

Tentamen i Optik FFY091

Tisdag 13 mars 2018, kl. 14:00-18:00

Examinator och jourhavande lärare Jörgen Bengtsson, tel. 031-772 1591, **finns på plats ca kl 15 och 17** för att svara på frågor. För betyg 3, 4, 5 krävs 30, 40 resp. 50 p, inkl. bonus, av max 60 p, se vidare Kursinformation på kurshemsidan där också lösningsförslag publiceras efter tentan. Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera dina steg och formulera dig klart (gärna icke-verbalt i form av skisser) – båda dessa aspekter poängbedöms.
- Gör egna rimliga antaganden där det behövs.

1. Raggjanten i Rjukan

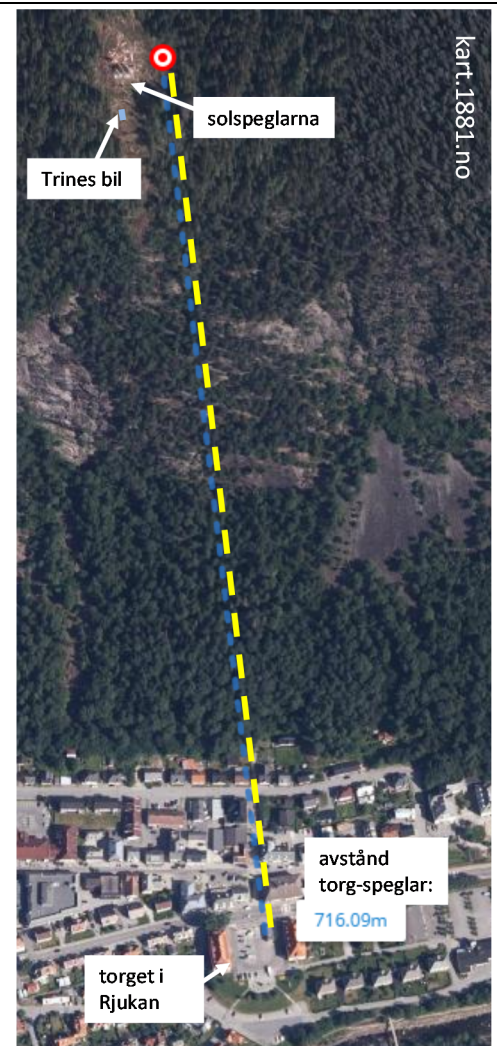
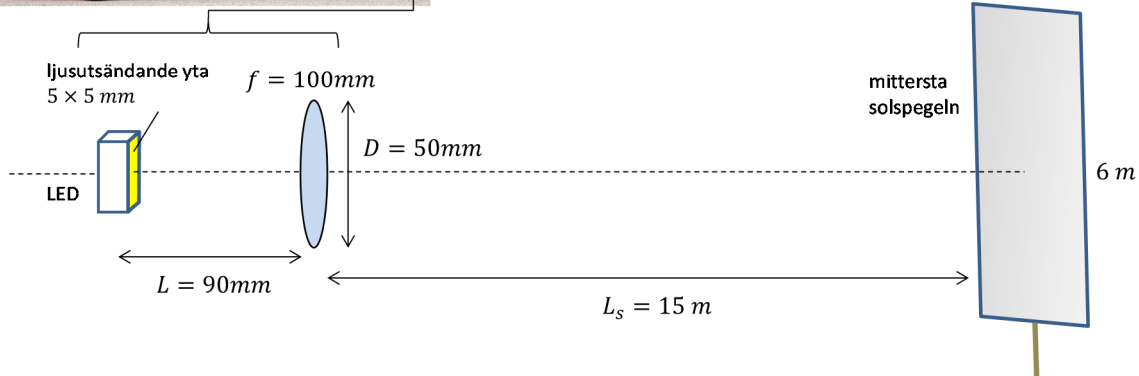
Byn Rjukan i Norge ligger i en dal dit solens strålar aldrig når ner under vintern. För att få solljus har man därför satt upp tre stora plana speglar (vardera $3\text{ m} \times 6\text{ m}$ med 100% reflektion) på bergskammen ovanför byn. Spegelarna är individuellt roterbara vertikalt och horisontellt.

Trine bor ensam med sin stora amerikanska bil i en hytte i närheten av speglarna. En natt ställer hon bilen 15 meter framför speglarna, så att ljuset från den ena strålkastaren (den andra fungerar inte) riktas mot centrum av den mittersta spegeln.

Trine har bytt strålkastare till en hemmabyggd variant med en gul LED och lins, se figur nedan. LEDen utgör en inkoherent ljuskälla med kvadratisk lysande yta med jämn intensitet.

(a) Visa att allt ljus som går genom linsen på strålkastaren hamnar på den mittersta spegeln (d.v.s. inget ljus går vid sidan om spegeln)! (4p)

(se "Förenkling" på nästa sida)

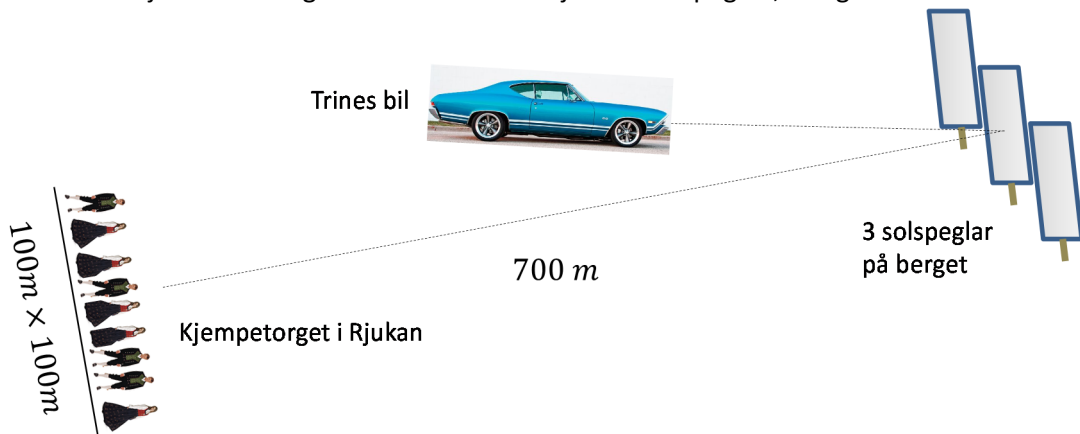


(b) Om det reflekterade ljuset från mittersta spegeln hamnar mitt på Rjukans torg, hur stort område på torget blir då belyst? (3p)

(c) Plötsligt kommer en vindby som böjer spegeln en aning, och samtidigt rapporterar oroliga nattvandrare i Rjukan att de observerat "en tydlig kvadrat av ljus" på torget. Vilken krökningsradie hade spegeln p.g.a. vinden, och hur stor var den lysande kvadraten på torget? Skissa strålgången för detta fall (ej skalenligt), från en punkt på LEDen ovanför den streckade symmetriaxeln fram till Rjukans torg via strålkastarlins och spegel (eller ekvivalent lins). (5p)

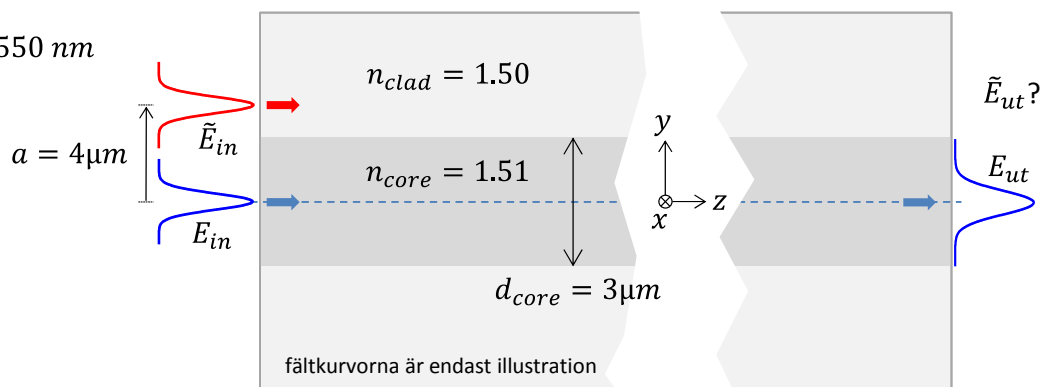
Förenkling 1: Använd strålar, d.v.s. försumma diffraktionseffekter. Paraxiella approximationer gäller.

Förenkling 2: För att inte behöva bry oss om projektioner antar vi att bilen, spegeln och torget ligger på i stort sett rät linje och att torget är vinkelrätt mot ljuset från spegeln, se figuren nedan.



2. Optiska fibrer

$\lambda = 1550 \text{ nm}$



Singelmodfibern i skissen ovan belyses med det gaussiska fältet (våglängd 1550 nm)

$$E_{in} = e^{-(x^2+y^2)/\omega^2}; \quad \omega = 3\mu\text{m}$$

vid vänstra ändytan. Efter lång propagation ($\sim \text{cm}$) i fibern är fältet vid fiberns högra ändyta

$$E_{ut} = A(x, y)e^{i\varphi(x, y)}$$

där $A(x, y)$ är det optiska fältets amplitudvariation och $\varphi(x, y)$ är fältets fasvariation över ändytan.

Nu råkar ljuskällan puttats till så att den istället belyser fibern sträckan $a = 4\mu\text{m}$ längre upp, d.v.s. fältet in på fibern blir nu

$$\tilde{E}_{in} = e^{-(x^2+(y-a)^2)/\omega^2}$$

Det resulterande fältet vid fiberns ändyta blir nu

$$\tilde{E}_{ut} = \tilde{A}(x, y)e^{i\tilde{\varphi}(x, y)}$$

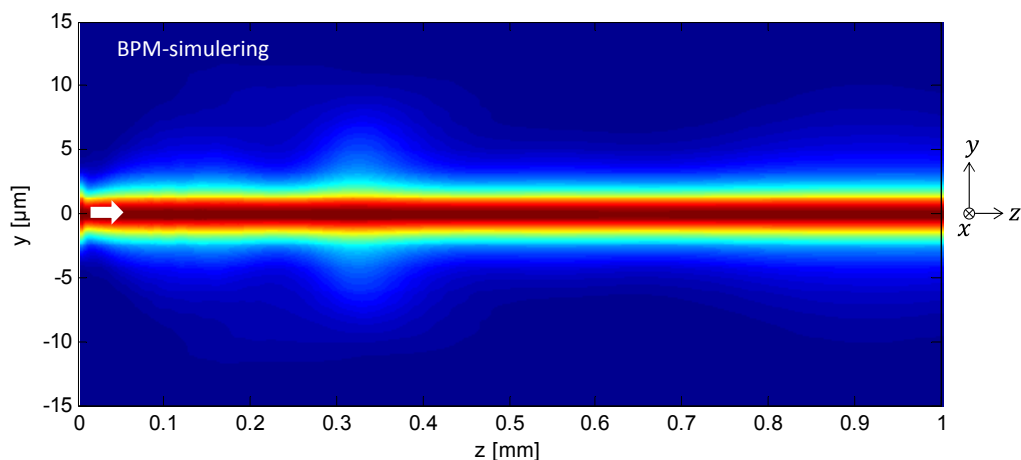
där, analogt med tidigare, $\tilde{A}(x, y)$ och $\tilde{\varphi}(x, y)$ är amplitudens respektive fasens variation över ändytan.

