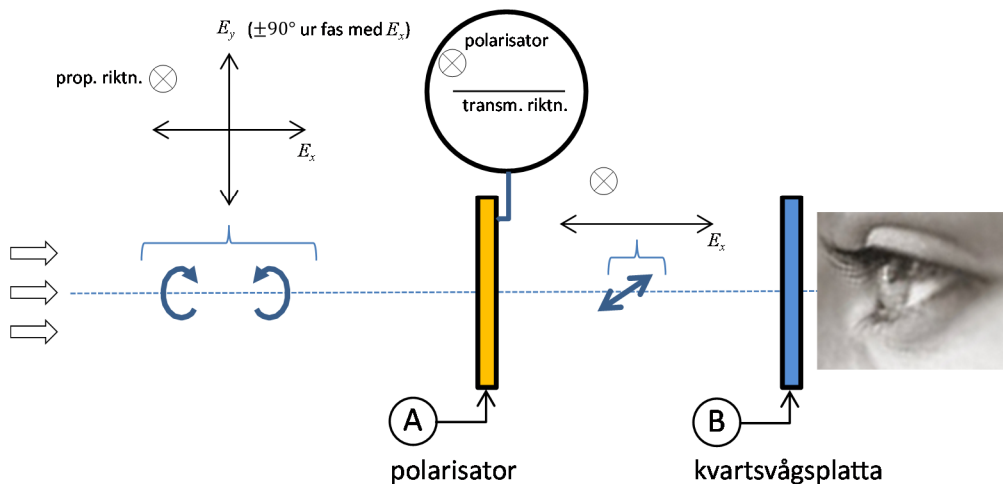
(Steg 3) Slutligen summeras de plana vågorna i Plan 2, så att man får det totala fältet E_2 . Man gör "inversen" till operationen i Steg 1: nu tar man planvågsspektrum (matris B) och beräknar fältet, vilket alltså i princip bara är en summering, som utförs effektivt med en invers fouriertransform (ifft2c).

(b) En polarisator och en kvartsvågsplatta.

(c) Man kan resonera på t.ex. ett av följande 3 sätt:

1. Låt oss anta (felaktigt, som det visar sig) att polarisatorn är den komponent som det cirkulärpolariserade fältet från biroduken infaller på:

OBS! Hypotes (som kommer visa sig vara felaktig!)

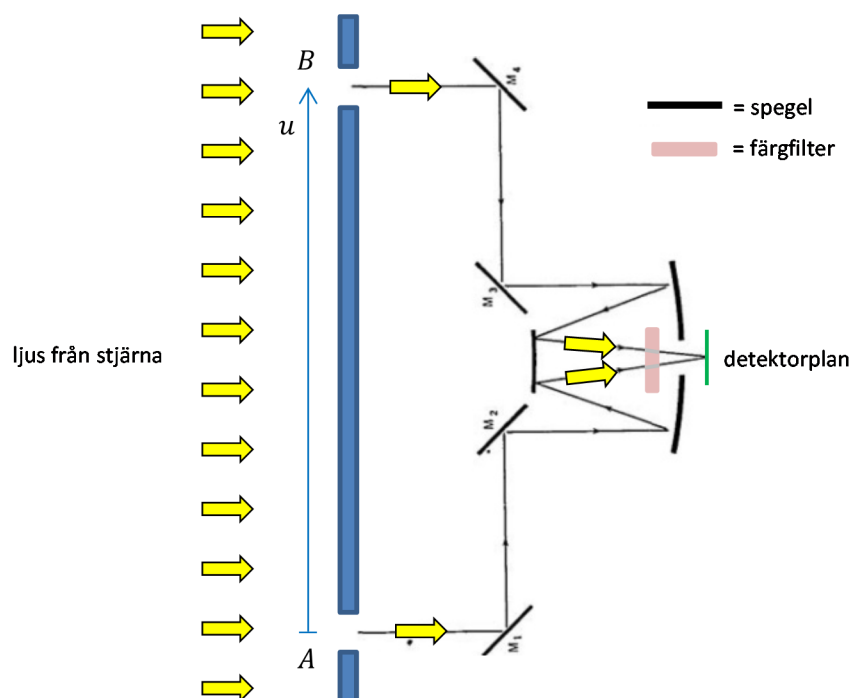


Oavsett hur polarisatorn är roterad har det infallande cirkulärpolariserade fältet en komponent längs polarisatorns transmissionsriktning. I figuren har vi godtyckligt valt att kalla polarisatorns transmissionsriktning för x -riktningen. Efter polarisatorn har vi alltså ett linjärpolariserat fält i x -led för båda rotationsriktningarna hos det cirkulärpolariserade ljuset. Det betyder att oavsett vilka komponenter som kommer efter polarisatorn (i detta fall en kvartsvågspatta) så kommer samma sak att hända oavsett rotationsriktningen hos det infallande ljuset. Den här anordningen kan alltså inte skilja på de två rotationsriktningarna, vilket ju är meningen med 3D glasögon. Alltså var vårt antagande om att polarisatorn var placerad framför kvartsvågspattan felaktigt.

2. Alternativt (under samma antagande att polarisatorn är i position A och kvartsvågspattan i position B) konstaterar vi att en kvartsvågspatta inte blockerar (absorberar) något ljus utan släpper igenom allt ljus som hamnar på den (endast fasen ändras). Eftersom syftet med 3D-glasögonen är att blockera ljus med viss polarisation måste den blockerande effekten i så fall ligga hos den första komponenten, och kvartsvågspattan är följaktligen onödig. Men ingen tillverkare av 3D-glasögon skulle ha med en onödig komponent! Så återigen följer att vårt antagande om att polarisatorn var placerad framför kvartsvågspattan är felaktigt.

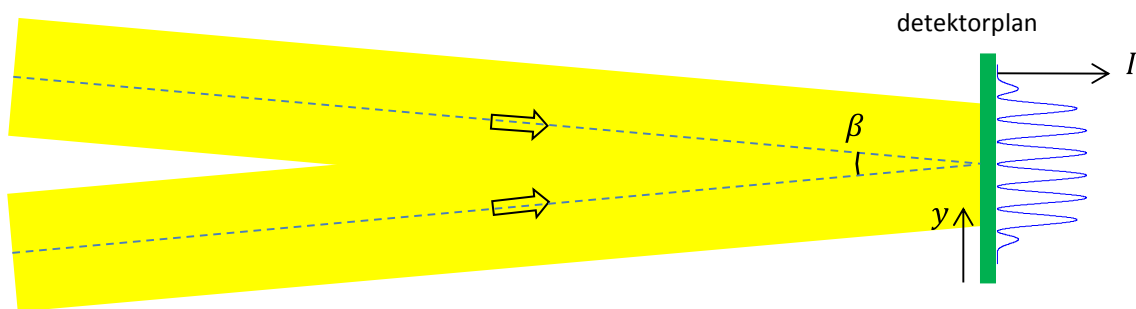
3. Givetvis kan man också göra rätt antagande: att kvartsvågspattan är första komponent. Från t.ex. Labb P kanske man vet att en kvartsvågspatta omvandlar cirkulärpolariserat ljus till linjärpolariserat $\pm 45^\circ$ från kvartsvågspattans eo-riktning, där plus eller minustecknet beror på rotationsriktningen hos det infallande cirkulärpolariserade ljuset. Sedan är det bara att linjera upp den efterföljande polarisatorns transmissionsriktning med $+45^\circ$ -riktningen eller -45° -riktningen (som ju är riktade 90° mot varandra) så att man transmittar ljuset från en av de ursprungligen cirkulärpolariserade rotationsriktningarna, samtidigt som man blockerar den andra.

(d) En Michelson stellar interferometer kan se lite olika ut, här har jag stulit en lite tjusigare skiss från nätet:



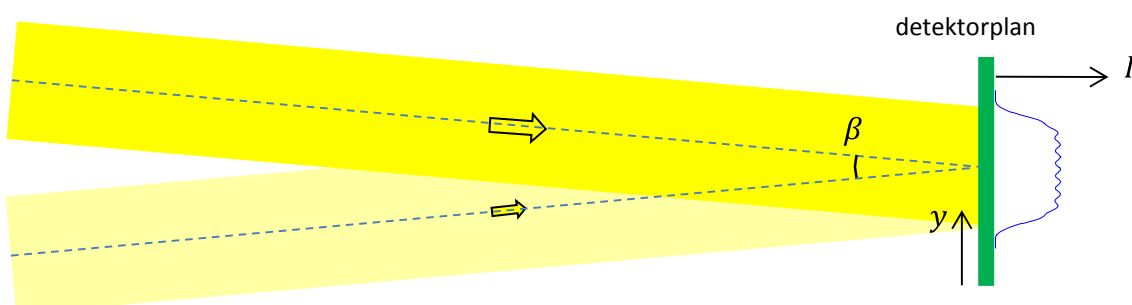
Interferometern ska analysera spatiella koherensen hos ljuset från en stjärna, eftersom det ger information om stjärnans storlek. Därför samlas ljuset från två olika positioner (A och B), tvärs ljusets utbredningsriktning, ihop i detektorplanet och dess interferens studeras.

