

Tentamen i Optik FFY091

Måndag 21 augusti 2017, kl. 14:00-18:00

Examinator och jourhavande lärare Jörgen Bengtsson, tel. 031-772 1591, **finns på plats ca kl 15 och 17** för att svara på frågor. För betyg 3, 4, 5 krävs 30p, 40p, respektive 50p, inklusive eventuell bonus, av max 60p. Se vidare Kursinformation på kurshemsidan, där också lösningsförslag publiceras efter tentan. Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

Motivera dina steg och formulera dig klart (gärna icke-verbalt i form av skisser) – båda dessa aspekter poängbedöms. Gör egna rimliga antaganden där det behövs.

1. Polarisation

Svara *kortfattat* på följande frågor

(a) Vanligt ljus (t.ex. ljuset i detta rum) sägs vara "opolariserat". Har det verkligen ingen polarisation? (1p)

(b) Hur kan man framställa linjärpolariserat ljus från vanligt ljus? Nämn två sätt! (2p)

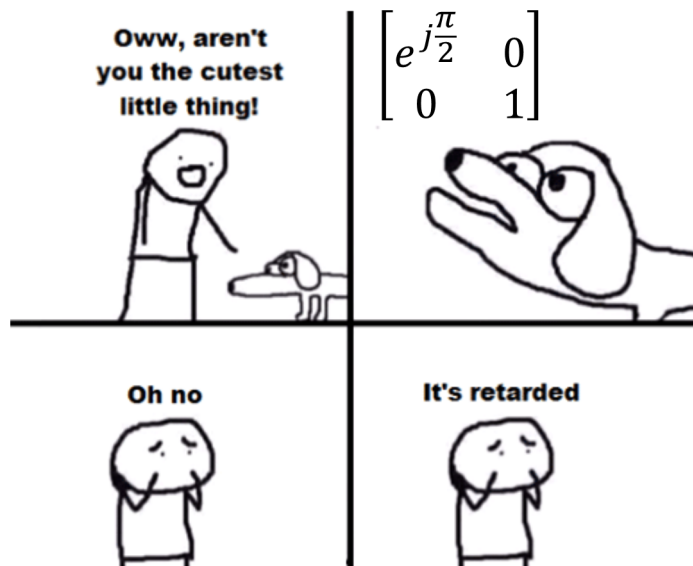
(c) Är koherent ljus ("laserljus") alltid linjärpolariserat? (1p)

(d) Hur påverkas polarisationen vid ljuspropagation genom ett *optiskt aktivt* material? (2p)

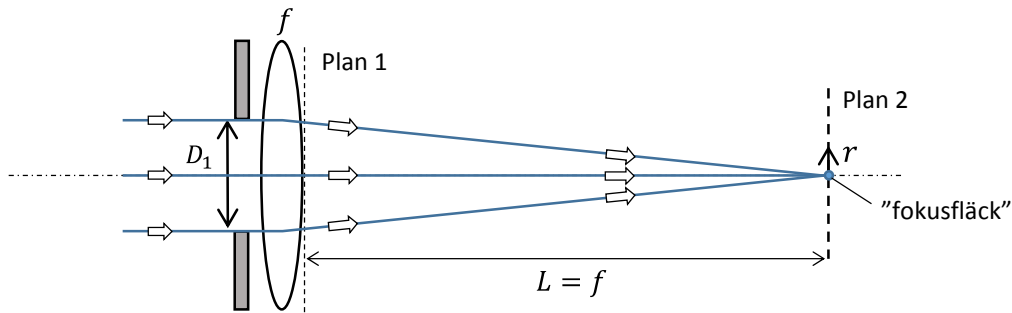
(e) Kan du tillverka ett optiskt aktivt "material" med det som finns i ditt kök? (2p)

(f) Vilken speciell optisk egenskap brukar man säga att de molekyler har som uppvisar optisk aktivitet (du behöver inte visa att denna egenskap leder till optisk aktivitet)? (2p)