(a) Utan att göra någon numerisk simulering av det aktuella fallet påstår föreläsaren att

$$\tilde{A}(x, y) = c_1 A(x, y - c_2)$$

d.v.s. att putta ljuskällan leder endast till att utfältets amplitud ändras med en faktor c_1 och läget i y -led ändras med en sträcka c_2 . Hur kan föreläsaren påstå detta? Vad är värdet på konstanterna c_1 och c_2 ? Ge gränser för värdena om du inte kan ge exakta värden. (3p)

(b) Antag att vi gör exakt samma sak som ovan, alltså puttar till ljuskällan och kollar hur utfältet ändras, med den enda skillnaden att fibern nu är en *multimodfiber* (ty $d_{core} = 7\mu\text{m}$). I detta fall blir utseendet på $\tilde{A}(x, y)$, till skillnad från $A(x, y)$, *starkt* beroende på exakt var fibern tar slut trots att ljuset propagerat långt ($\sim \text{cm}$) i fibern. Varför blir det så stor skillnad när vi har puttats till ljuskällan jämfört med när fibern belyses centrerat? (3p)



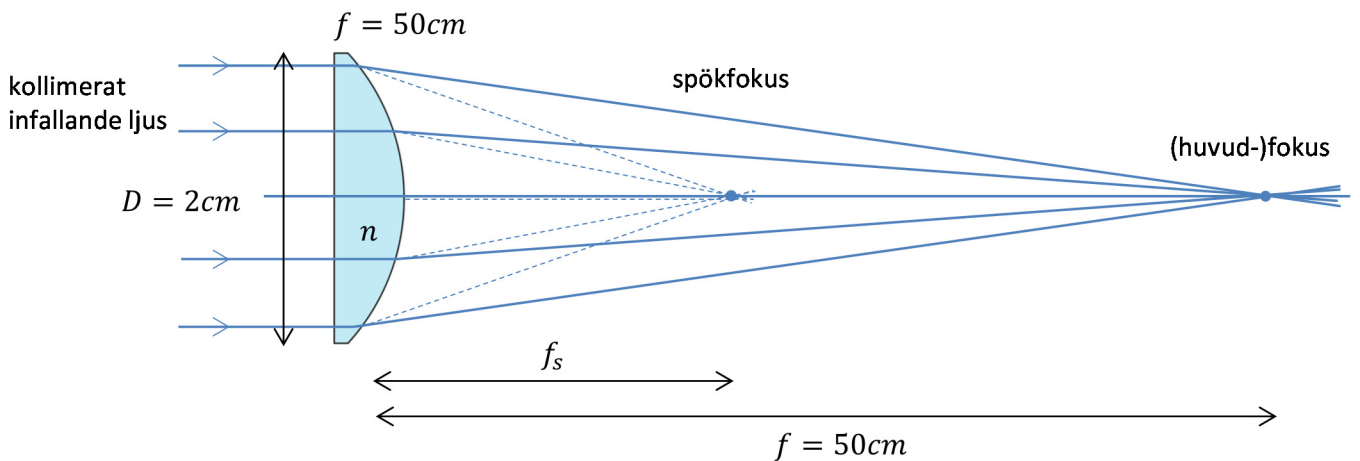
(c) Med hjälp av BPM simuleras den initiala propagationen i en optisk fiber, vilket visas ovan. En av "byggstenarna" i BPM-metoden är den FFT-baserade propagationsmetoden PAS. En annan FFT-baserad propagationsmetod är Huygens-Fresnels metod (HFM). Varför är HFM mindre lämpad än PAS att använda för BPM? (3p)

I den visade simuleringen har man använt $N \times N = 512 \times 512$ pixlar för att sampla fältet i varje (x, y) -plan, och 500 BPM-steg i z -led för att ta sig från vänster- till högerkanten i figuren. Nu vill man göra en cool film som visar hur fältet varierar som *funktion av tiden* i det simulerade området.

(d) Hur använder man data från BPM-simuleringen för att få denna film? (1p)

(e) Trots att vi inte gör något formellt fel i (d), visar det sig att vi inte får någon bra uppfattning om det verkliga utseendet hos det tidsupplösta fältet för det simulerade fallet. Varför? (2p)

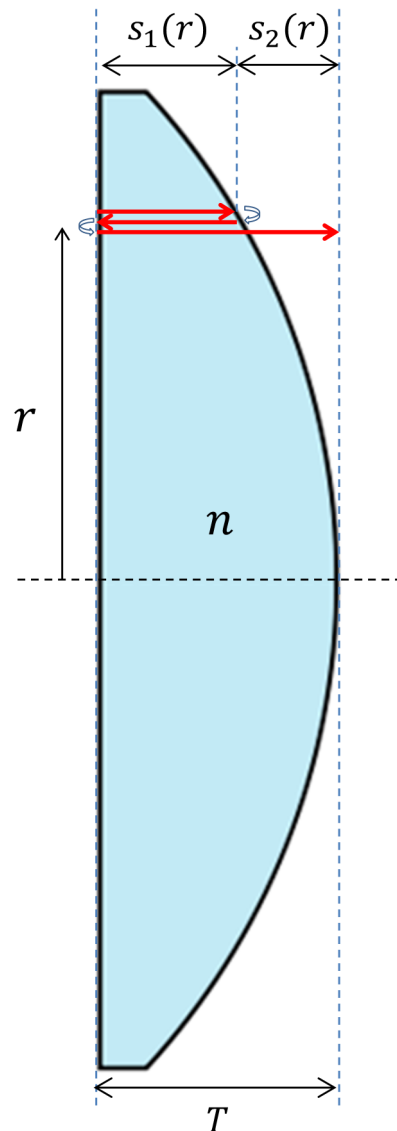
3. Spöken finns!



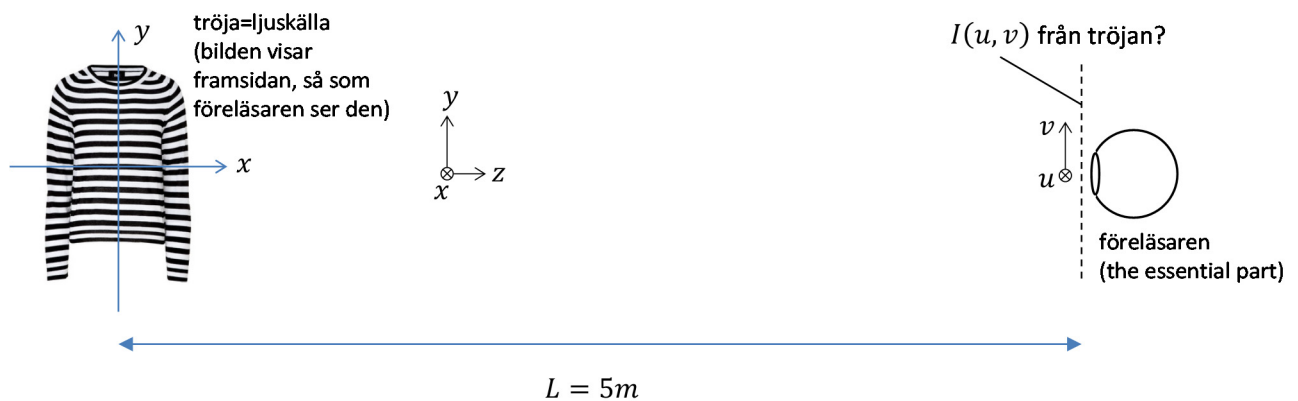
En plankonvex lins gjord av ett glasmaterial (brytningsindex $n = 1.5$) omgiven av luft har en diameter på 2 cm och en fokallängd på 50 cm. Men som figuren ovan visar observerar man även ett svagt *spökfokus* (ghost focus) närmare linsen. Spökfokuset orsakas av den lilla andel ljus som först reflekteras i den buktiga ytan och sedan reflekteras i den plana ytan. Detta visas i den förstörade bilden av linsen.

(a) Bestäm med användande av TOK-modellen avståndet f_s från linsen till spökfokuset! Antag att paraxiella förhållanden alltid råder, vilket t.ex. medför att fasändringen vid reflektion har samma värde som vid normalinfall mot gränsytan. (8p)

(b) Uppskatta maxintensiteten i spökfokuset jämfört med maxintensiteten i huvudfokuset! (4p)

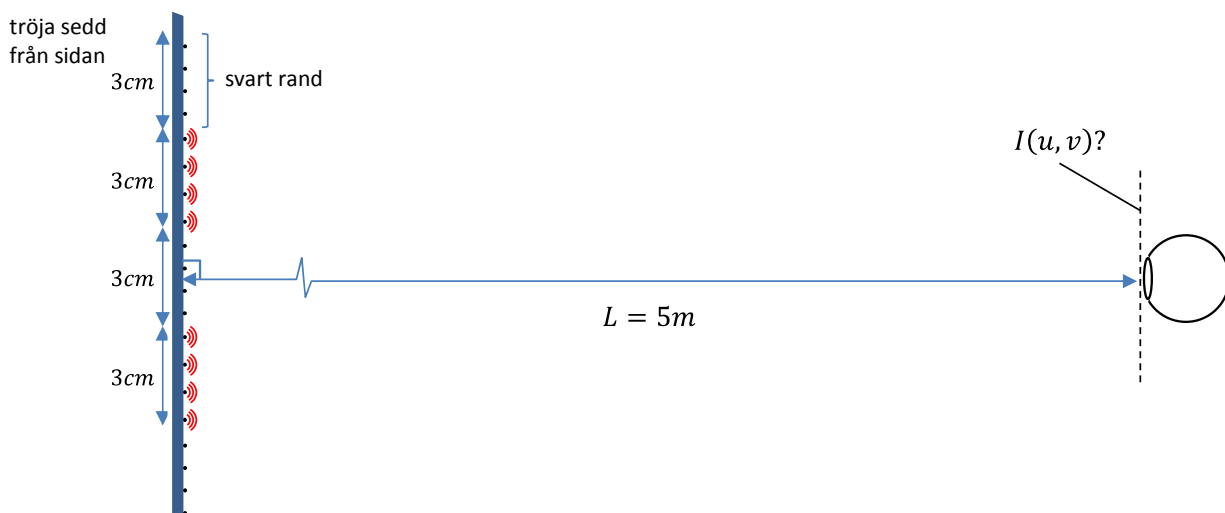


4. Förklaringen till **H&M**:s dåliga kvartalsrapport?



Föreläsaren står vid svarta tavlan i FB-salen och tittar på en kursdeltagare som bär en tröja med ett en-dimensionellt periodiskt (period $\Lambda = 6 \text{ cm}$) mönster, se bilden ovan. Mönstret består av 3 cm breda horisontella ränder i färgerna svart och vitt. Dagsljus kommer in genom fönstren och lysrören i taket är tända.

(a) Vilken intensitetsfördelning $I(u, v)$, i vanlig mening, ger ljuset från tröjan upphov till i ett plan precis framför föreläsarens öga? Skissa en typisk rumslig variation hos $I(u, v)$ över en yta på $10 \times 10 \text{ cm}$, och indikera en rimlig storlek och orientering hos eventuella detaljer. Om du tycker det förenklar, kan du anta att de vita ränderna har någon annan färg (utom svart!). (6p)



(b) Antag nu – totalt orealistiskt – att tröjan är perfekt plan och att klädkedjan H&M har utvecklat en metod att få alla punktkällor på dess yta att vara i perfekt fas med varandra vid oscillationsfrekvensen $f = 474 \text{ THz}$. Alla källor antas ha samma amplitud utom på de svarta ränderna där punktkällorna antas ha amplituden noll. Situationen visas i figuren ovan. Liksom i (a) ställer vi oss frågan: Vilken intensitetsfördelning $I(u, v)$, i vanlig mening, ger ljuset från tröjan upphov till i ett plan precis framför föreläsarens öga? Gör även här en ungefärlig skiss av en typisk rumslig variation hos $I(u, v)$ över en yta på $10 \times 10 \text{ cm}$. (6p)

Ledning till (b): Med Huygens-Fresnels princip, tänk ut en situation där virtuella punktkällor (HF-källor) i ett plan skulle bete sig på samma sätt som de fysiska punktkällorna i tröjans plan.

5. Är det galet med solglasögon på Pluto?

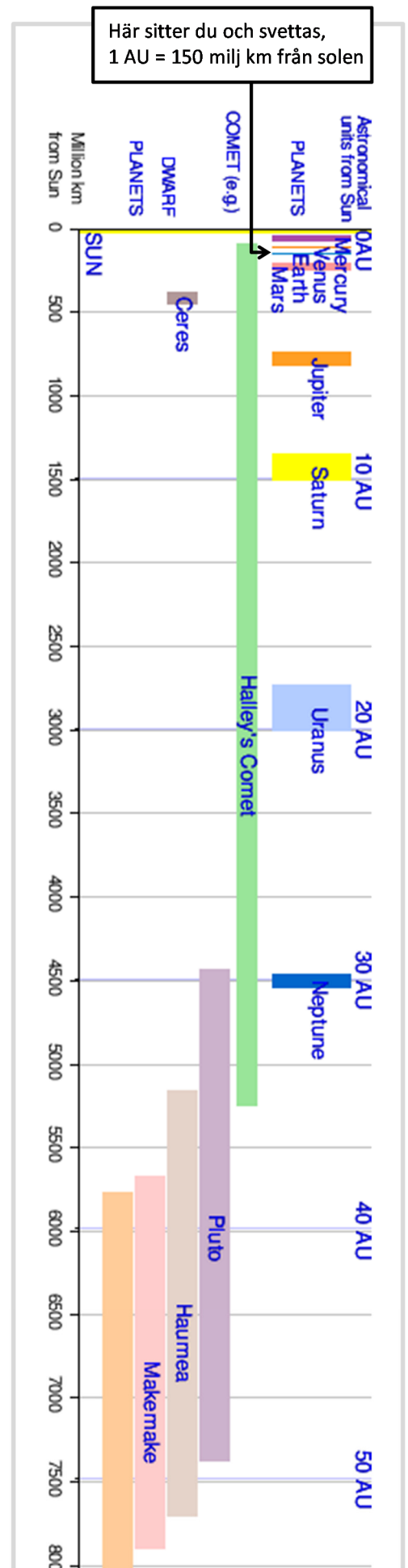


På vilket avstånd från solen har farligheten hos solljuset sjunkit till hälften av farligheten hos solljuset här på Jorden?