(e) "Randigheten" uppkommer för att fälten in på detektorplanet infaller med en liten vinkel β mot varandra:

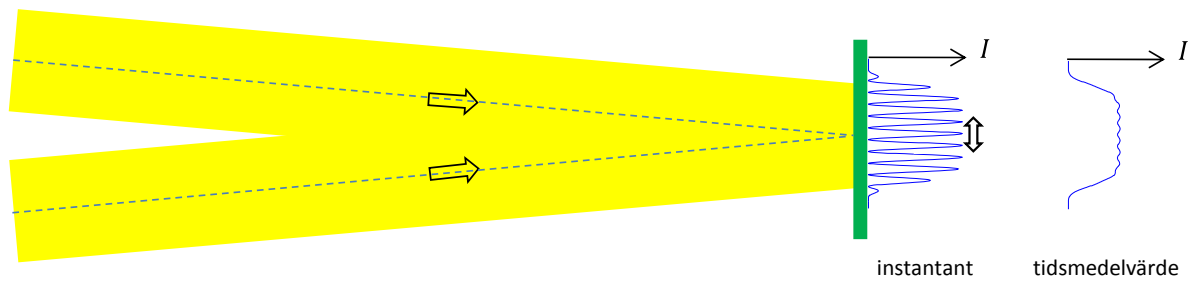


Detta kan inses om vi tänker oss att vi rör oss i y -led i detektorplanet. I någon position är de två fälten i fas, så att de interfererar konstruktivt, och vi har hög intensitet. Rör vi oss vidare i y -led ökar fasen hos det fält som hör ihop med den undre strålen eftersom vi rör oss i detta fälts utbredningsriktning (snett, men vi rör oss ändå medströms). Däremot minskar fasen hos det fält som hör ihop med den övre strålen eftersom vi rör oss mot detta fälts utbredningsriktning (snett, men ändå motströms). Därför kommer vi så småningom till en position där fälten är 180° ur fas, så att de interfererar destruktivt vilket ger låg intensitet. Går vi vidare i y -led kommer fasskillnaden så småningom bli 360° så att fälten är i fas igen, med hög intensitet, o.s.v. Vi får alltså ett randmönster med periodisk intensitetsvariation i y -led.

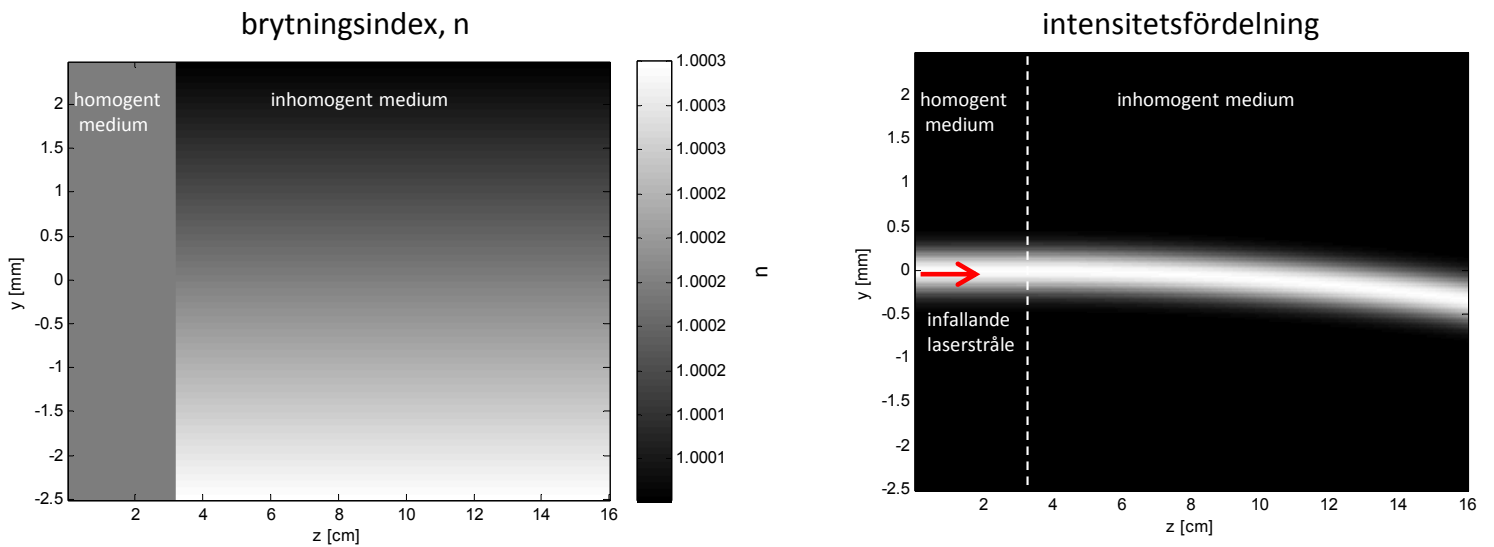
(f) De två fälten som möts i detektorplanet interfererar *alltid*, som alla fält. *Instantant* uppstår alltså alltid ett fullt utvecklat interferensmönster. Om det instantana randmönstret ändå blir otydligt, som sades i uppgiftstexten, måste det bero på att det ena fältet i detta ögonblick är betydligt svagare än det andra. Då har vi fortfarande positioner i y -led där det råder t.ex. destruktiv interferens (d.v.s. fälten är ur fas), men det svagare fältet förmår inte att "nolla" det starkare, utan vi har bara en mindre nedgång i ljusstyrka där:



(g) Ett otydligt randmönster i tidsmedelvärde tyder på att de två fälten som infaller på detektorn inte är speciellt koherenta med varann. En låg koherens innebär att fasskillnaden mellan fälten ändras mycket snabbt, så att det instantana interferensmönstret (de mestadels tydliga ränderna) tycks "vibrera" fram och tillbaka i y -led beroende på att positionerna med konstruktiv och destruktiv interferens ändrar läge när fasrelationen mellan de två fälten ändras. Den tidsmedelvärdade intensitetsfördelningen (som är det vi i praktiken observerar) blir utjämnad.

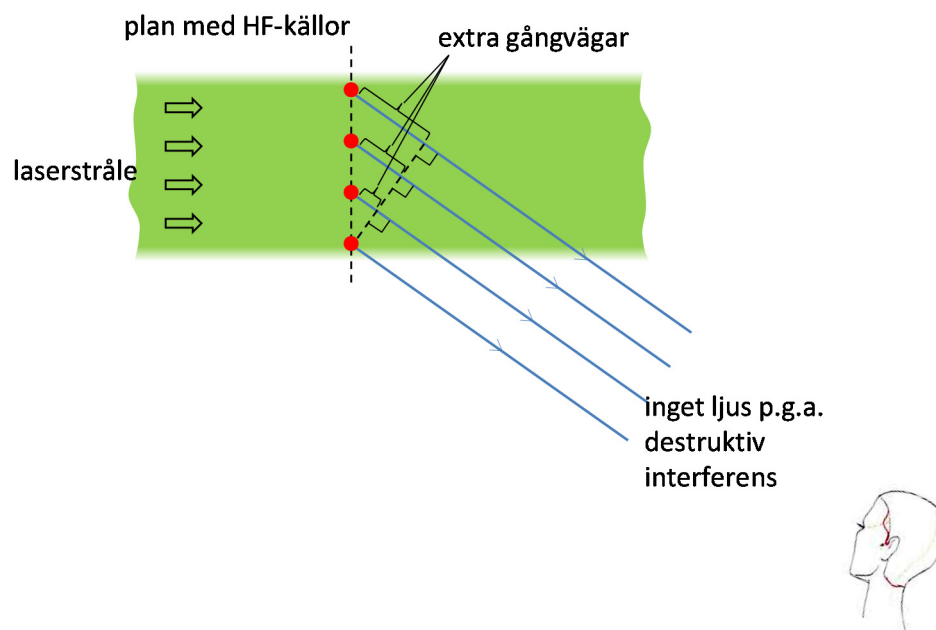


(h) Ljus som propagerar i ett inhomogent medium tenderar att "attraheras" av det högre brytningsindexet. I vårt fall ökar brytningsindex nedåt i bilden, och därför kommer laserstrålen att avlänkas nedåt:



(i) En laserstråle har nästan plana vågfronter, så enligt HF:s princip är HF-källorna i fas med varandra eftersom infallande fält har samma fas i hela planet. HF-källorna interfererar därför konstruktivt enbart i rakt-fram-riktningen och riktningar som ligger nära denna (d.v.s. inom den smala "kon" av ljus som ungefär begränsas av strålens divergensvinkel θ_{min}).