(g) I inlämningen av HUPP 2 skickade Oscar Carlsson och Johan Friemann med nedanstående egenhändigt modifierade variant av en klassisk seriestrip om en stackars (?) hund. Förklara med en mening varför man måste ha gått Optik F2 (eller motsvarande) för att ha möjlighet att förstå denna variant! (1p)



2. Exakta tumregler kan se ut på flera sätt

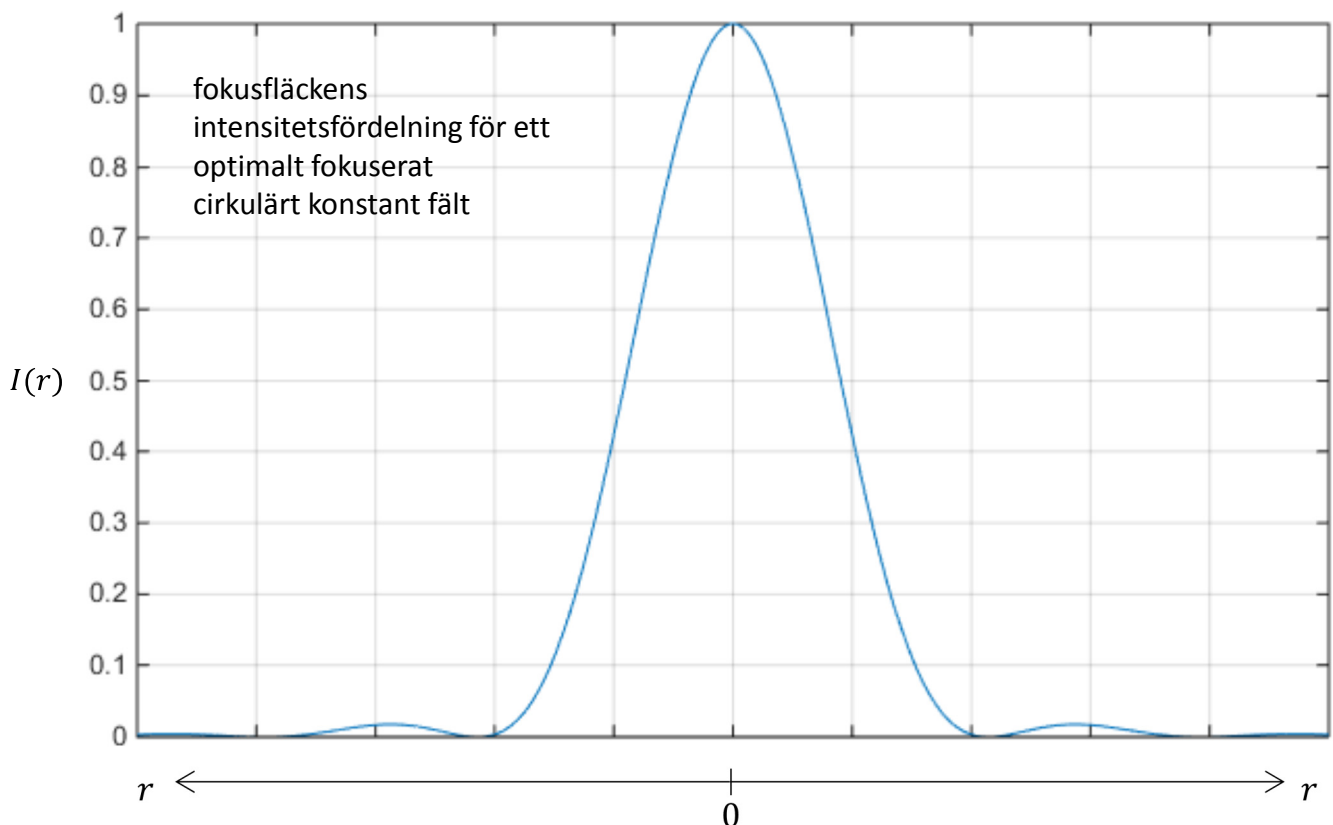


I HUPP 1 fokuserade du ett cirkulärt konstant fält med hjälp av en perfekt lins till ett fokus i Plan 2 på avståndet $L = f$. Storleken av den fokuserade fläcken ges av en exakt tumregel för cirkulära konstanta fält, som du tog fram. Dock beror den exakta tumregeln på hur man definierar "utbredningen" av den fokuserade fläcken i Plan 2. I HUPP 1 använde du en viss – ganska generös – definition, men hur blir tumregeln om man istället använder en annan definition: att utbredningen är den så kallade FWHM (full-width at half-maximum)? Det betyder att man använder diametern som markerar att intensiteten fallit till halva maxvärdet i Plan 2. Vi betecknar den med D_{FWHM} .

Som bekant ger ett cirkulärt konstant fält ett fokus vars intensitetsfördelning är en Airy-funktion, vilken visas helt korrekt i den noggrant beräknade och plottade bilden nedan. Så vad blir $const$ i den exakta tumregeln för fokusfläckens utbredning, definierad som D_{FWHM} ,