Vi antar i denna uppgift att farligheten hos solljuset definieras som *högsta intensiteten någonstans på näthinnan* när man tittar direkt mot solen. Bortse från eventuell inverkan av jordatmosfären. (12p)

Solsystemet enligt Wikipedia och HMXEarthScience.com

Celestial Object	Equatorial Diameter (km)	Mass (Earth = 1)	Density (g/cm ³)
SUN	1,392,000	333,000.00	1.4
MERCURY	4,879	0.06	5.4
VENUS	12,104	0.82	5.2
EARTH	12,756	1.00	5.5
MARS	6,794	0.11	3.9
JUPITER	142,984	317.83	1.3
SATURN	120,536	95.16	0.7
URANUS	51,118	14.54	1.3
NEPTUNE	49,528	17.15	1.8
EARTH'S MOON	3,476	0.01	3.3



Tentamen i Optik FFY091

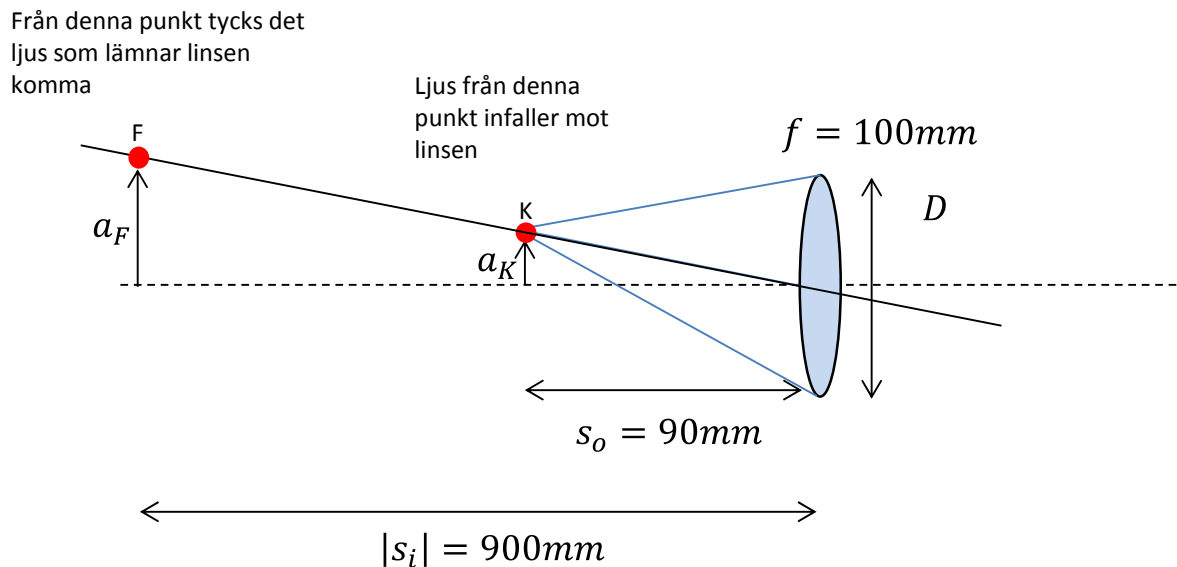
Tisdag 13 mars 2018, kl. 14:00-18:00

Diskussion och lösningsförslag

1. Raggargjuten i Rjukan

(a) Den ljusutsändande ytan på LEDen är en inkoherent ljuskälla. Den består av okorrelerade punktkällor som sänder ut ljus. För att ta reda på i stora drag hur ljuset från *en* punktkälla propagerar genom ett system med lins(er) kan vi använda geometrisk optik. En punktkälla sänder ut "laserljus" så ljuset kan interferera med sig själv och ge upphov till diffraktionsfenomen som t.ex. de karakteristiska ringningarna i övergången mellan ljusa och mörka områden som är typisk för fresnel-diffraktion. Dessa fina detaljer i intensitetsvariationen bortser vi ifrån i vår geometrisk-optiska betraktelse – de är ändå inte observerbara när intensiteten från massor av punktkällor överlagras.

Vi betraktar en punktkälla på den ljusutsändande LED-ytan, med avståndet a_K från symmetriaxeln. Den utgör en källa K för ljuset som går genom linsen. Var hamnar fokus F för det ljus som gått genom linsen?



där vi använt beteckningen s_o i stället för L för att använda standardbeteckningar från geometrisk optik. Från de två reglerna för läget av F enligt geometrisk optik fås

$$(1) \frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \Rightarrow s_i = -900\text{mm}$$

samt att

$$(2) \text{ F ligger på den räta linje som går genom K och linsens centrum.}$$

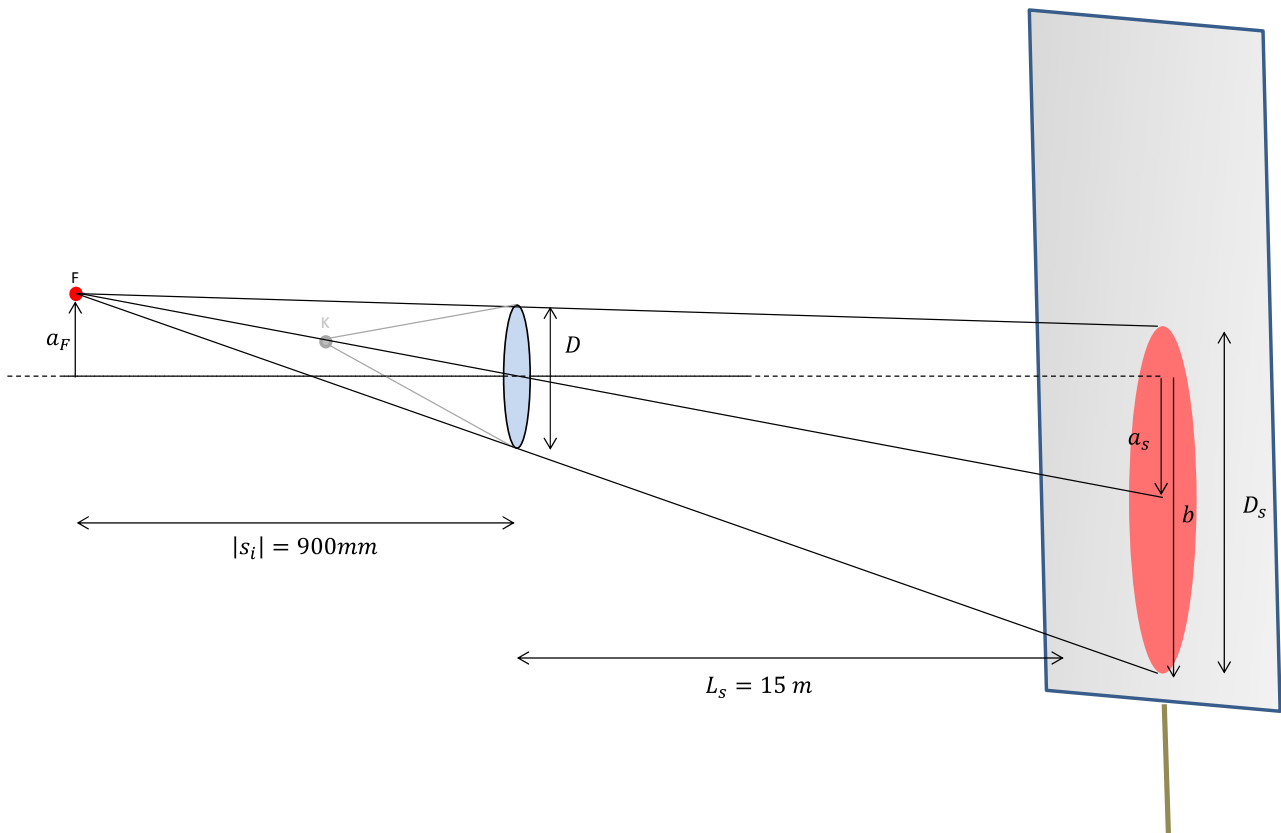
Eftersom $s_i < 0$ ligger F till vänster om linsen som visas i figuren ovan, där resultatet av regel (2) också använts. Likformiga trianglar ger alltså att laterala positionen a_F för F ges av

$$\frac{a_F}{a_K} = \frac{|s_i|}{s_o} \Rightarrow a_F = \frac{900\text{mm}}{90\text{mm}} a_K = 10a_K$$

Vi betraktar nu ljuset till höger om linsen, som efter att gått genom linsen verkar komma från F. Eftersom linsen har en begränsad diameter kommer ljuset från F att utgöra en kon. När ljuskonen skär planet där spegeln står får vi en cirkulärt belyst yta i planet, med diameter

$$D_s = D \frac{L_s + |s_i|}{|s_i|} = 50\text{mm} \frac{15\text{m} + 900\text{mm}}{900\text{mm}} = 0.88\text{m} \approx 1\text{m}$$

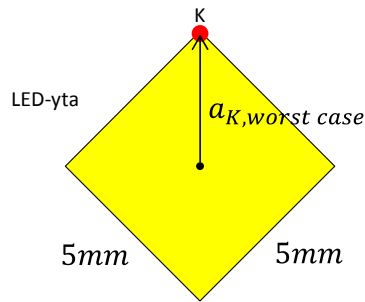
som fås ut likformiga trianglar enligt nedanstående skiss



Den cirkulärt belyst ytan får också en lateral förskjutning a_s , som med likformighet ges av skissen

$$a_s = a_F \frac{L_s}{|s_i|} = \left(\text{använd } \frac{a_F}{a_K} = \frac{|s_i|}{s_o} \text{ enligt ovan} \right) = a_K \frac{L_s}{s_o}$$

där det sista uttrycket visar att a_s hade kunnat inses direkt från K, utan att beräkna läget av F. Vi väljer nu "värsta möjliga läge" på K, alltså så långt från symmetriaxeln som möjligt:



d.v.s.

$$a_{K, worst\ case} = 5\text{mm} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 3.5\text{mm}$$

och alltså en förskjutning enligt ovan

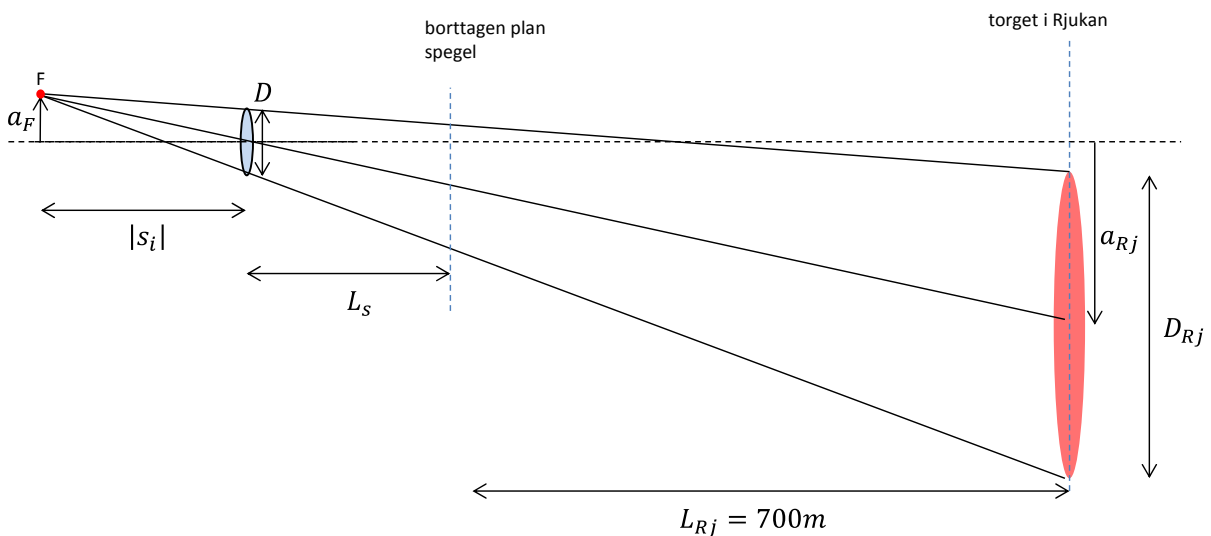
$$a_{s, worst\ case} = a_{K, worst\ case} \frac{L_s}{s_o} = 3.5\text{mm} \frac{15\text{m}}{90\text{mm}} = 0.58\text{m} \approx 0.6\text{m}$$

Det största avståndet från symmetriaxeln där det kan komma ljus i spegelplanet är alltså

$$b_{worst\ case} = a_{s, worst\ case} + \frac{D_s}{2} = 0.6\text{m} + \frac{1\text{m}}{2} = 1.1\text{m}$$

Eftersom avståndet från symmetriaxeln till någon kant på mitspegeln aldrig är mindre än halva kortsidans längd, d.v.s. aldrig mindre än $3\text{m}/2 = 1.5\text{m} > b_{worst\ case}$, kommer allt ljus från strålkastarlinsen att hamna på spegelytan.

(b) Vi viker på vanligt sätt ut strålgången genom att ersätta spegeln med en lins med samma fokallängd. Eftersom spegeln är plan har den oändlig fokallängd, och en lins med oändlig fokallängd är ju ingen lins alls, så vi låter bara ljuset propagera vidare ostört ända tills det kommer till torget.