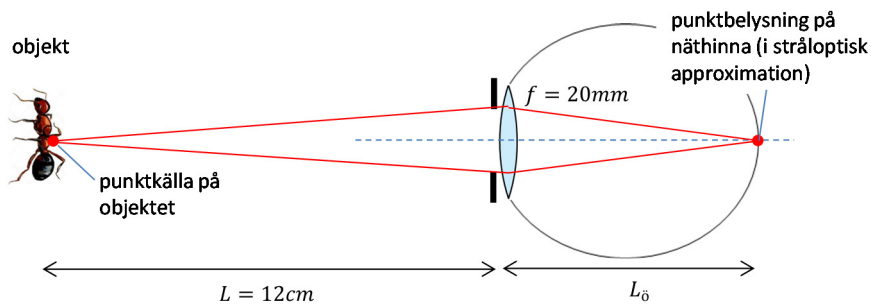
För större vinklar åt sidan har de olika HF-källorna signifikant olika gångväg till observatören:



På grund av de extra gångvägarna kommer fälten från olika HF-källor att ha olika fas när de kommer till observatören och därför interferera destruktivt. Observatören ser därför inte laserstrålen!

Detta kan jämföras med fallet då HF-källorna har en slumpmässig fasrelation, som när en laserstråle precis har reflekterats från projektorduken i FB-salen. Då finns det även riktigt sneda riktningar där HF-källorna råkar interferera svagt konstruktivt. Därför kan alla se den röda pricken på projektorduken oavsett var man sitter i FB-salen. Naturligtvis betyder detta också att det inte finns någon enda riktning i vilken alla HF-källor interfererar fullständigt konstruktivt – i så fall skulle vi ha en laserstråle med full styrka i den riktningen.

3. Duellen: Kontaktlinser mot glasögon



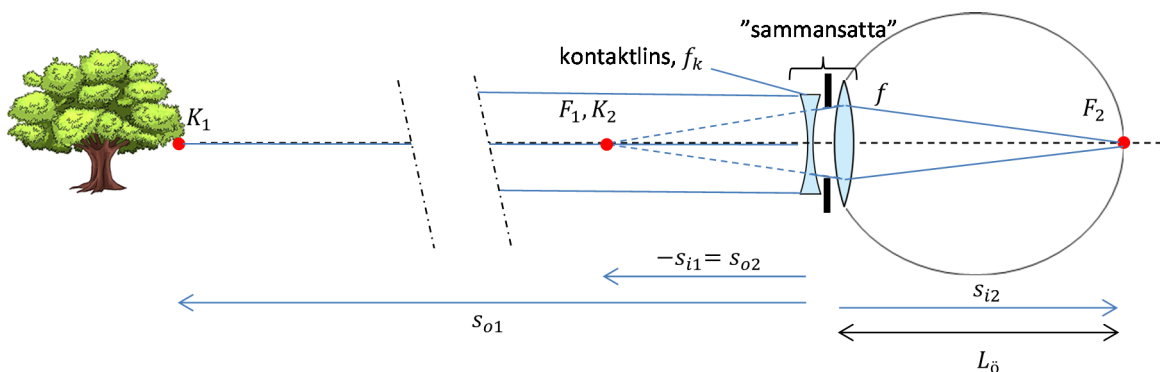
(a) Att personen "ser skarpast" betyder att vi då har bästa möjliga avbildning av objektet på näthinnan. I geometrisk-optisk mening innebär det att strålar från punktkällan möts i en punkt på näthinnan. Gauss linslag säger att detta sker på avståndet $L_{\ddot{o}}$ efter ögonlinsen, där

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i}; \quad (s_o \equiv L; s_i \equiv L_{\ddot{o}}) \Rightarrow \frac{1}{L_{\ddot{o}}} = \frac{1}{f} - \frac{1}{L} = \frac{1}{20\text{mm}} - \frac{1}{12\text{cm}} \Rightarrow L_{\ddot{o}} = 24\text{mm}$$

(b) Här kan vi till exempel utnyttja att två linser, fokallängd f_1 och f_2 , som "sitter ihop" (har försumbar separation) kan ersättas med en enda lins med den ekvivalenta fokallängden f_e , där

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Men vi använder inte detta utan kör den vanliga stråloptiska tekniken att ta en lins i taget.



Eftersom objektet är avlägset har vi parallella strålar in, d.v.s. $s_{o1} = \infty$. Eftersom kontaktlinsen är negativ vet vi att strålarna efter denna divergerar, alltså ser ut att komma från en punkt F_1 till vänster om linsen. Avståndet från F_1 till linsen betecknar vi med $-s_{i1}$, eftersom s_i räknas positiv till höger om linsen. Gauss linsformel ger för propagationen $K_1 \rightarrow F_1$,

$$\frac{1}{f_k} = \frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i1}} \Rightarrow -s_{i1} = -f_k (> 0 \text{ eftersom } f_k < 0)$$

Fokuset F_1 (med kontaktlinsen borttagen) är källan K_2 för propagationen genom ögonlinsen. Gauss linsformel ger för $K_2 \rightarrow F_2$,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{-s_{i1}} + \frac{1}{L_{\ddot{o}}}$$

eftersom linserna sitter ihop så att $s_{o2} = -s_{i1}$, och $s_{i2} = L_{\ddot{o}}$ eftersom ljuset från punktkällan ska bli en punkt (i geometrisk optisk approximation) för att vi ska se så bra som möjligt (skarpast möjliga bild av objektet på näthinnan). Med $-s_{i1} = -f_k$ fås

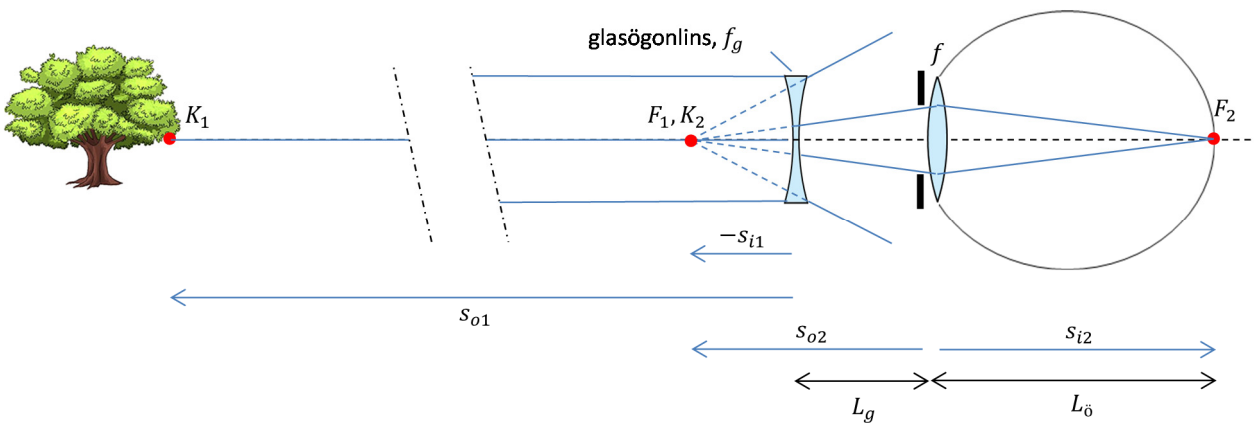
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-f_k} + \frac{1}{L_{\ddot{o}}} \Rightarrow \frac{1}{f_k} = \frac{1}{L_{\ddot{o}}} - \frac{1}{f} = \frac{1}{24\text{mm}} - \frac{1}{20\text{mm}} \Rightarrow f_k = -12\text{cm}$$

Detta hade vi kanske kunnat säga med en gång! Vi vet ju att personen ser perfekt när ögat träffas av ljus från en punktkälla 12 cm bort. Och en negativ lins med fokallängd -12cm gör ju så att ljuset från en avlägsen punktkälla verkar komma just från en punkt 12 cm till vänster om linsen.

Kontaktlinsens styrka i *dioptrier*, så som personen måste uttrycka sig när hen går till optikern och ska köpa hem några stycken, blir

$$D_k \equiv \frac{1}{f_k[\text{m}]} = \frac{1}{-0.12} \approx -8.25$$

där vi avrundat styrkan med tanke på att alla glas/linser hos optikern har styrkor i steg om 0.25 dioptrier!