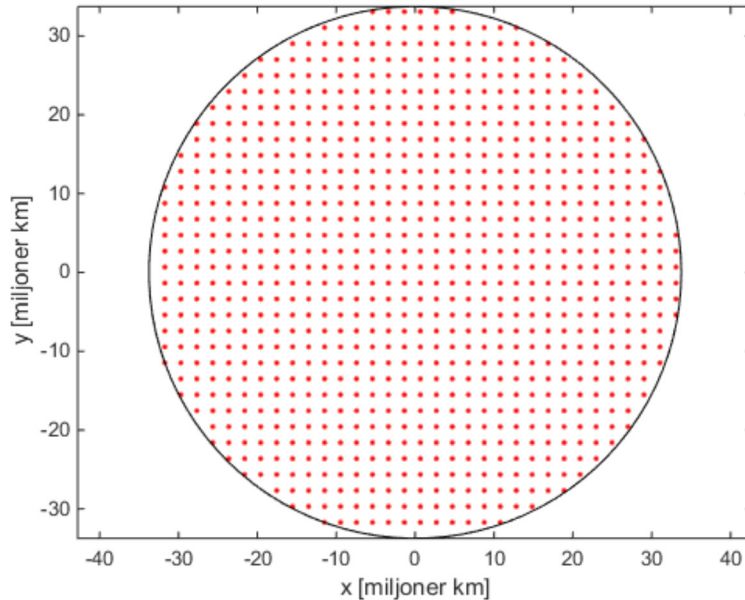
$$D_{FWHM} = const \frac{\lambda}{D_1} L$$

där, som tidigare, D_1 är diametern för fältets utbredning i Plan 1? (5p)



3. Starstruck?

I HUPP 4 implementerade vi något vi kallade Moder-Naturmetoden för att göra en viss beräkning.



(a) Vilken optisk storhet ville vi beräkna i HUPP 4? (1p)

(b) Vilken nytta kan man ha av att känna till denna storhet? (2p)

(c) Beskriv mycket kortfattat hur denna storhet beräknas med Moder-Natur-metoden. (3p)

(d) I Matlabsimuleringen skall bland annat avståndet r mellan två positioner beräknas. Men direkt användning av Pytagoras sats

$$r = \sqrt{L^2 + (y - 0)^2 + (x - u)^2} = \{\text{Matlab}\} = \text{sqrt}(L^2 + y.^2 + (x-u).^2)$$

fungerar inte. Vilka är de två positionerna som avståndet ska beräknas mellan, och varför fungerar det inte att direkt använda Pytagoras sats i matlabprogrammet? (2p)

(e) Vad är alternativet till att använda Moder-Naturmetoden för att beräkna den storhet som avsågs i (a)? (2p)

(f) Överensstämmer resultatet från metoden i (e) med resultatet från Moder-Naturmetoden, för något fall du känner till? (1p)

4. Osynlighetsringen

Meliora · Ever Better

UNIVERSITY of ROCHESTER

SEARCH ROCHESTER.EDU

Phone/Email Directory A to Z myRochester

About Us Academics Admission Student Life Parents Alumni Arts Athletics Libraries Medicine Research Working Here