Källan K ger alltså upphov till en cirkulär belysning på torget i Rjukan, helt i analogi med belysningen på spegeln. Den belysta diametern är enligt ovanstående figur

$$D_{Rj} = D \frac{L_{Rj} + L_s + |s_i|}{|s_i|} = 50\text{mm} \frac{700\text{m} + 15\text{m} + 900\text{mm}}{900\text{mm}} = 39.8\text{m} \approx 40\text{m}$$

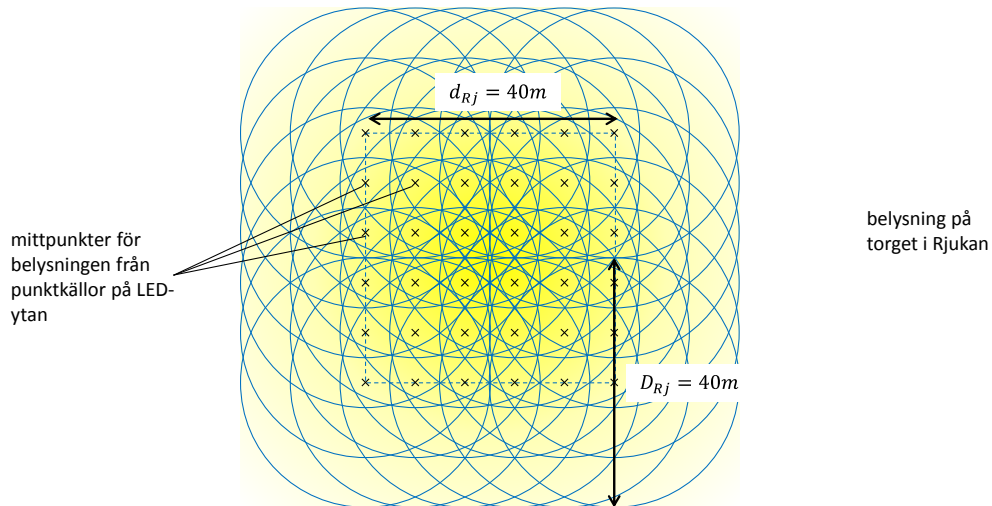
Förskjutningen av belysningens mittpunkt från symmetriaxeln blir

$$a_{Rj} = a_F \frac{L_{Rj} + L_s}{|s_i|} = \left(\text{som ovan } \frac{a_F}{a_K} = \frac{|s_i|}{s_o} \right) = a_K \frac{L_{Rj} + L_s}{s_o} = \frac{700\text{m} + 15\text{m}}{90\text{mm}} a_K = 7944 a_K \approx 8000 a_K$$

Att $a_{Rj} \approx 8000 a_K$ betyder att ljuset från punktkällorna på LED-ytan har sina mittpunkter inom en kvadrat på torget i Rjukan som är 8000 gånger så stor som LED-ytan. Alltså en kvadrat med sidan

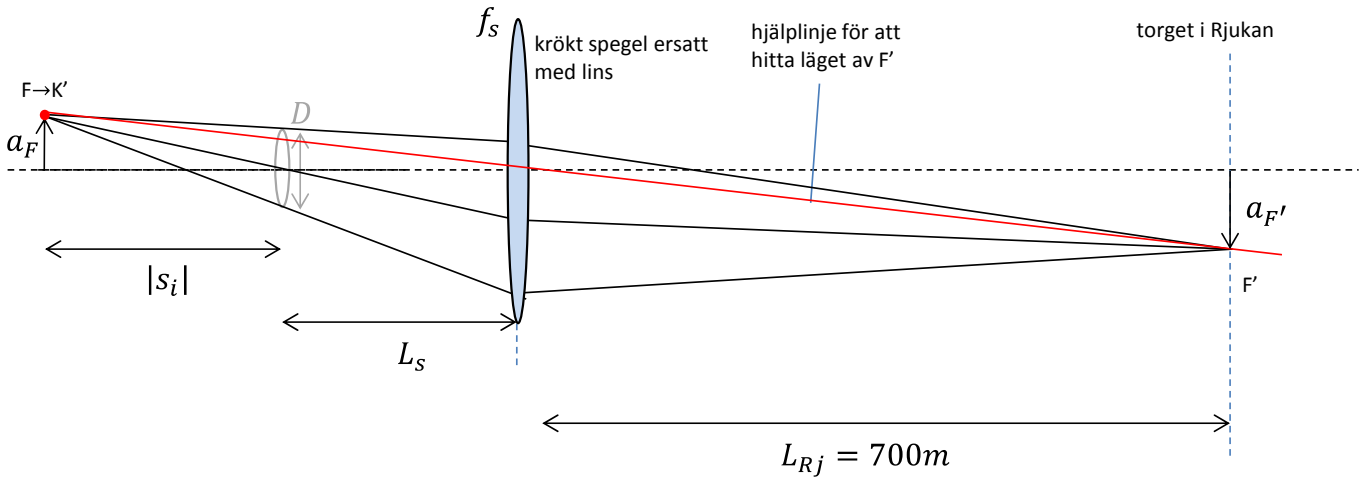
$$d_{Rj} = 5\text{mm} \times 8000 = 40\text{m}$$

Till detta kommer alltså att varje punktkälla sprider sitt ljus i en cirkel med diametern D_{Rj} som också råkar vara 40m! Belysningen på torget i Rjukan blir alltså nånting i stil med



där belysningen är starkare där många cirklar överlappar. Grovt sett är alltså cirka $80 \times 80\text{m}$ av torget belyst om man tar med även den ganska svaga belysningen i periferin.

(c) Nu får spegelytan en krökning p.g.a. vinden och fungerar då som en lens, om vi fortsätter att använda den utvikta strålgången. Den nya linsen ska åstadkomma en avbildning av den kvadratiska LED-ytan på torget. Detta innebär att ljuset från F, som nu är en källa K' för den nya linsen, ska fokuseras till en punkt F' (i geometrisk-optisk mening) på torget:



Med regel (1) från geometrisk optik, Gauss linslag, kan vi beräkna fokallängden f_s för att åstadkomma detta

$$\frac{1}{f_s} = \frac{1}{\text{avst från } K' \text{ till lins}} + \frac{1}{\text{avst från lins till torget}} = \frac{1}{|s_i| + L_s} + \frac{1}{L_{Rj}} = \frac{1}{900\text{mm} + 15\text{m}} + \frac{1}{700\text{m}} \Rightarrow f_s = 15.5\text{m}$$

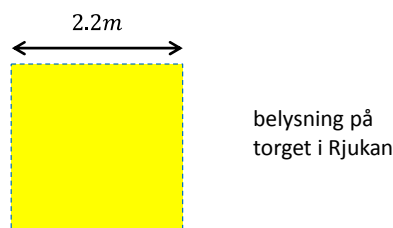
Fokallängden hos en spegel är halva krökningsradien, så krökningsradien är $R_s = 31\text{m}$.

Avståndet från symmetriaxeln, $a_{F'}$, ges av regel (2) från geometrisk optik som säger att F' ligger på en rät linje genom linscentrum och K', vilket visas av den röda linjen i figuren ovan. Vi får

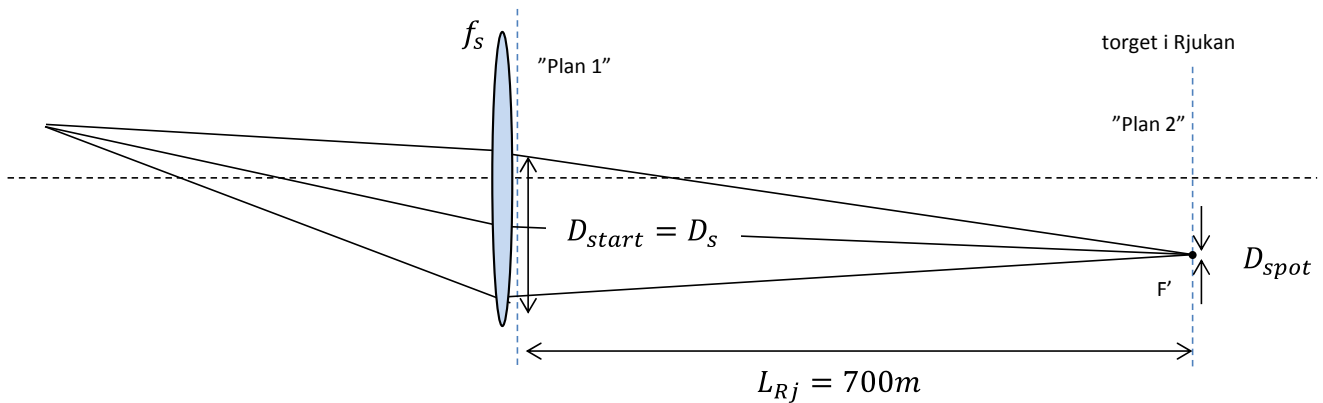
$$a_{F'} = a_F \frac{L_{Rj}}{|s_i| + L_s} = \left(\frac{a_F}{a_K} = \frac{|s_i|}{s_o} \right) = a_K \frac{|s_i| L_{Rj}}{s_o(|s_i| + L_s)} = \frac{900\text{mm} \times 700\text{m}}{90\text{mm} \times (900\text{mm} + 15\text{m})} a_K = 440 a_K \equiv M_{system} a_K$$

Eftersom det optiska systemet med två lins åstadkommer en avbildning av objektet på torget är kvoten mellan en position i bilden på torget, $a_{F'}$, och motsvarande position på LED-ytan, a_K , det avbildande systemets förstoring M_{system} . Enligt ovanstående beräkning är förstoringen alltså $M_{system} = 440$ gånger. Det betyder att LED-ytan avbildas som en ljus kvadrat på torget med sidan

$$5\text{mm} \times M_{system} = 2.2\text{m}$$



Man kan förstås undra hur väl varje punktkälla blir fokuserad till en prick på torget. Om spegeln är perfekt krökt för att fokusera på torget ges prickens storlek av tumregeln för minsta sponse

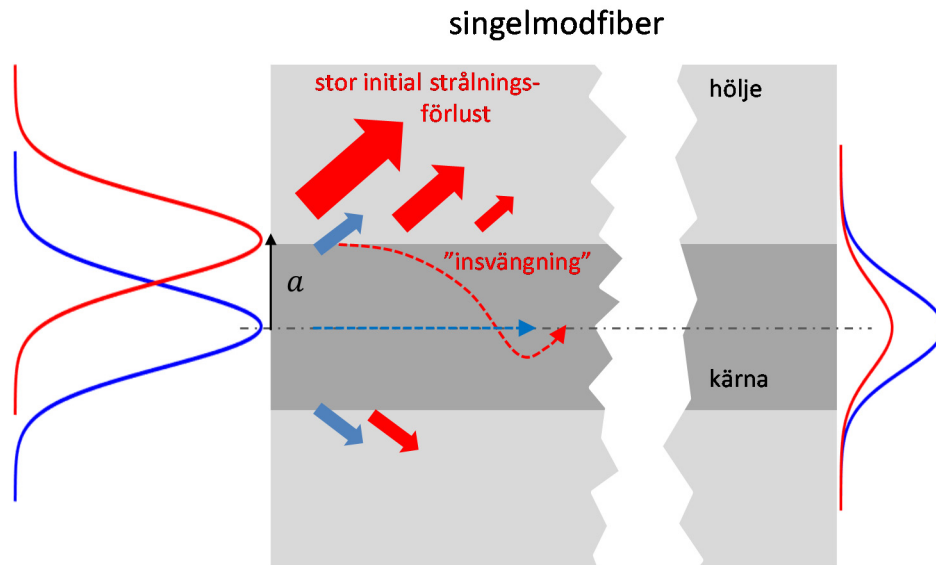


$$D_{spot} \approx 1 \frac{\lambda}{D_{start}} L_{Rj} = (D_{start} = D_s \approx 1m) = \frac{550nm}{1m} 700m = 0.4mm \approx 1mm$$

eftersom startfältets utbredning är lika med utbredningen av det infallande fältet på spegeln D_s . Begränsningslinjen av den $\sim 2 \times 2$ meter stora kvadratiske belysningen på torget är oskarp över en sträcka $\sim D_{spot}$, vilket knappast är observerbart för nattvandrarerna: kvadraten på torget är knivskarp! (...under dessa starkt idealiserade förhållanden...)

2. Optiska fibrer

(a) En singelmodfiber har bara *en* fältfördelning som kan propagera utan strålningsförluster, den s.k. fundamentalmoden. Oavsett vad vi har för infält kommer det propagerade fältet efter tillräckligt lång sträcka att ha ställt in sig, genom att göra sig av med energi, så att dess fältfördelning motsvarar fundamentalmodens. I HUPP5 såg vi att det räckte med en propagation på några millimeter för att fältet skulle ställa in sig på fundamentalmoden, med samma våglängd på ljuset och samma fiberparametrar som anges i uppgiften.



Dock, eftersom propagationen inte påverkas av att fältet multipliceras med en konstant kan två fält som ställt in sig, E_{ut} och \tilde{E}_{ut} , skilja sig åt på just dessa sätt. Däremot måste de ha samma läge i y -led, d.v.s.