(c) Analogt med kontaktlinsfallet betraktar vi först strålarna genom första linsen, alltså glasönglaset. Gauss linsformel ger för $K_1 \rightarrow F_1$,

$$\frac{1}{f_g} = \frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i1}} \Rightarrow -s_{i1} = -f_g (> 0 \text{ eftersom } f_g < 0)$$

och för $K_2 \rightarrow F_2$,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{-s_{i1} + L_g} + \frac{1}{L_{\bar{o}}} = \frac{1}{-f_g + L_g} + \frac{1}{L_{\bar{o}}}$$

där vi använt att nu är $s_{o2} = -s_{i1} + L_g$ eftersom linserna är separerade med sträckan L_g . Då blir

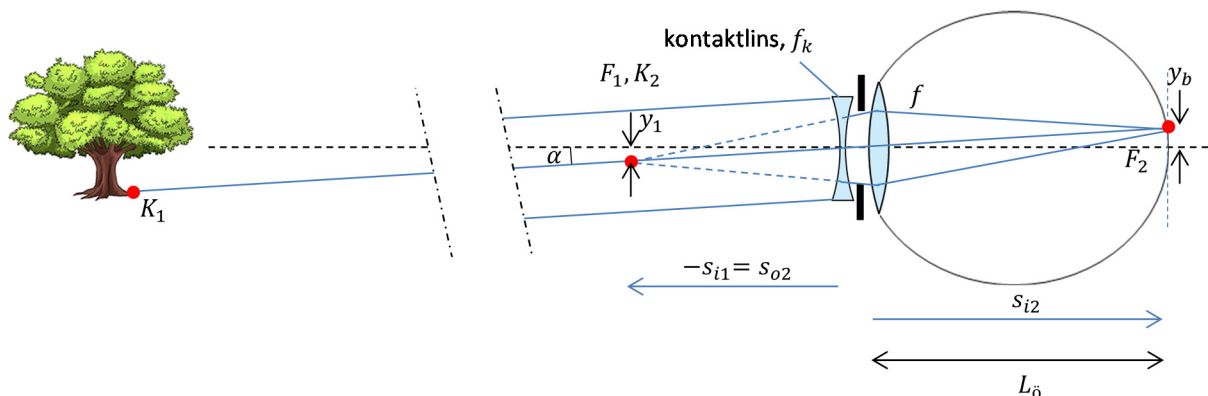
$$f_g = \frac{1}{\frac{1}{L_{\bar{o}}} - \frac{1}{f}} + L_g = \frac{1}{\frac{1}{24mm} - \frac{1}{20mm}} + 15mm = -10.5 \text{ cm}$$

Detta hade man kanske också kunnat säga direkt. Ljuset som träffar ögonlinsen ska fortfarande tyckas komma från en punkt 12 cm framför ögat. Eftersom glasögonlinsen själv ligger 1.5 cm framför ögat ska ljuset som träffar ögonlinsen tyckas komma från en punkt 12 cm - 1.5 cm = 10.5 cm till vänster om glasögonlinsen. Det betyder att glasögonlinsen ska ha fokallängden $f_g = -10.5$ cm.

Slutligen, uttryckt i dioptrier blir glasögonlinsens styrka

$$D_g \equiv \frac{1}{f_g[m]} = \frac{1}{-0.105} \approx -9.5$$

Om du är närsynt ska alltså dina glasögon vara starkare än dina kontaktlinser, annars har din optiker lurat dig!



(d) Vi gör en liknande konstruktion som den i uppgift (b), fast nu ligger punktkällan K_1 en bit ner från det optiska systemets symmetriaxel, så att infallande parallella strålar bildar vinkeln α med denna. Positionerna i z-led (horisontell riktning i figuren) för fokus och källor (F_1, K_2, F_2) är desamma som för fallet $\alpha=0$. Det beror på att Gauss linslag inte innehåller något y -beroende. Detta gäller under paraxiella förhållanden, d.v.s. då α är hyfsat liten, vilket vi antar.

Med andra ord återstår bara att bestämma lägena av fokus och källor i y -led. Vi använder geometrisk-optiska konstruktionsregeln "fokus F ligger på räta linjen genom källan K och linsens centrum". Vi tillämpar denna regel först på den första linsen i systemet, kontaktlinsen, och dess källa K_1 och fokus F_1 . Av figuren framgår att y_1 ges ur

$$y_1 = \alpha \cdot (-s_{i1})$$

där vi gör den vanliga approximationen $\tan(\alpha) = \sin(\alpha) = \alpha$ eftersom α är liten. Observera att denna approximation förutsätter att α anges i radianer!

Nu har vi bestämt läget av F_1 vilket också är positionen för källan K_2 för ljuset in på ögonlinsen (med kontaktlinsen borttagen). Vi använder åter regeln "fokus F ligger på räta linjen genom källan K och linsens centrum", nu för K_2 och F_2 . Likformiga trianglar ger då läget y_b genom

$$\frac{y_b}{s_{i2}} = \frac{y_1}{-s_{i1}} = \frac{\alpha \cdot (-s_{i1})}{-s_{i1}} = \alpha$$

Vi får alltså sambandet mellan avläkning y_b på näthinnan och infallsvinkel α på en stråle som

$$y_b = s_{i2} \cdot \alpha = L_{\bar{o}} \cdot \alpha$$

eftersom $s_{i2} = L_{\bar{o}}$. Detta samband kunde vi kanske också insett direkt eftersom två sammansatta tunna linser kan ersättas med en enda, som vi direkt kan tillämpa konstruktionsregeln på (F_1 ligger då på näthinnan).

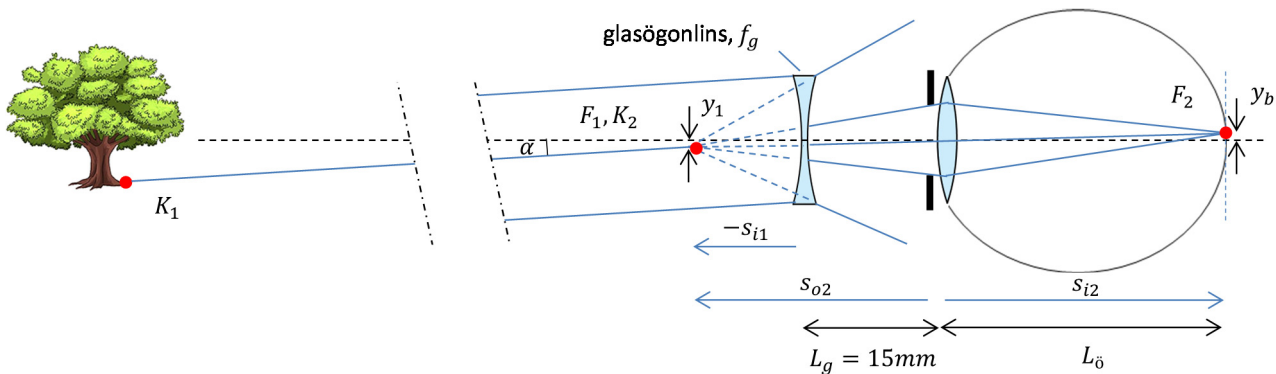
Sambandet ovan antar alltså att α är given i radianer. Anges $L_{\bar{o}}$ i meter fås även y_b i meter, dvs

$$y_b [m] = 0.024 \cdot \alpha [rad]$$

Eftersom $y_b [m] = y_b [mm]/1000$ och $\alpha [rad] = \alpha [^\circ]/(180/\pi)$ fås

$$y_b [mm]/1000 = 0.024 \cdot \alpha [^\circ]/(180/\pi) \Rightarrow y_b [mm] = 0.42 \cdot \alpha [^\circ]$$

För varje grads ökning av infallsvinkeln för en stråle flyttar sig alltså ljuspricken på näthinnan 0.42 mm.



(e) Som i föregående uppgift är redan positionerna i z -led för F_1 , K_2 och F_2 bestämda, eftersom de är samma som för fallet $\alpha=0$, som vi behandlade i uppgift (c). För positionen av F_1 i y -led fås ur "fokus F ligger på räta linjen genom källan K och linsens centrum", där linsen nu är glasögonlinsen,

$$y_1 = \alpha \cdot (-s_{i1})$$

i analogi med föregående uppgift. Nu tar vi bort glasögonlinsen och ser F_1 (nu kallad K_2) som källa för propagationen genom ögonlinsen. Regeln "fokus F ligger på räta linjen genom källan K och linsens centrum", där linsen är ögonlinsen, ger positionen y_b för fokus F_2 på näthinnan ur likformiga trianglar

$$\frac{y_b}{s_{i2}} = \frac{y_1}{s_{o2}} = \frac{\alpha \cdot (-s_{i1})}{s_{o2}} = \frac{(-s_{i1})}{s_{o2}} \alpha$$

Från uppgift (c) fick vi $-s_{i1} = -f_g = 10.5 \text{ cm}$, $s_{o2} = -s_{i1} + L_g = 10.5 \text{ cm} + 15 \text{ mm} = 12 \text{ cm}$ och $s_{i2} = L_{\bar{o}} = 24 \text{ mm}$. Löser vi ut y_b och anger sträckorna i meter fås

$$y_b [m] = \frac{(-s_{i1}) \cdot s_{i2}}{s_{o2}} \alpha [\text{rad}] = \frac{0.105 \cdot 0.024}{0.120} \alpha [\text{rad}] = 0.021 \cdot \alpha [\text{rad}]$$

eller, i de önskade enheterna,

$$y_b [mm]/1000 = 0.021 \cdot \alpha [^\circ]/(180/\pi) \Rightarrow y_b [mm] = 0.37 \cdot \alpha [^\circ]$$

För varje grads ökning av infallsvinkeln för en stråle flyttar sig alltså ljuspricken på näthinnan 0.37 mm.