Newscenter

SCIENCE & TECHNOLOGY SOCIETY & CULTURE STUDENT LIFE UNIVERSITY NEWS IN THE HEADLINES

search newscenter SEARCH

'Cloaking' device uses ordinary lenses to hide objects across range of angles

September 25, 2014



"osynlighetsring"

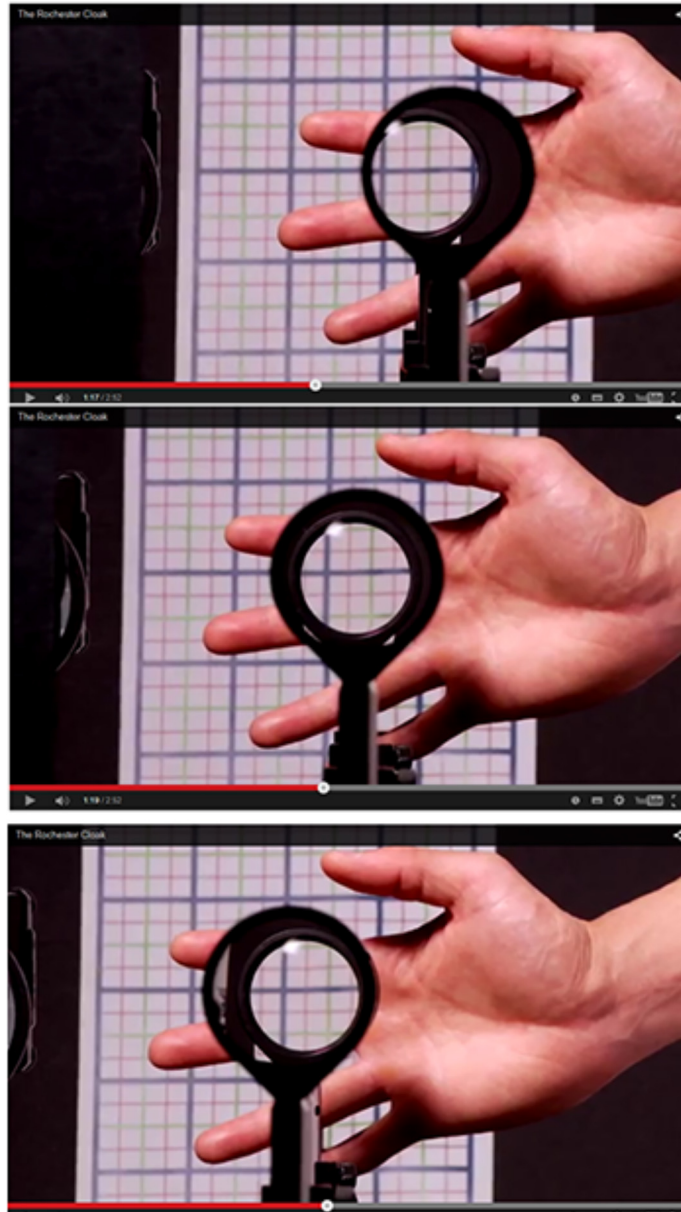
[Gilla](#) [Tweet](#)

Doctoral student Joseph Choi is pictured with a multidirectional 'perfect paraxial' cloak using 4 lenses.

Inspired perhaps by Harry Potter's invisibility cloak, scientists have recently developed several ways—some simple and some involving new technologies—to hide objects from view. The latest effort, developed at the University of Rochester, not only overcomes some of the limitations of previous devices, but it uses inexpensive, readily available materials in a novel configuration.