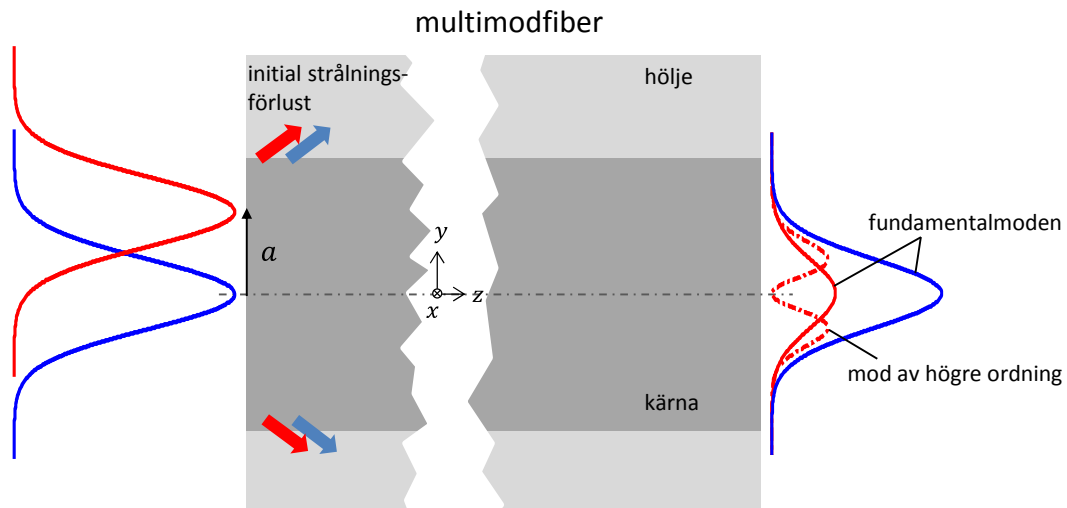
$$c_2 = 0$$

Eftersom \tilde{E}_{in} inte är centrerat kring kärnan kommer en stor del av detta fält snabbt att stråla ut mot fiberns periferi och gå förlorat. För E_{in} kommer en större del av fältet att fångas upp av kärnan. Det betyder att amplituden hos \tilde{E}_{ut} är lägre än hos E_{ut} eftersom en större del av effekten har gått förlorad i strålningsförluster, d.v.s.

$$\tilde{A}(x, y) = c_1 A(x, y) \text{ där } 0 < c_1 < 1$$

(b) I en multimodfiber finns det *flera* fältfördelningar (d.v.s. moder) som kan propagera utan strålningsförluster. I allmänhet kommer flera av dessa att finnas i det fält som ställer in sig i fibern efter lång propagation, men den inbördes styrkan på dessa fält bestäms av hur infältet såg ut. Ett rotationssymmetriskt och centrerat infält, som E_{in} , ger ofta en helt dominerade fundamentalmod, medan det puttade infältet \tilde{E}_{in} förmodligen ger upphov till flera starka moder som propagerar

tillsammans. Det beror på att det puttade infältet approximativt kan ses som en summa av fundamentalmoden och första högre ordnings mod, nämligen när moderna har en sådan fasrelation att en av loberna i högre ordnings mod interfererar konstruktivt med fundamentalmoden så att totala fältets maximum är förskjutet i y -led. Se "MMI" nedan.



Eftersom dessa moder har olika fasändring per längdenhet ($\equiv k_0 n_{eff,m}$, som är olika för att de olika moderna har olika effektiva index $n_{eff,m}$) blir resultatet ett interferensmönster i (x, y) -planet som varierar kraftigt i z -led: Fenomenet kallas *multimodinterferens* (MMI), som vi simulerade i HUPP5. Beroende på exakt var fibern slutar kan vi alltså få helt olika utseende på $\tilde{E}_{ut}(x, y)$.

(c) Enligt föreläsning F2 bygger HFM på att vi direkt summerar bidragen från HF-källorna i Plan 1 för att få fältet i Plan 2. Inte förrän när vi gör paraxiella approximationen kommer uttrycket för fältet i Plan 2 att bli en fouriertransform

$$E_2(u, v) = c_{HFM} \iint_{x,y} E_1(x, y) \cdot \frac{e^{jkr}}{r} dx dy = \{\text{paraxiellt: } L \gg x, y, u, v\} \Rightarrow \text{fouriertransform}$$

vilken sedan kan beräknas numeriskt med FFT-algoritmen. Problemet är att i BPM tar vi oftast mycket små steg. D.v.s. avståndet mellan Plan 1 och Plan 2, L , är mycket litet, t.ex. i HUPP5 var steglängden L , som vi kallade $\Delta z \sim 1 \mu\text{m}$. Detta är *inte* mycket större än de laterala avstånden x, y, u, v , och alltså gäller inte den paraxiella approximationen som gör om integralen ovan till en fouriertransform.

En annan möjlig komplikation är att när man använder FFT för HFM-formuleringen så beror samplingsavståndet i Plan 2, b , på L (alltså Δz), vilket nämns i F2. Använder man däremot PAS fås som bekant $b = a$, vilket är praktiskt när man simulerar guidade fält som inte expanderar vid

propagation. Men eftersom redan formuleringen av HFM som fouriertransform är ogiltig för små propagationssteg är egentligen komplikationen med varierande samplingsavstånd i FFT-formuleringen mest av "akademiskt intresse".

(d) BPM, och nästan alla andra simuleringsmetoder, beräknar fältet på komplex form. Filmen ska däremot visa fältets utseende vid en sekvens av tidpunkter, d.v.s. det komplexa fältet måste göras om till ett tidsberoende. Receptet för detta är: Vid varje tid t fås värdet på fältet, $E(t, x, y, z)$, från det komplexa fältet, $E(x, y, z)$, som

$$E(t, x, y, z) = \text{Re}\{E(x, y, z)e^{-j\omega t}\}; \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda} = k_0 c$$

där ω är vinkelfrekvensen hos det tidsharmoniska fältet, och minustecknet i exponenten är kursens teckenkonvention för att vi generellt ska kunna säga att "fasen ökar i propagationsriktningen" (som vi t.ex. använder oss av när vi härleder fasmoduleringsfunktionen $\varphi(x, y)$ för olika TOKar).

(e) Det tidsupplösta fältet är det verkliga fältet vid en viss tidpunkt (sånär som på att vi betraktar fältet som en skalär, d.v.s. inte bryr oss om dess polarisationsriktning). Det betyder t.ex. att fältet är noll två gånger per våglängd i propagationsriktningen (här: z -led). Detta måste vi kunna upplösa i vår plot av fältet, annars kan vi få underliga fenomen som att fältet tycks ha en onaturligt stor våglängd eller att vågorna ser ut att röra sig åt fel håll (vänster istället för höger), som vi demonstrerade i samband med HUPP5.

Vi behöver alltså ha en steglängd i z -led, $\Delta z_{\text{upplöst}}$, som är tillräckligt liten för att vi ska kunna se alla nollställen hos fältet, alltså

$$\Delta z_{\text{upplöst}} \ll \lambda \quad \text{säg t.ex.} \quad \Delta z_{\text{upplöst}} = \frac{\lambda}{10} = \frac{\left(\frac{\lambda_0}{n_{\text{eff}}}\right)}{10} = \{n_{\text{eff}} \approx n_{\text{core}} \approx n_{\text{clad}} \approx 1.5\} = \frac{\left(\frac{1550\text{nm}}{1.5}\right)}{10} \approx 100\text{nm}$$

Som alltid anges våglängden som vakuumvåglängden, så i detta fall är alltså vakuumvåglängden $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$. I fibern, som består av glas (kvarts) med brytningsindex ≈ 1.5 , saktas ljusvågen ner och våglängden blir därför motsvarande kortare, alltså $\sim 1\mu\text{m}$.

Men vår BPM-simulering hade en steglängd i z -led, Δz_{BPM} , som var

$$\Delta z_{\text{BPM}} = \frac{1\text{mm}}{500} = 2\mu\text{m}$$

eftersom det simulerade området är 1mm i z -led enligt figur, och vi enligt uppgift beräknat fältet i 500 på varandra följande (x, y) -plan med hjälp av BPM. Uppenbart är $\Delta z_{\text{BPM}} \gg \Delta z_{\text{upplöst}}$. Ja, Δz_{BPM} är ju t.o.m. större än hela våglängden så vi kan uppenbarligen inte upplösa fältets variation i z -led. Vill vi göra detta måste vi förmodligen nöja oss med att simulera en kortare sträcka än 1mm i z -led

så att vi kan ta tätare BPM-steg i z-led (med steglängd ner mot $\Delta z_{upplöst}$) utan att datorminnet tar slut och körningstiden blir för lång.

3. Spöken finns!

(a) Vi börjar med att bestämma linsens tjockleksvariation, $s_1(r)$ och $s_2(r)$, genom att betrakta ljuset som går genom linsen på vanligt sätt. TOK-modellen ger att fasmoduleringen hos ljuset som går genom linsen på radiella avståndet r är

$$\varphi(r) = k_0 n \cdot s_1(r) + k_0 \cdot s_2(r) = k_0 n \{T - s_2(r)\} + k_0 \cdot s_2(r) = k_0 n T - k_0 (n - 1) s_2(r)$$

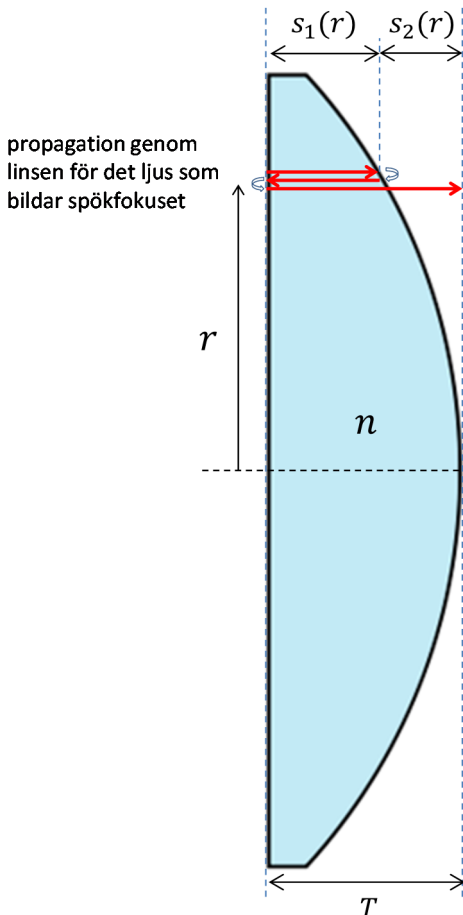
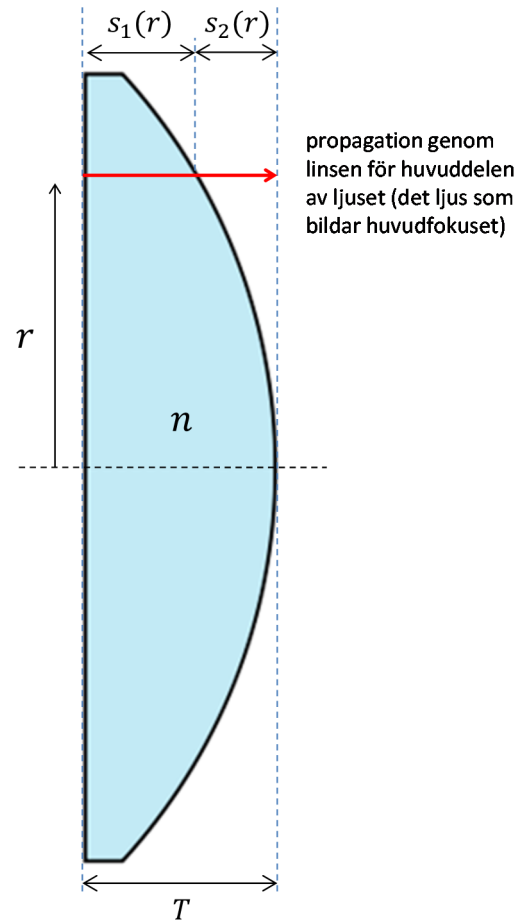
eftersom den första sträckan går i glas, brytningsindex n vilket ger "fasändring per längdenhet" lika med $k_0 n$.

Eftersom vi vet att detta ljus fokuseras på sträckan f , måste fasmoduleringen $\varphi(r)$ vara fasmoduleringen hos en lins med fokallängden f , alltså

~~$$k_0 n T - k_0 (n - 1) s_2(r) = \varphi_{lins,f} = -k_0 \frac{r^2}{2f}$$~~

där vi stryker konstanten i uttrycket för $\varphi(r)$ eftersom vi strök konstanten när vi härledde uttrycket för $\varphi_{lins,f}$. Vi får alltså

$$s_2(r) = \frac{r^2}{2(n - 1)f}$$



Nu kan vi bestämma fasmoduleringen som det reflekterade ljuset känner vid passagen genom linsen, från inplanet till utplanet. Fasmoduleringen blir

$$\varphi_s(r) = k_0 n \cdot s_1(r) + \varphi_{refl,b}(r) + k_0 n \cdot s_1(r) + \varphi_{refl,p} + k_0 n \cdot s_1(r) + k_0 \cdot s_2(r)$$

Det nya jämfört med fallet ovan är de fyra första termerna. Dessa representerar

1. propagation från vänsterkanten till den buktiga ytan första gången,
2. eventuell fasändring vid reflektion i buktiga ytan, $\varphi_{refl,b}(r)$,
3. propagation tillbaka till vänsterkanten,
4. eventuell fasändring vid reflektion i plana ytan, $\varphi_{refl,p}$.