(f) Ja, konstanten *const* blir faktiskt olika – den blir något mindre när man har på sig glasögon som ger perfekt synskärpa, jämfört med när man bär kontaktlinser som ger perfekt synskärpa! Eftersom ljus från en given riktning hamnar närmare mitten på näthinnan när man bär glasögon blir bilden förminskad jämfört med fallet med kontaktlinser. Förminskningen ges av

$$\frac{y_b|_{\text{glasögon}}}{y_b|_{\text{kontaktlinser}}} = \frac{0.37 \cdot \alpha}{0.42 \cdot \alpha} = 0.875$$

Det betyder att samma träd ser ut så här beroende på om personen har sina kontaktlinser eller glasögon:

kontaktlinser



glasögon



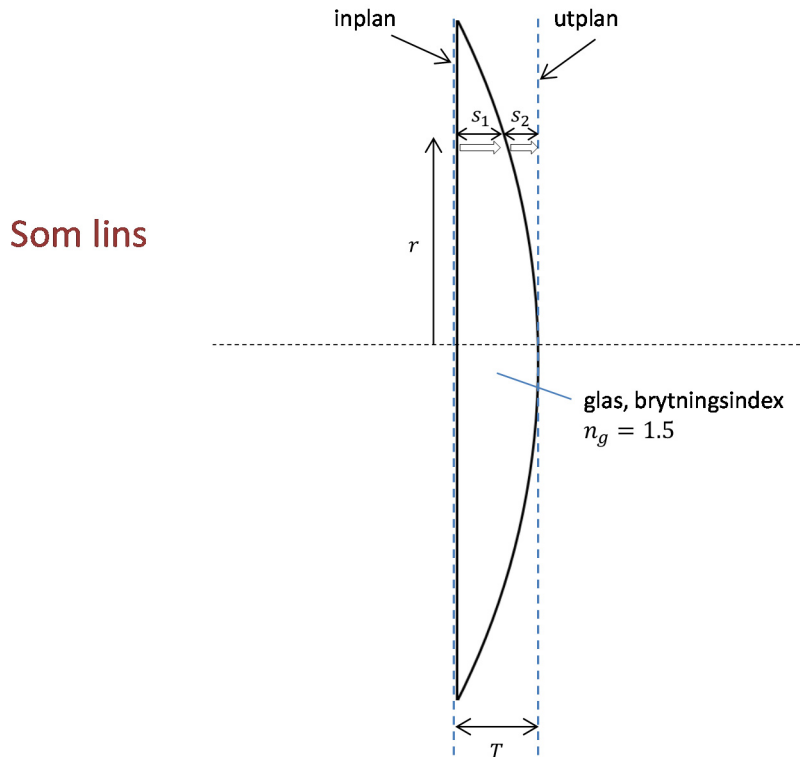
Nu har ju den här personen en ovanligt kraftig närsynthet – för de flesta människor är inte skillnaden mellan linser och glasögon lika stor. Dessutom är det snyggare med glasögon, och det väger ju betydligt tyngre. Alltså drar vi den 100% objektiva slutsatsen:

Glasögon är bäst!

4. Fokuserande lins blir fokuserande spegel

(a)

Steg 1: Vi börjar med att använda TOK-modellen på linsen, alltså utan speglade skiktet.



Fasändringen när ljuset går från inplanet till utplanet i en position på avståndet r från symmetriaxeln blir, enligt figuren

$$\varphi_l(r) = k_0 n_g s_1(r) + k_0 s_2(r)$$

eftersom fasändringen per längdenhet i propagationsriktningen är k_0 gånger brytningsindex i det material ljuset propagerar. Med linstjockleken T fås $s_2(r) = T - s_1(r)$ och alltså

$$\varphi_l(r) = k_0 n_g s_1(r) + k_0 (T - s_1(r)) = k_0 (n_g - 1) s_1(r) + k_0 T$$

Enligt uppgift skulle denna lins ha en fokallängd $f_l = 1m$. Alltså ska den ha en fasmodulering

$$\varphi(r) = -k_0 \frac{r^2}{2f_l} + const$$

enligt det paraxiella uttrycket för fasmoduleringen hos en lins. Vi har gjort formeln generell genom att lägga till $const$ för att kunna jämföra med vårt uttryck $\varphi_l(r)$. Vi sätter $\varphi(r)$ och $\varphi_l(r)$ lika, och börjar med specialfallet $r = 0$ för att bestämma $const$,

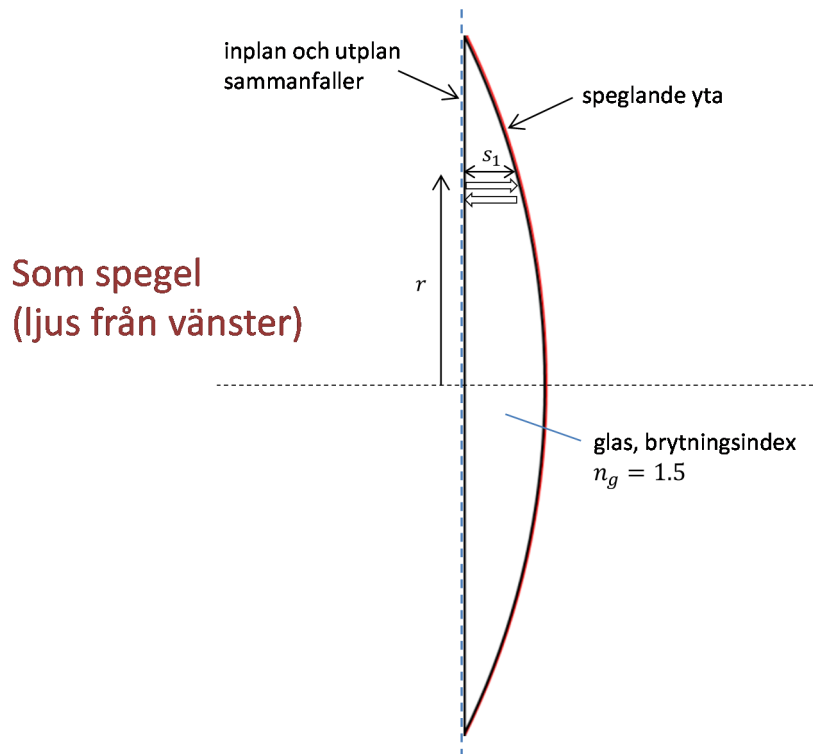
$$\varphi_l(r = 0) = \varphi(r = 0) \Rightarrow k_0 (n_g - 1) T + k_0 T = const \Rightarrow const = k_0 n_g T$$

eftersom $s_1(r = 0) = T$. Sätter vi nu $\varphi(r)$ och $\varphi_l(r)$ lika för generellt r fås

$$\varphi_l(r) = \varphi(r) \Rightarrow k_0(n_g - 1)s_1(r) + k_0T = -k_0 \frac{r^2}{2f_l} + k_0n_gT \Rightarrow$$

$$s_1(r) = -\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_l} + T$$

Steg 2: Vi använder TOK-modellen på den speglade komponenten



Nu går ljuset från inplanet till utplanet (dessa plan sammanfaller för en speglade komponent) genom glaset, reflekteras i metallskiktet, och går samma väg tillbaka genom glaset. Fasändringen när ljuset går från inplanet till utplanet i en position på avståndet r från symmetriaxeln blir därför

$$\varphi_s(r) = k_0n_g s_1(r) + \Delta\varphi_{refl} + k_0n_g s_1(r) = 2k_0n_g \left(-\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_l} + T \right) + \pi$$

där vi satte in $s_1(r)$ vi räknat fram ovan och använde uppgiften att fasändringen vid reflektion $\Delta\varphi_{refl} = \pi$. Multiplicerar vi in faktorn framför parentesen fås

$$\varphi_s(r) = -k_0n_g \frac{r^2}{(n_g - 1)f_l} + 2k_0n_gT + \pi$$

Om vi antar att denna komponent ska fungera som en lins (sfärisk spegel) med fokallängden f_s måste den ha fasmoduleringen

$$\varphi(r) = -k_0 \frac{r^2}{2f_s} + const$$

Sätter vi koefficienterna för r^2 lika för $\varphi_s(r)$ och $\varphi(r)$ fås

$$-k_0 n_g \frac{1}{(n_g - 1)f_l} = -k_0 \frac{1}{2f_s} \Rightarrow f_s = \frac{(n_g - 1)f_l}{2n_g} = \frac{(1.5 - 1)f_l}{2 \cdot 1.5} = \frac{f_l}{6} = 0.17m$$

Som speglende komponent blir "linsen" alltså 6 gånger starkare än som transmissionskomponent! Det beror dels på reflektionen i den buktiga ytan, som verkar "fokuserande". Men det beror också på att glaset som ljuset propagerar genom före och efter reflektionen är tunnare mot kanterna och alltså fungerar som lins. I detta fall kan man alltså inte använda formeln $f_s = R_s/2$, som är uttrycket för fokallängd hos en speglende yta med krökningsradien R_s , eftersom den inte inkluderar propagationen genom det linsformade glaset före och efter reflektionen.