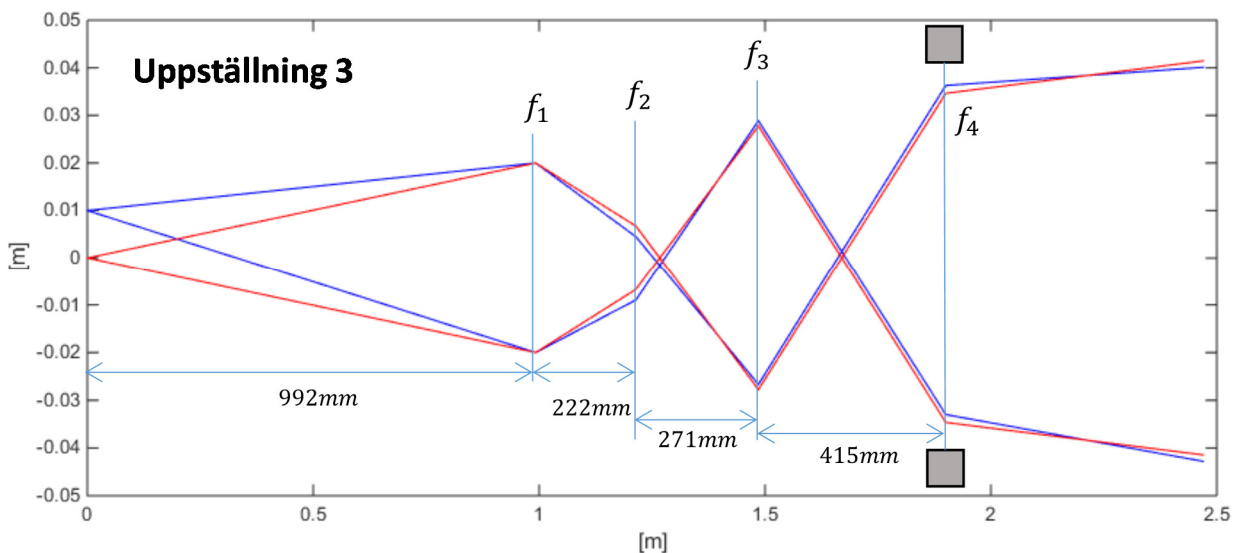
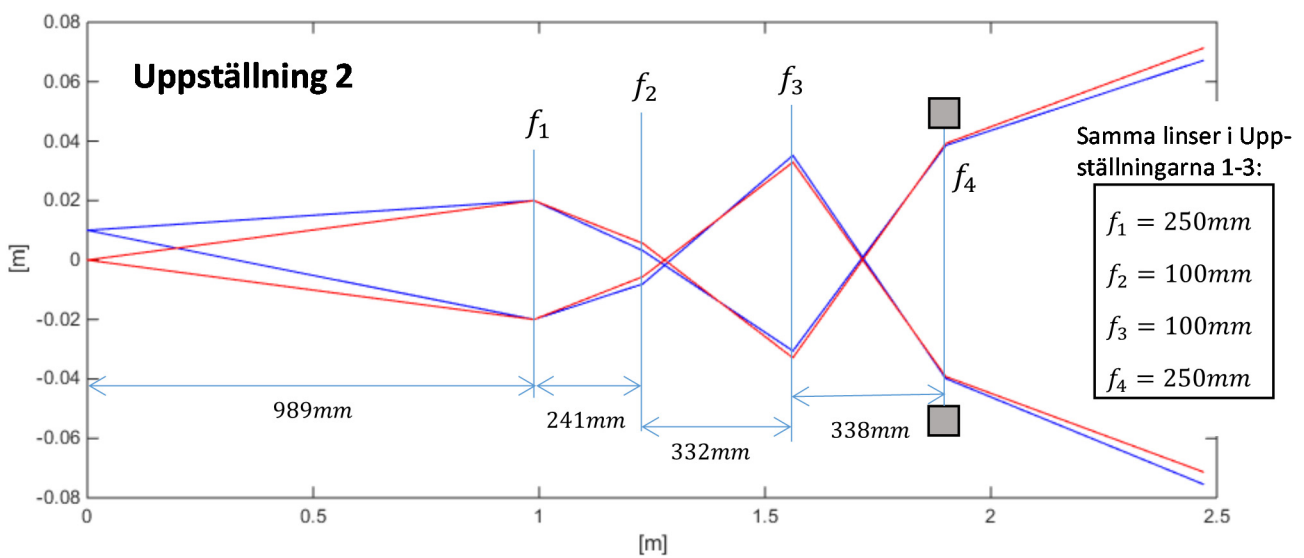
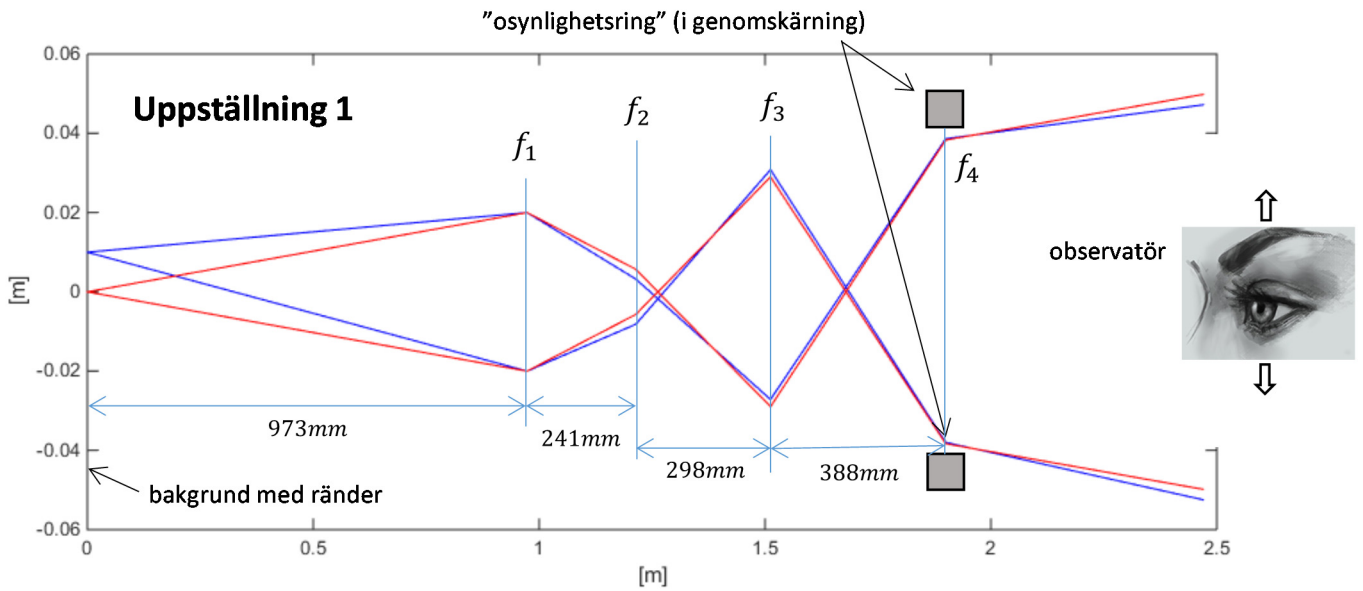
I Harry Potter finns en osynlighetsmantel som gör en person osynlig när hen tar på sig den, eftersom ljuset från de föremål som finns bakom manteln bara går rakt genom denna. I samma anda har ett gäng (undersysselsatta?) forskare med hjälp av optik skapat en "osynlighetsring". Som vi ser av demonstrationen tycks den också funka genom att ljuset från bakgrunden – i detta fall en vägg med horisontella och vertikala linjer – tycks gå rakt igenom huvudet om detta betraktas genom osynlighetsringen.