Vidare sa vi att fasändringen vid reflektioner har samma värde som för normalinfall mot gränssytan. Det betyder att $\varphi_{refl,b}(r) = \varphi_{refl,b}(0) = \varphi_{refl,p}$, där det ursprungligen indikerade r -beroendet hos $\varphi_{refl,b}$ kommer sig av att ljuset infaller allt snedare mot den buktiga ytan när r ökar, och därmed skulle också fas (och amplitud) hos det reflekterade fältet kunna ändras. Men paraxiellt, vilket innebär att linsen är så pass svag att högerytan inte är starkt buktig, kan vi försumma detta beroende.

Vi får alltså

$$\begin{aligned}\varphi_s(r) &= 3 \cdot k_0 n \cdot s_1(r) + 2 \cdot \varphi_{refl,p} + k_0 \cdot s_2(r) = 3 \cdot k_0 n \cdot \{T - s_2(r)\} + 2 \cdot \varphi_{refl,p} + k_0 \cdot s_2(r) = \\ &= \cancel{3 \cdot k_0 n \cdot T} + \cancel{2 \cdot \varphi_{refl,p}} - k_0(3n - 1)s_2(r)\end{aligned}$$

där vi som vanligt stryker ointressanta konstanta termer. Värdet på $\varphi_{refl,p}$ spelar alltså ingen roll, men i detta fall skulle ändå $\varphi_{refl,p} = 0$ eftersom reflektionen sker från "tjockare" medium (glas, med högre brytningsindex) till "tunnare" medium (luft, med lågt brytningsindex).

Sätter vi in uttrycket för $s_2(r)$ från ovan fås

$$\varphi_s(r) = -k_0(3n - 1) \frac{r^2}{2(n - 1)f} \equiv -k_0 \frac{r^2}{2f_s}$$

där vi i sista likheten säger att fasmoduleringen ska motsvara den hos en lins med (den än så länge okända) fokallängden f_s , d.v.s. en lins som fokuserar kollimerat ljus till ett fokus på sträckan f_s . Vi får

$$f_s = \frac{(n - 1)f}{(3n - 1)} = \frac{(1.5 - 1)50cm}{3 \cdot 1.5 - 1} \approx 0.14 \cdot 50cm = 7cm$$

Den extra fram- och tillbakapropagationen i linsen ger alltså en fasmodulering som svarar mot en betydligt starkare lins!

(b) Vi antar att fokuseringen fungerar idealt både för huvudfokuset och spökfokuset, d.v.s. att respektive fälts HF-källor i planet efter linsen (TOKens utplan) interfererar konstruktivt i huvudfokuset respektive spökfokuset. Speciellt för spökfokuset, där den starkare fokuseringen gör att propagationen avviker mer från paraxiell, är detta kanske ett tveksamt antagande, men vi gör det i alla fall eftersom uppgiftstexten uttryckligen säger att det är OK att anta paraxiella förhållanden.

Eftersom reflektionerna i glas-luftytan sker under nära normalt infall använder vi Fresnels ekvationer för just normalinfall; effektreflektionen (reflektansen) vid glas-luft-övergången blir då

$$R = \left(\frac{n_{glas} - n_{luft}}{n_{glas} + n_{luft}} \right)^2 = \{\text{med våra beteckningar}\} = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 = \left(\frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} \right)^2 = 0.04$$

d.v.s. 4%, en siffra som nästa alla i optikvärlden känner till eftersom glas är så vanligt förekommande. Eftersom vi har två reflektioner blir effekten i spökfokus

$$\eta_{effekt} = R \cdot R = 0.04^2 = 0.0016$$

av effekten i huvudfokus. Men för att jämföra *intensiteterna* måste vi också ta hänsyn till att spökfokuset har en mindre utbredning hos sitt fokus eftersom det ligger närmare linsen. Enligt tumregeln om minsta spotsize har ett perfekt fokus en (linjär) utbredning som är proportionell mot "L", d.v.s. avståndet till linsen. Areamässigt är alltså spökfokuset komprimerat en faktor

$$\kappa = \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 = \left(\frac{50\text{cm}}{7\text{cm}}\right)^2 \approx 50$$

Eftersom intensitet är effekt per area, leder areakompressionen till samma höjning av intensiteten, d.v.s. intensiteten i spökfokus blir

$$\eta_{intensitet} = \eta_{effekt} \cdot \kappa = 0.0016 \cdot 50 = 0.08$$

av intensiteten i huvudfokus, alltså så pass hög som ~10% av huvudfokusets intensitet.

4. Förklaringen till *H&M*:s dåliga kvartalsrapport?

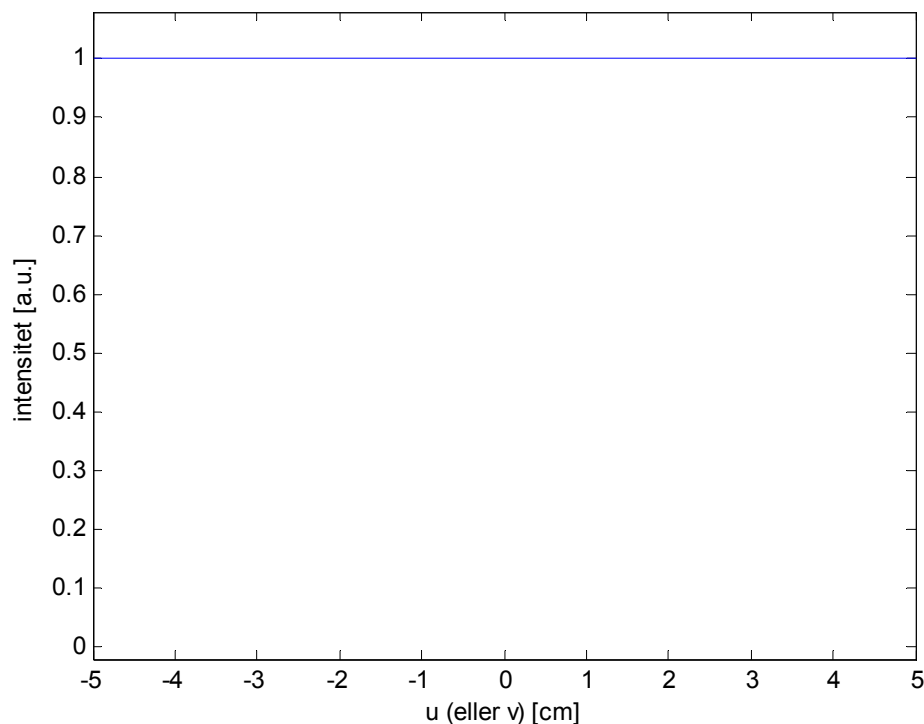
(a) Det första man ska inse är att intensitetsfördelningen framför ögat är *helt annorlunda* än det vi ser, dvs intensitetsfördelningen på näthinnan. Ögat är ju ett avbildande system som separerar ljuset som kommer in i olika vinklar, d.v.s. från olika punktkällor på objektet, till olika positioner på näthinnan.

Framför ögat, däremot, överlappar de sfäriska vågorna från tröjans punktkällor. Varje punktkälla för sig ger en praktiskt taget konstant intensitetsfördelning över en yta av $10 \times 10 \text{ cm}$ på 5 meters avstånd från punktkällan eftersom gångvägen r från punktkällan till någon punkt på den $10 \times 10 \text{ cm}$ stora ytan varierar så lite att intensiteten, som varierar som $\sim 1/r^2$, är i det närmaste konstant.

Vidare är ingen interferens är observerbar mellan fälten från olika punktkällor eftersom punktkällorna "drivs" av vanligt, inkoherent, ljus från omgivningen (dagsljus plus taklampor). Punktkällornas fasrelation ändras alltså så snabbt att det instantana interferensmönstret totalt suddas ut under alla realistiska observationstider. Tar man tidsmedelvärdet för den instantana intensitetsfördelningen – det vi kort och gott kallar "intensiteten" från inkoherenta källor – erhålls därför summan av intensitetsfördelningarna (ej fältfördelningarna) från källorna var för sig. Och eftersom varje källa ger en konstant fördelning blir också summan en väldigt konstant intensitetsfördelning.

$$\therefore I(u, v) = \text{const}$$

En snygg plot på detta:



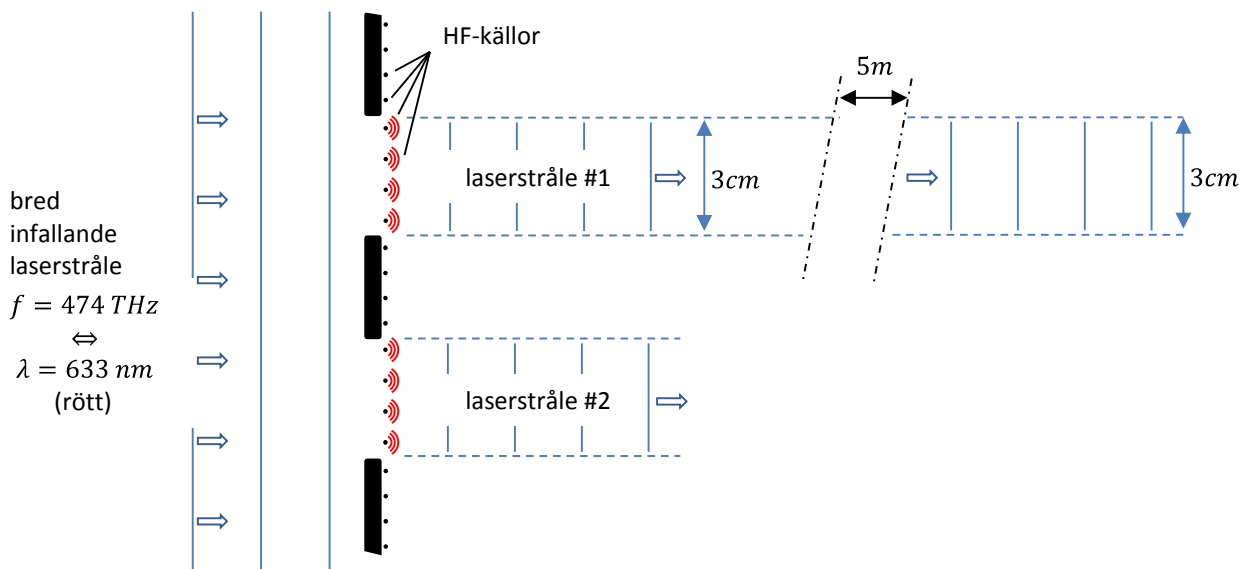
(b) Eftersom alla källor är i fas har vi koherent ljus. När vi i detta fall frågar efter intensiteten "i vanlig mening" så är det ingen tvekan om vad som avses eftersom intensiteten (E -fältets belopp i kvadrat) är konstant i tiden, så den tidsmedelvärdesbildade intensiteten är identisk med den instantana.

Liksom i fallet i (a) sänder varje punktkälla ut en sfärisk våg i alla riktningar. Men nu interfererar källorna stabilt och ger ett "interferensmönster" som är helt annorlunda jämfört med fältet från en enskild punktkälla: eftersom källorna har samma fas interfererar de konstruktivt endast i riktningar som ligger nära "rakt-fram-riktningen". Alltså precis samma situation som hos en kollimerad laserstråle, se Ekvivalent fall #1 nedan.