Vi kan för skojs skull räkna ut vad fokallängden blir för enbart den speglande ytan, alltså $f_s = R_s/2$. Vi har ju inte explicit beräknat krökningsradien R_s i denna uppgift, men vi bör alltså få samma resultat om vi antar luft istället för glas i uttrycket för fasändringen mellan in- och utplan:

$$\varphi_{s,luftprop}(r) = k_0 \cdot 1 \cdot s_1(r) + \Delta\varphi_{refl} + k_0 \cdot 1 \cdot s_1(r) = 2k_0 \left(-\frac{r^2}{2(n_g - 1)f_l} + T \right) + \pi$$

e
x
t
r
a
få
s

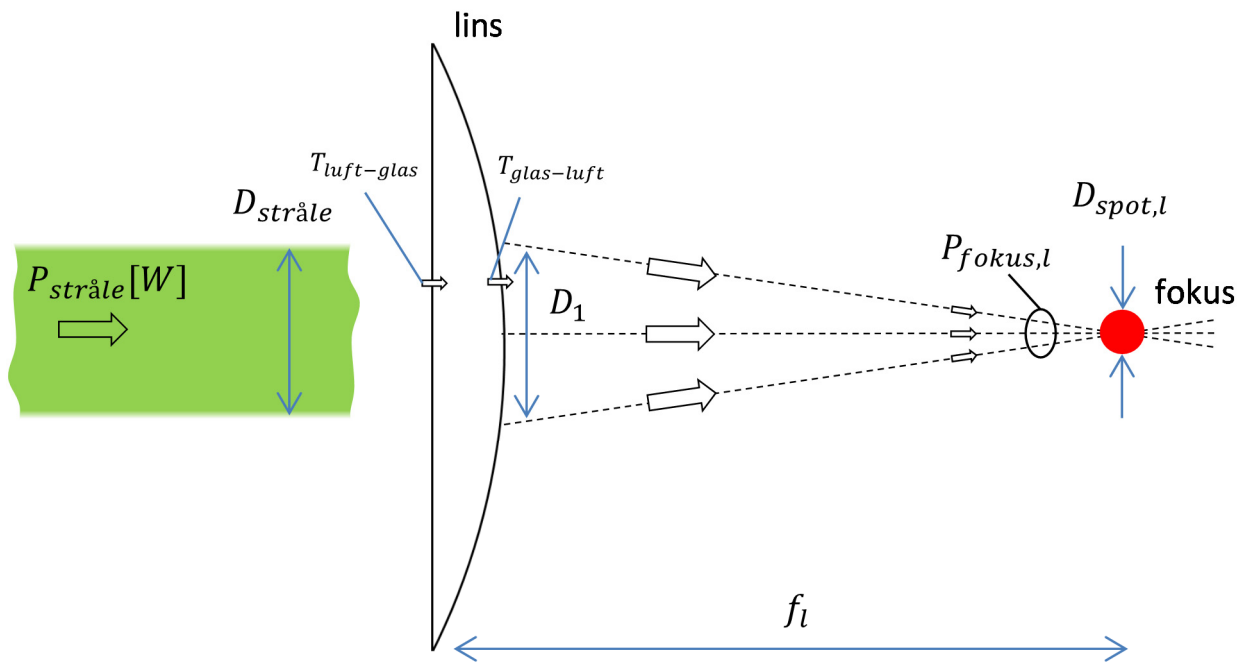
Om vi identifierar med fasmoduleringen hos en lins med fokallängd $f_{s,luftprop}$

$$\varphi(r) = -k_0 \frac{r^2}{2f_{s,luftprop}} + const$$

få
s

$$-k_0 \frac{1}{(n_g - 1)f_l} = -k_0 \frac{1}{2f_{s,luftprop}} \Rightarrow f_{s,luftprop} = \frac{(n_g - 1)f_l}{2} = \frac{(1.5 - 1)f_l}{2} = \frac{f_l}{4} = 0.25m$$

Vi ser att den buktiga speglende ytan gör en avsevärd del av det fokuserande jobbet men inte allt!



(b) Vi börjar med linsen. I princip all effekt i strålen hamnar i fokus, med undantag av den relativt obetydliga mängd ljus som reflekteras bort vid övergångarna mellan luft och glas. Effekten som faller in i fokus är alltså

$$P_{fokus,l} = P_{stråle} \cdot T_{luft-glas} \cdot T_{glas-luft}$$

där $P_{stråle}$ är laserstrålens effekt och $T_{luft-glas}$ är transmitterad effekt från luft till glas genom vänstra ytan på linsen, och $T_{glas-luft}$ motsvarande genom högra ytan. Eftersom en luft-glas yta har en *reflekterad* intensitet på ca 4% för hyfsat normalt infall (och $n_{glas} \approx 1.5$) betyder det att transmissionsfaktorerna $T_{luft-glas}$ och $T_{glas-luft}$ båda ligger kring 0.96.

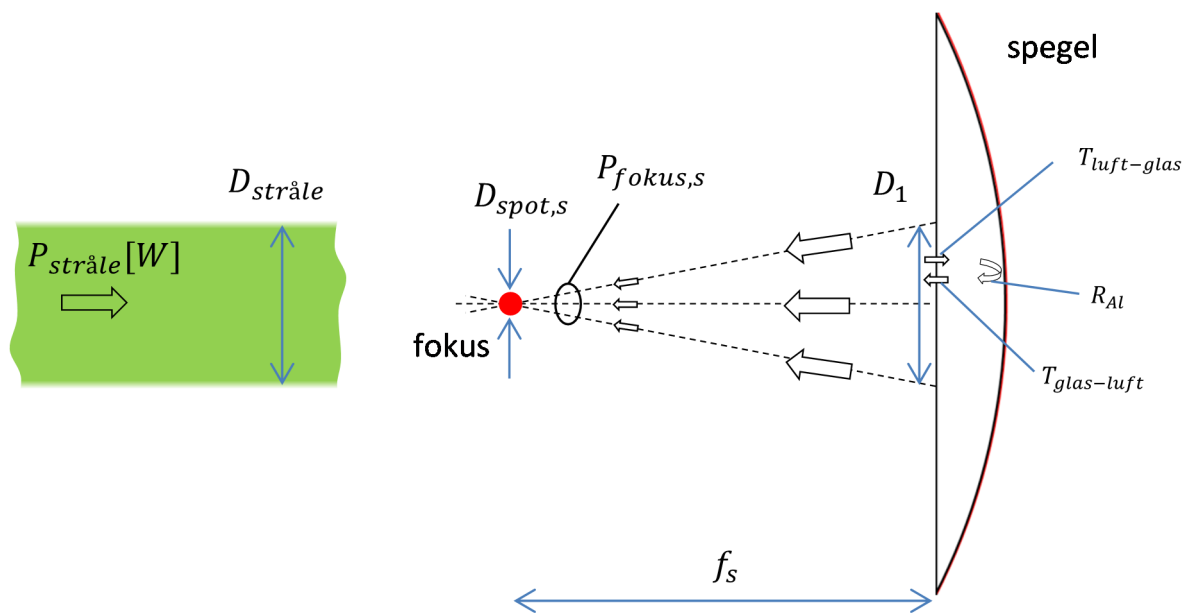
Intensiteten i fokus blir

$$I_{fokus,l} \approx \frac{P_{fokus,l}}{A_{fokus,l}} \approx \frac{P_{fokus,l}}{\pi \left(\frac{D_{spot,l}}{4} \right)^2}$$

Om linsen är ideal ger den optimal fokusering, d.v.s. fokusets storlek ges av minsta spotsize,

$$D_{spot,l} = const \frac{\lambda}{D_1} f_l = const \frac{\lambda}{D_{stråle}} f_l$$

där "utbredningen i plan 1" $D_1 = D_{stråle}$ eftersom fältets utbredning inte ändras i den tunna linsen.