Den givna situationen är helt orealistisk, men med Huygens-Fresnels princip (HF:s princip) kan vi tänka oss några ekvivalenta fall som kanske känns mindre långsökta:

Ekvivalent fall #1

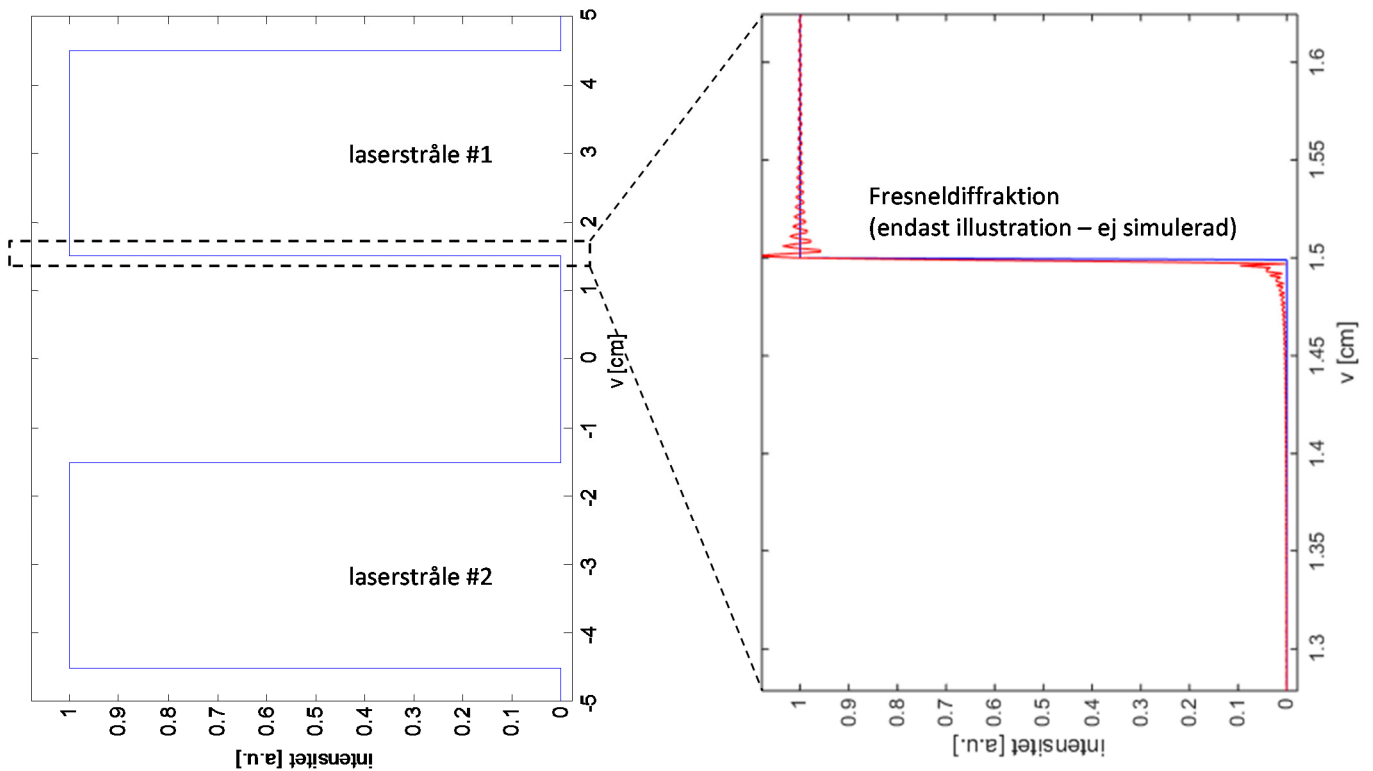
En kraftigt expanderad, kollimerad laserstråle infaller normalt mot ett "spjalstaket" bestående av en uppsättning 3 cm breda blockerande stavar med 3 cm luft emellan:



Enligt HF:s princip drivs de virtuella HF-källorna av infallande fält, vilket är noll bakom en blockerande stav och konstant (och skilt från noll) efter en öppning i spjalstaketet. De senare HF-källorna har alltså samma amplitud och fas. HF-källorna är alltså identiskt lika med de fysiska källorna på tröjan och skapar alltså samma fält vid den vidare propagationen åt höger.

Som indikerats kan det ljus som passerat *en* av öppningarna ses som en kollimerad laserstråle med en utsträckning av 3 cm i y -led och ännu längre utsträckning i x -led. Hur propagerar en sådan stråle över en sträcka på 5 meter? Ja, en laserstråle som har en utsträckning på 3 cm är en *bred* stråle. Och ju större bredd en kollimerad stråle har, desto mindre är tendensen att breddas när den propagerar enligt tumreglerna (divergensvinkeln $\theta_{min} \sim 1/D_1$). Vi har ju på föreläsningarna sett en röd laser med betydligt smalare stråle (2 mm diameter?) som knappast breddas över en sträcka av ett par meter. Alltså kan vi säkert säga att vår laserstråle har en helt försumbar breddning fram till föreläsaren (och därmed heller ingen interferens med laserstrålen från närliggande öppningar i staketet) utan behåller sin tvärsnittsintensitet från startplanet. Alltså fås en intensitetsvariation i v -led framför föreläsaren

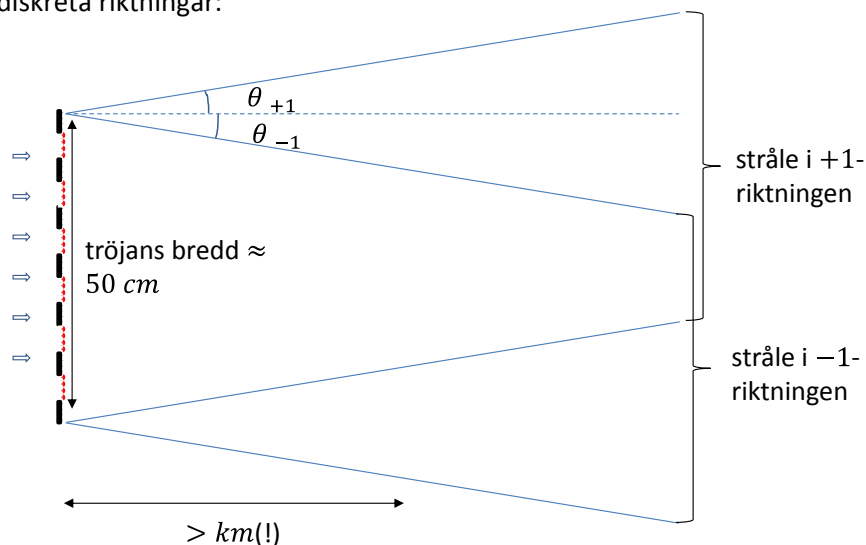
öga som är så gott som identisk med den i startplanet precis efter de blockerande stavarna, se figuren till vänster nedan:



Den högra, "inzoomade" (men fejkade), bilden är lite överkurs. Den vill illustrera att man förmodligen får de klassiska ringningarna i övergången mellan ljus och mörker som man alltid får bakom laserbelysta föremål. Detta är ett exempel på *Fresnel diffraction*, eftersom vi befinner oss nära objektet, alltså på ett avstånd som är mycket kortare än det avstånd som krävs för att vi ska erhålla fjärrfältet.

Men kan man inte använda gitterekvationen, då?

Jo, förutsättningarna i "Plan 1" är uppfyllda: koherent, normalt infallande ljus som amplitudmoduleras av en periodisk endimensionell struktur. Vi kommer alltså att få breda utgående strålar i olika diskreta riktningar:



Men den gigantiska perioden (6cm) gör spridningsvinklarna extremt små. Enligt gitterekvationen fås

$$m \lambda = \Lambda \sin \theta_m \Rightarrow \theta_{+1} = \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{633nm}{6cm} = 10^{-5} rad$$

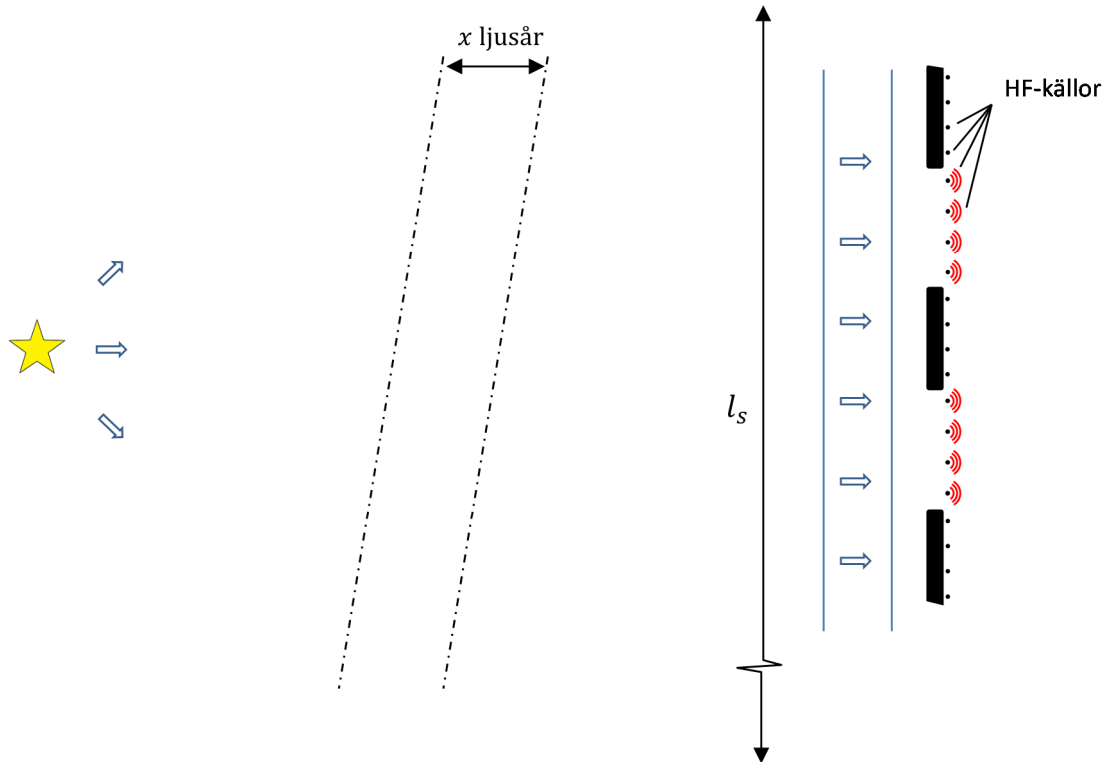
d.v.s. de första ordningarna ($m = \pm 1$), som är de helt dominerande tillsammans med nollte ordningen för ett binärt amplitudgitter med 50% duty cycle, har separerat ca

$$(\theta_{+1} - \theta_{-1}) L = 0.1mm$$

efter att ha propagerat $L = 5m$ fram till föreläsaren. I jämförelse med strålarnas bredd, som är samma som tröjans utsträckning, kanske $\sim 50 cm$, är det fullkomligt försumbart – man måste avlägsna sig *mycket* längre från tröjan innan uppdelningen i olika ordningar blir observerbar, av storleksordningen flera kilometer, vilket indikerats i figuren ovan!

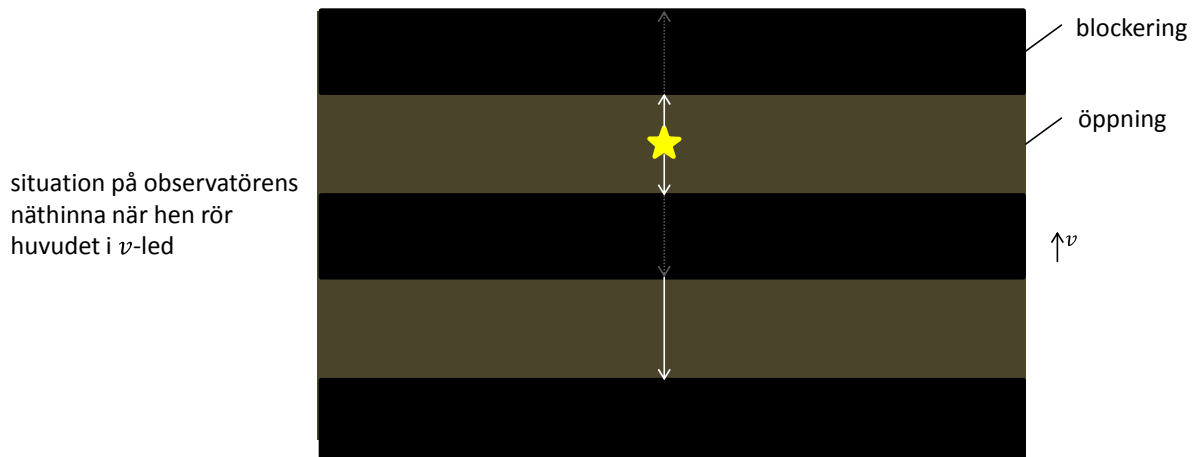
Ekvivalent fall #2

Detta fall är egentligen samma fall som Ekvivalent fall #1, fast i en specifik situation som vi förhoppningsvis alla kan tänka oss. Nämligen om vi en mörk kväll tittar på en stjärna genom spjälstaketet (eller kanske någon typ av persienn med samma periodiska blockering av ljuset):

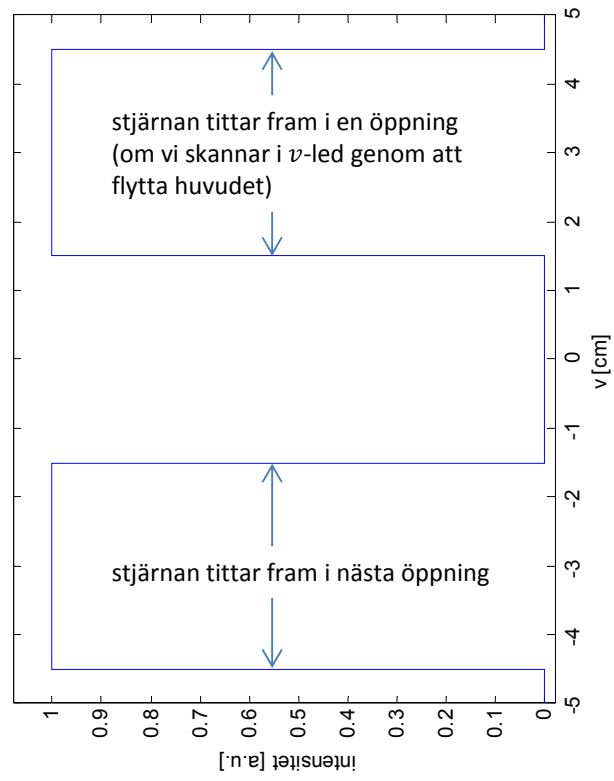


Ljuset från stjärnan är mycket nära en plan våg när det kommer till Jorden. Från HUPP4 vet vi också att spatiella koherenslängden l_s är ett par meter för de allra största stjärnorna sett från Jorden (och ännu längre för de som upptar en mindre synvinkel). Alltså är fältet koherent över hela spjälstaketet, alla HF-källor är alltså i fas. Vi har därmed precis samma situation som i fall #1.

Men här vet vi av vår egen erfarenhet hur det ser ut när vi tittar på stjärnan. Det är ju väldigt enkelt: antingen är stjärnan helt blockerad av en spjäl, och då ser vi ingenting. Eller så ser vi stjärnan mellan två spjälor i sin fulla glans.



Vi kan alltså med vår vardagserfarenhet dra slutsatsen att intensiteten framför ögat (obs: *framför* ögat – inte på näthinnan!) ser ut som



5. Är det galet med solglasögon på Pluto?

Solen är en inkoherent ljuskälla. Varje punktkälla sänder ut en sfärisk våg vars E-fält avtar med avståndet L som $\sim 1/L$, varför intensiteten avtar med kvadraten på avståndet $\sim 1/L^2$. Eftersom den totala intensiteten fås som summan av intensiteterna för alla punktkällorna avtar den också med kvadraten på avståndet. (Denna slutsats kan också dras från ett energiresonemang.)

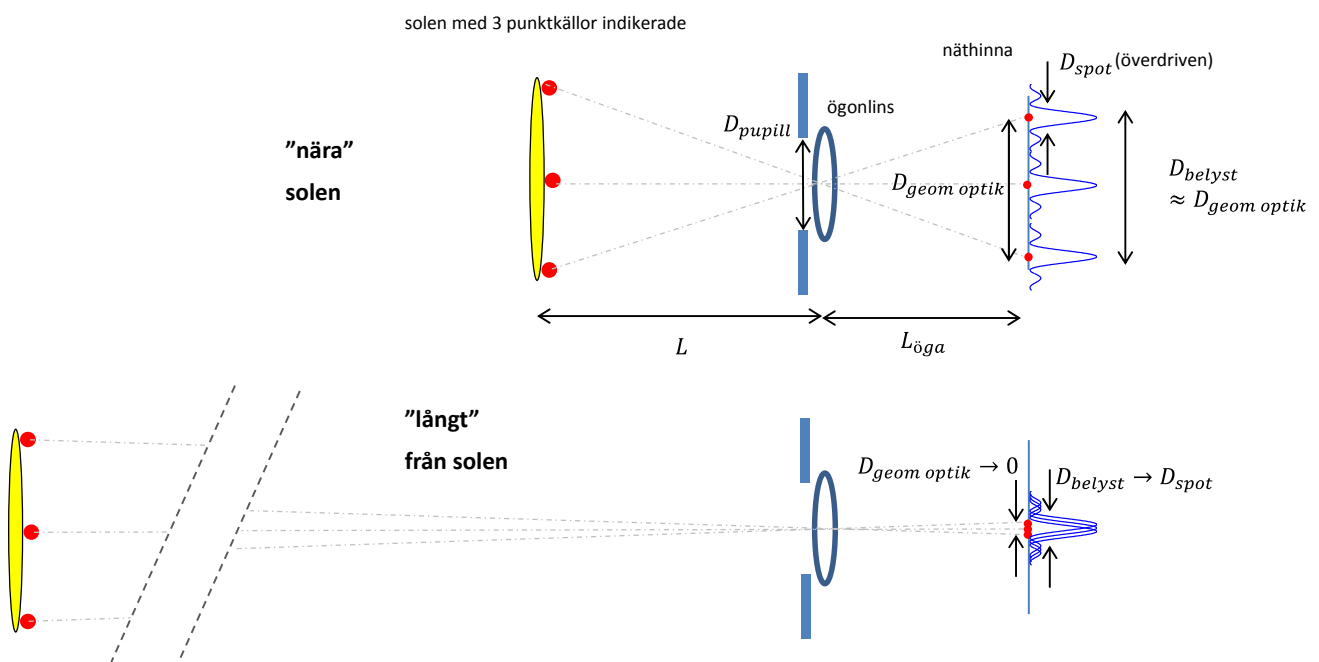
Det betyder att intensiteten hos solljuset sjunkit till hälften, jämfört med på jorden, på ett avstånd från solen som är $\sqrt{2}$ gånger större än avståndet sol-jord, d.v.s. $\sqrt{2} \cdot 150 \text{ milj km} = 210 \text{ milj km}$. Detta är ungefär avståndet som vår yttre grannplanet Mars har till solen.

Men detta gäller intensiteten framför ögat, medan *farligheten* gällde intensiteten på näthinnan. På näthinnan finns en bild av solen. Bilden av solen krymper linjärt med avståndet när vi ökar avståndet till solen, dvs den belysta arean avtar som avståndet i kvadrat. Intensiteten i bilden på näthinnan blir

$$I_{\text{näthinna}} = \frac{\text{ljuseffekt genom pupill}}{\text{area som ljuset fördelar sig på}} = \frac{I_{\text{framför öga}} A_{\text{pupill}}}{A_{\text{bild}}} \sim \frac{(1/L^2) A_{\text{pupill}}}{1/L^2} = \text{konstant!}$$

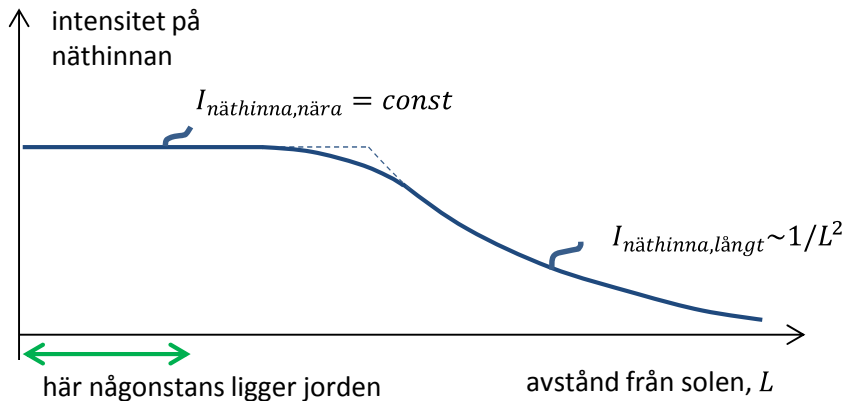
om vi antar att pupillens diameter inte ändras med ljusförhållandena. Om vi avlägsnar oss från solen fördelas alltså det svagare solljuset på en mindre yta på näthinnan så att intensiteten är densamma.

Men kan detta verkligen fortsätta hur långt som helst? Nej, den belysta arean på näthinnan kan inte bli hur liten som helst:



Är vi tillräckligt långt från solen uppfattas inte solen längre som en skiva utan bara som en lysande punkt. Som nedre bilden visar går visserligen storleken av den geometrisk-optiska bilden mot noll, men det innebär att ljusblafforna från solens alla punktkällor centreras i en enda punkt på näthinnan. Det belysta området på näthinnan blir därför lika stort som storleken av ljusblaffan från en punktkälla. Denna storlek ges av minsta spotsize, för ett perfekt öga. Eftersom den belysta arean på näthinnan nu inte ändras då avståndet till solen ökar ytterligare, kommer den allt mindre effekten

som går genom pupillen att smetas ut på en lika stor yta vilket leder till en minskad intensitet med samma faktor som intensiteten framför ögat, alltså $\sim 1/L^2$:



Vi beräknar nu intensiteten på näthinnan i de två områdena. "Nära" solen (t.ex. på Jorden) där vi uppfattar solen som en skiva, och alltså storleken av bilden på näthinnan ges av geometrisk optik, har vi intensiteten

$$I_{n\ddot{a}thinna,n\ddot{a}ra} = \frac{\text{ljuseffekt genom pupill}}{\text{area som ljuset fördelar sig p\ddot{a}}} = \frac{I_{framf\ddot{o}r\ \ddot{o}ga} A_{pupill}}{A_{bild}} = \frac{(c_{sol}/L^2) A_{pupill}}{A_{sol} M^2}$$

vilket \ddot{a}r samma uttryck som ovan, men d\ddot{a}r vi satt in en proportionalitetskonstant c_{sol} s\ddot{a} att vi kan skriva $I_{framf\ddot{o}r\ \ddot{o}ga} = c_{sol}/L^2$. Vidare har vi utnyttjat att arean av det avbildade objektet (solen) \ddot{a}r objektets area multiplicerat med avbildningens f\ddot{o}rstoring M i kvadrat (M anger den linj\dd{a}ra f\ddot{o}rstoringen). F\ddot{o}rstoringen ges av $M = L_{\ddot{o}ga}/L$. Vi har allts\dd{a}

$$I_{n\ddot{a}thinna,n\ddot{a}ra} = \frac{(c_{sol}/L^2) A_{pupill}}{A_{sol} (L_{\ddot{o}ga}/L)^2} = \frac{c_{sol} A_{pupill}}{A_{sol} L_{\ddot{o}ga}^2} \quad (1)$$

oberoende av L som sig b\dd{o}r. Som sagts antar vi f\dd{o}renklat att pupilldiametern \ddot{a}r konstant.

"L\dd{a}ngt" fr\dd{a}n solen, d\dd{a}r ljuset som kommer genom pupillen f\dd{o}rdelar sig p\dd{a} en yta som \dd{a}r storleken av spotsize har vi

$$I_{n\ddot{a}thinna,l\dd{a}ngt} = \frac{\text{ljuseffekt genom pupill}}{\text{area som ljuset f\dd{o}rdelar sig p\dd{a}}} = \frac{I_{framf\ddot{o}r\ \ddot{o}ga} A_{pupill}}{A_{spot}} = \frac{(c_{sol}/L^2) A_{pupill}}{\frac{\pi D_{spot}^2}{4}} \quad (2)$$

d\dd{a}r $D_{spot} = C \frac{\lambda}{D_{pupill}} L_{\ddot{o}ga}$. Vi g\dd{o}r nu n\dd{a}gra ganska godtyckliga antaganden:

$$C = 2$$

$$\lambda = 550\text{nm}$$

$$D_{pupill} = 5\text{mm}$$

d\dd{a}r $C = 2$ motiveras av att vi kanske inte vill anv\dd{a}nda Airy-funktionens f\dd{o}rsta nollst\dd{a}lle (f\dd{o}r $C = 2.44$) som definition eftersom vi vet att detta ger ett ganska stort m\dd{a}tt p\dd{a} spotsize. \dd{A} andra sidan

kanske vi inte vill använda $C \approx 1$ eftersom vi vet att för de flesta människor är ögat ett ganska dåligt avbildande system som ger större blaffor på näthinnan än teoretiskt minsta (alltså större än minsta spotsize). Så har jag resonerat i alla fall ☺

Enligt uppgiften skulle vi bestämma L för vilket $I_{n\ddot{a}thinna,l\ddot{a}ngt} = \frac{1}{2} I_{n\ddot{a}thinna,n\ddot{a}ra}$ eftersom intensiteten på näthinnan när vi är på jorden är $I_{n\ddot{a}thinna,n\ddot{a}ra}$ eftersom vi utan problem ser att solen är en skiva. Vi har då enligt (1) och (2)

$$I_{n\ddot{a}thinna,l\ddot{a}ngt} = \frac{1}{2} I_{n\ddot{a}thinna,n\ddot{a}ra} \Rightarrow \frac{(c_{sol}/L^2)A_{pupill}}{\frac{\pi D_{spot}^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_{sol}A_{pupill}}{A_{sol}L_{\ddot{o}ga}^2}$$

Vi löser ut L

$$L^2 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{c_{sol}A_{pupill}A_{sol}L_{\ddot{o}ga}^2}{\left(C \frac{\lambda}{D_{pupill}} L_{\ddot{o}ga}\right)^2 c_{sol}A_{pupill}} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{A_{sol}}{\left(C \frac{\lambda}{D_{pupill}}\right)^2} = 2 \cdot \frac{D_{sol}^2}{\left(C \frac{\lambda}{D_{pupill}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{2} \frac{D_{sol}}{\left(C \frac{\lambda}{D_{pupill}}\right)} = \sqrt{2} \frac{1392000 \text{ km}}{2 \frac{550 \text{ nm}}{5 \text{ mm}}} = 9 \cdot 10^{12} \text{ m} = 60 \times 150 \text{ milj km} \equiv 60 \text{ AU}$$

Vi måste alltså ta oss förvånansvärt långt – 60 gånger längre än avståndet solen-jorden – innan maxintensiteten på näthinnan halveras när vi kollar på solen. Alltså t.o.m. längre bort än den extremt kalla och avlägsna (dvärg-)planeten Pluto!

Givetvis är vår beräkning synnerligen grov, och beroende på olika antaganden så kan värdet på L utan vidare skilja sig åt med en faktor 2-3. Slutsatsen kvarstår dock att solbrillor kan vara en förvånansvärt lämplig outfit även om man befinner sig på planeter långt ut i solsystemet (glöm dock inte att komplettera med rymddräkt)!