Vi gör nu motsvarande för spegeln. Effekten som faller in i fokus är

$$P_{fokus,s} = P_{stråle} \cdot T_{luft-glas} \cdot R_{Al} \cdot T_{glas-luft}$$

Där bara faktorn $R_{Al} = 0.95$ (intensitetsreflektion i aluminiumskiktet) skiljer detta fall från linsfallet.

Intensiteten i fokus blir analogt med linsfallet

$$I_{fokus,s} \approx \frac{P_{fokus,s}}{A_{fokus,s}} \approx \frac{P_{fokus,s}}{\pi \left(\frac{D_{spot,s}^2}{4} \right)}$$

liksom minsta spotsize

$$D_{spot,l} = const \frac{\lambda}{D_1} f_s = const \frac{\lambda}{D_{stråle}} f_s$$

Tar vi nu och jämför intensiteterna i fokus från spegel respektive lins fås

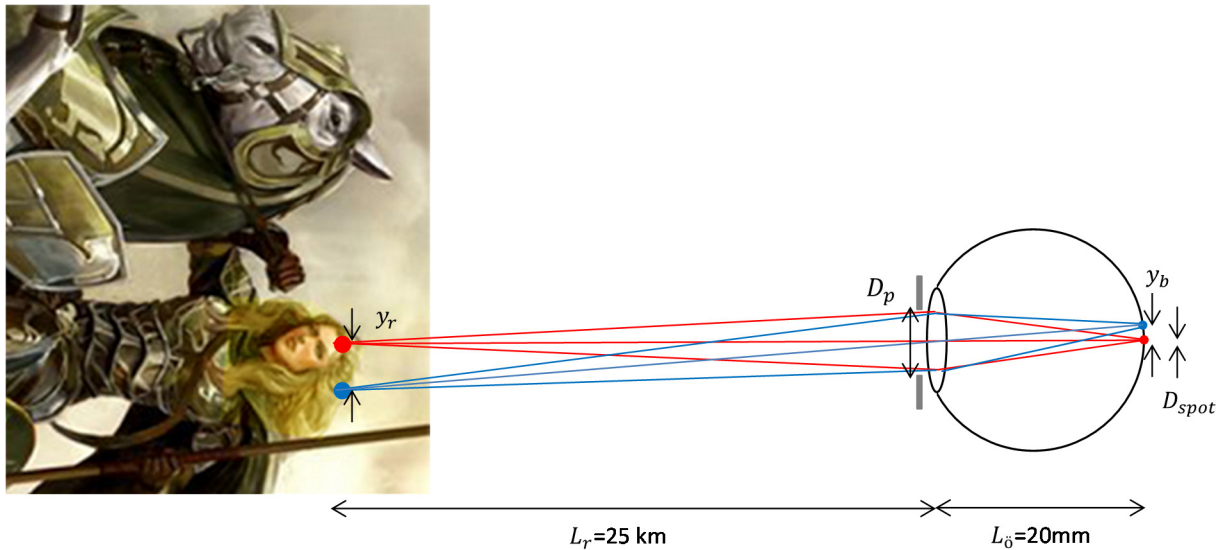
$$\frac{I_{fokus,s}}{I_{fokus,l}} = R_{Al} \frac{f_l^2}{f_s^2} = 0.95 \frac{(1m)^2}{(0.17m)^2} \approx 30$$

Intensiteten blir alltså mer än en storleksordning högre i fokus från spegeln, i det ideala fallet. Det beror väsentligen på att spegeln har mycket kortare fokallängd, vilket möjliggör en tajtare fokusering till en mindre ljusfläck i fokus.

5. Sagan om ringen – en bluff??

(a) Vi antar att alver har mycket tätt sittande synceller i näthinnan så att det är skärpan i avbildningen på näthinnan som bestämmer hur små föremål alven kan se, inte hur tätt samplad bilden blir av syncellerna.

P.g.a. det långa avståndet till ryttarna blir geometrisk optiska bilden av dessa väldigt liten på näthinnan. Ska vi se några detaljer måste ljusblaffan på näthinnan från varje punktkälla på ryttaren vara ännu mindre. Annars kommer ljusblafforna att överlappa varandra helt och hållet.



Antag att vi har två punktkällor på ryttaren, separerade med y_r . Enligt konstruktionsregeln "fokus ligger på räta linjen genom punktkällan och lensens centrum" kommer motsvarande punkter på näthinnan, där punktkällorna är fokuserade efter linsen, att vara separerade med sträckan y_b som fås ur likformiga trianglar

$$\frac{y_b}{L_{\ddot{o}}} = \frac{y_r}{L_r} \Rightarrow y_b = \frac{y_r \cdot L_{\ddot{o}}}{L_r}$$

Varje punktkälla ger en ändligt stor blaffa på näthinnan, vars storlek ges av tumregeln för minsta spotsize, D_{spot} , eftersom linsens fasmodulering är optimal

$$D_{spot} \approx const \frac{\lambda}{D_p} L_{\ddot{o}} = 1.5 \frac{\lambda}{D_p} L_{\ddot{o}}$$

I formeln ovan gjorde vi det lite godtyckliga valet $const = 1.5$; man kan t.ex. välja $const = 2.44$ istället, om man använder den generösa definitionen att storleken är diametern hos Airy-fördelningens första svarta ring, men vi är lite snålare. Vidare är utbredningen av fältet i Plan 1, efter pupillen, lika med pupilldiametern D_p , och propagationssträckan till Plan 2, näthinnan, är $L_{\ddot{o}}$.

Om vi på något sätt vill kunna se någon skillnad på näthinnan mellan den röda och blå punktkällan, t.ex. en skillnad i ljusstyrka, får deras blaffor på näthinnan inte överlappa helt. Vi inför ett tämligen godtyckligt *upplösningvillkor*, som säger att det är tillräckligt att separationen mellan blaffornas centra är lika med varje blaffas utbredning. Alltså

$$y_b \geq D_{spot}$$

vilket med insättning av uttrycken ovan blir

$$\frac{y_r \cdot L_{\ddot{o}}}{L_r} \geq 1.5 \frac{\lambda}{D_p} L_{\ddot{o}} \Rightarrow D_p \geq \frac{1.5 \cdot \lambda \cdot L_r}{y_r} = \frac{1.5 \cdot 550nm \cdot 25km}{10cm} = 20 cm (!)$$

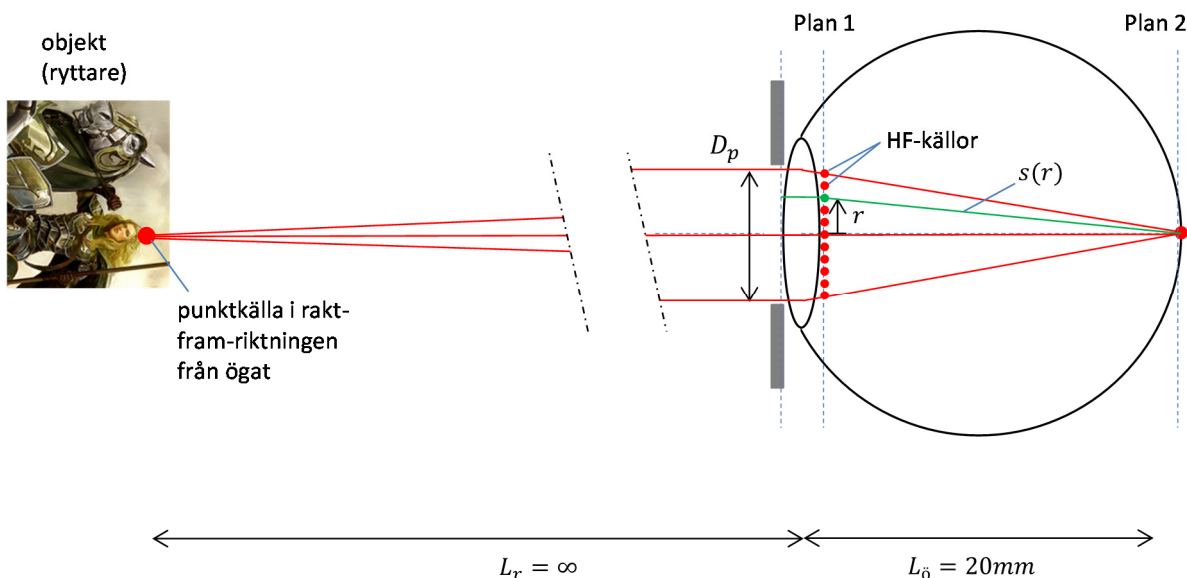
Här antogs $\lambda=550nm$ vilket är grönt ljus, ungefär i mitten av det synliga spektrumet, och att vi behöver kunna se skillnad mellan två punkter på ryttaren som är skilda åt med $y_r = 10cm$ för att möjligen kunna gissa att vi ser ett huvud som sticker upp ur den större suddiga sak som är resten av kroppen.

I vilket fall kan vi konstatera att med en decimeterstor pupill kan inte Legolas se ut som på bilden, d.v.s.

Sagan om ringen är en bluff!

Det bör kanske påpekas att *formeln för minsta spotsize inte alls gäller* för så här extrema fokuseringar, jag tror inte ens det existerar 20 cm stora linser med en fokallängd på bara 2 cm. Så i praktiken gör Legolas någonting helt omöjligt när hen ser ryttarnas huvuden. Bluff är bara förnamnet!

(b) Att linsen ger "skarpast möjliga bild" på näthinnan betyder att ljuset från en punktkälla på objektet (ryttarna) fokuseras till minsta möjliga fläck på näthinnan. Låt oss betrakta en punktkälla på objektet i rakt-fram-riktningen,



Ljuset från denna punktkälla propagerar fram till ögat, går igenom linsen, och fokuseras optimalt i origo på näthinnan. Med Huygens-Fresnels princip kan vi tänka oss att fältet på näthinnan (Plan 2) orsakas av HF-källor i planet precis efter linsen (Plan 1). Att fältet är optimalt fokuserat i origo på näthinnan betyder då att fälten från alla HF-källorna interfererar konstruktivt där.

Vi studerar den **grönmarkerade** HF-källan på radiella avståndet r från symmetriaxeln. Det infallande fältet till denna källa är

$$\varphi_{in,HF}(r) = 0 + \varphi_{lins}(r)$$

där "0" är fasen hos fältet i ett plan precis före linsen, eftersom ljuset in på ögat är parallellt och normalt infallande, och alltså har konstant fas i detta plan (godtyckligt satt till 0). $\varphi_{lins}(r)$ är linsens fasmodulering, d.v.s. fältets fasändring från ett plan precis före till precis efter linsen (där HF-källan befinner sig).

Fasen på fältet som sänds ut från HF-källan är samma som infallande fas enligt Huygens-Fresnels princip,

$$\varphi_{ut,HF}(r) = \varphi_{in,HF}(r) = \varphi_{lins}(r)$$

Ljuset propagerar sträckan $s(r)$ från HF-källan till origo på näthinnan. Under propagationen ändrar sig fasen med $k \cdot s(r)$. Fältets fas i origo på näthinnan från HF-källan i position r blir alltså

$$\varphi_{n\ddot{a}thinna,HF}(r) = \varphi_{ut,HF}(r) + k \cdot s(r) = \varphi_{lins}(r) + k \sqrt{r^2 + L_0^2}$$

För en optimal lins ska alla HF-källor, oavsett position r , ska ha samma fas i origo, vilket ger konstruktiv interferens där. Det betyder att $\varphi_{n\ddot{a}thinna,HF}(r)$ måste vara konstant, oberoende av r ,

$$\varphi_{n\ddot{a}thinna,HF}(r) = \varphi_{lins,opt}(r) + k \sqrt{r^2 + L_0^2} = const \Rightarrow \varphi_{lins,opt}(r) = -k \sqrt{r^2 + L_0^2} + const$$

Vi kan nu beräkna skillnaden $\Delta\varphi(r)$ mellan optimal fasmodulering och fasmoduleringen från det paraxiella uttrycket,

$$\Delta\varphi(r) \equiv \varphi_{lins,opt}(r) - \varphi_{lins,parax}(r) = -k \sqrt{r^2 + L_0^2} + const - \left(-k \frac{r^2}{2L_0} \right)$$

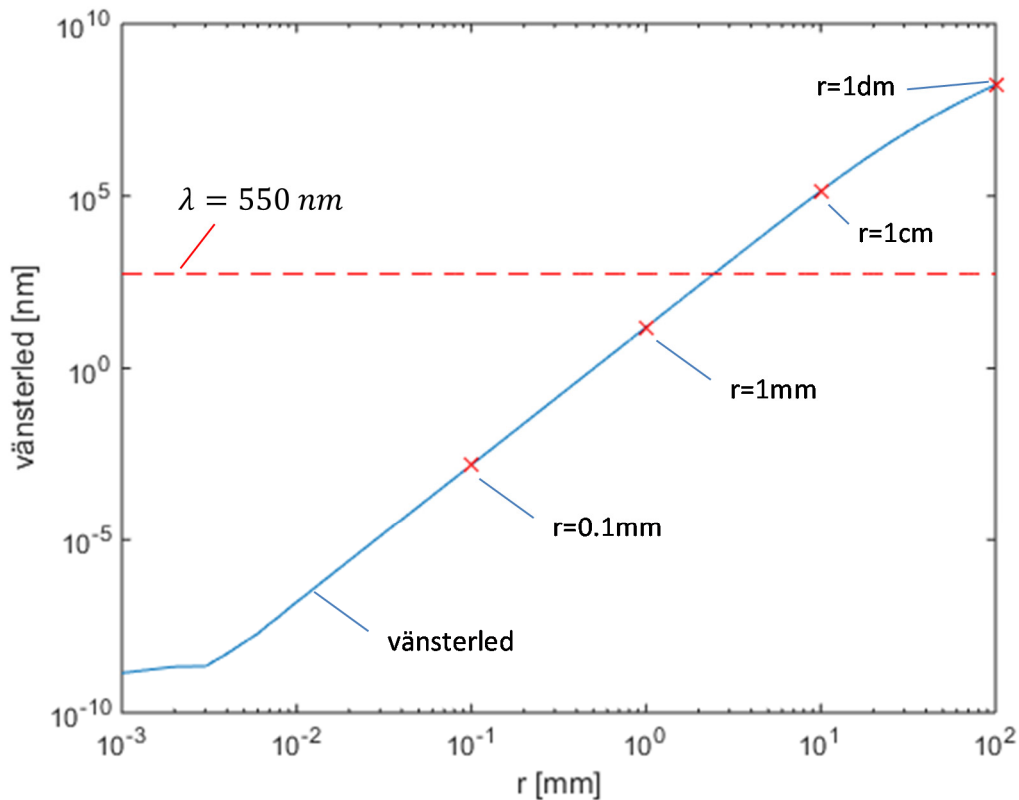
Vi bestämmer $const$ så att $\Delta\varphi(r=0) = 0$, d.v.s. $const = k \cdot L_0$. Alltså

$$\Delta\varphi(r) = -k \sqrt{r^2 + L_0^2} + k \cdot L_0 - \left(-k \frac{r^2}{2L_0} \right)$$

Med detta värde på $const$ kan vi studera hur fasmoduleringsfelet $|\Delta\varphi(r)|$ ökar från noll när vi ökar r . Så länge $|\Delta\varphi(r)|$ är mycket mindre än 2π så är skillnaden mellan optimala fasmoduleringen och paraxiella approximationen försumbar. Alltså för r som uppfyller

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi(r)| &= \left| -k \sqrt{r^2 + L_0^2} + k \cdot L_0 + k \frac{r^2}{2L_0} \right| \ll 2\pi \Rightarrow \left\{ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \sqrt{r^2 + L_0^2} - L_0 - \frac{r^2}{2L_0} \right| \ll \lambda \end{aligned}$$

Vi provar oss fram genom att sätta in några olika värden på r , och beräkna vänsterledet ovan med miniräknaren, och jämföra med våglängden λ .



Om vi antar en typisk våglängd mitt i synliga området, $\lambda=550$ nm, ser vi att vänsterledet snabbt blir större än högerledet. Endast för r upp till cirka 1-2 mm är vänsterledet mycket mindre än högerledet. Det betyder att även våra egna ögonlinser, som har diametrar på cirka 8 mm, kan behöva ha en fasmodulering som är justerad för icke-paraxiella förhållanden!

(c) I HUPP 3b konstaterade vi att vissa linser/speglar som har den vanliga paraxiella fasmoduleringen $\varphi_{lins,parax} = -k \frac{r^2}{2f}$ kan ge en alltför kraftig brytning i periferin av linsen jämfört med linsens centrala del. Fokuset blir därför oskarpt eftersom strålarna inte möts. Vilka linser som drabbas av detta beror på fokallängd och linsdiameter. Detta linsfel kallas *sfärisk aberration* och avhjälpas genom att ge linsen en lite modifierad form så att den får rätt fasmodulering ("asfärisk lins").