Naturligtvis är detta bara en optisk bluff. I själva verket sitter det en lens i osynlighetsringen (fokallängd f_4 i strålgångsdiagrammen nedan), och dessutom ytterligare tre linser i linje mellan osynlighetsringen och bakgrunden. Dessas fokallängder och inbördes avstånd är dock mycket noga justerade för att observatören ska få den önskade illusionen av hur bakgrunden beter sig när den betraktas genom osynlighetsringen. Detta framgår av bildserien nedan, som visar hur observatören uppfattar situationen när hen rör sig sidledes mellan några närliggande positioner.



(a) Varför sårar personen på fingrarna när hen demonstrerar osynlighetsringens effekt i bildsekvensen ovan? (1p)

Strålgångsdiagrammen nedan visar korrekta och noggrant plottade matlabsimuleringar av strålgången från två punkter på bakgrunden genom tre olika uppställningar av de fyra linserna. Alla tre uppställningar använder samma linser, fokallängderna för dessa visas i tabellen vid Uppställning 2. Endast avståndet mellan dem samt avståndet till bakgrunden varierar lite mellan uppställningarna, som anges i figurerna.

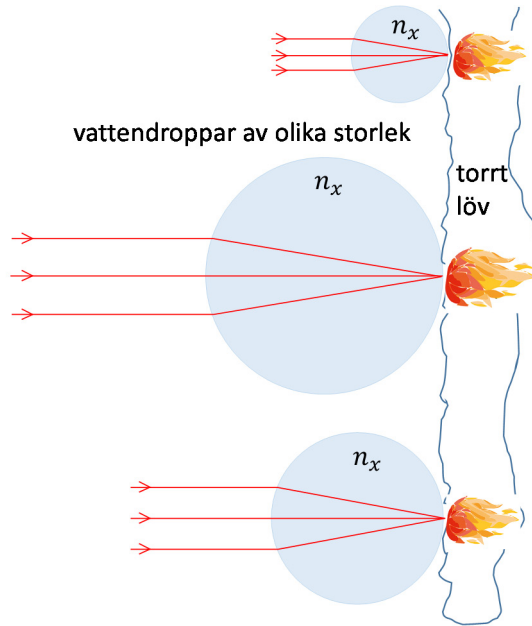


(b) Endast en av de tre uppställningarna ger den önskade illusionen av beteendet hos bakgrunden när den betraktas genom ringen – vilken? (14p)

(c) Var i det optiska systemet är det lämpligt att sätta in det föremål (t.ex. handen med särade fingrar) som ska bli osynligt när man tittar genom osynlighetsringen? (2p)

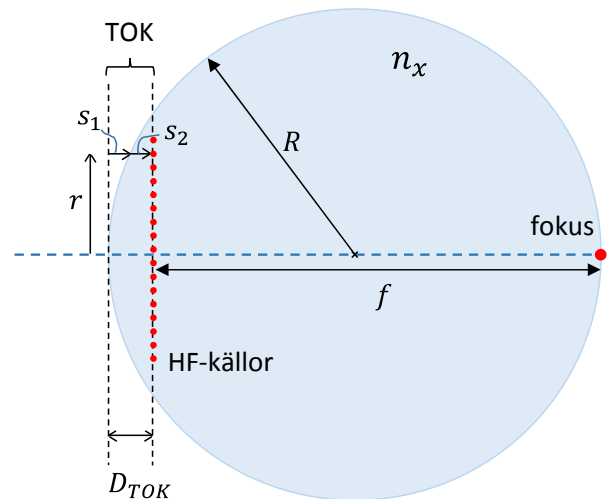
5. Brandfarligt brytningsindex hos vatten?

Om vatten haft det "farliga" brytningsindexet n_x ...



Om vatten hade haft ett visst brytningsindex n_x så skulle alla sfäriska vattendroppar, oavsett storlek, fokusera infallande parallellt ljus till ett fokus på droppens motsatta sida, där droppen kanske vilar på ett brandfarligt löv (se figur ovan). Använd TOK-modellen för att ta reda på värdet av n_x som på detta sätt skulle göra vattendroppar till potentiellt farliga "brännglas" i naturen! Antag paraxiella förhållanden, alltså en smal ljusstråle som belyser droppen ($r \ll R$ i skissen nedan).

Illustration till uppgifterna (a)-(e)



(a) Visa att sträckan s_1 , det horisontella avståndet från TOKens inplan till gränsytan mellan luft och droppe, ges av

$$s_1(r) = \frac{r^2}{2R}$$

under paraxiella förhållanden. (3p)

(b) Beräkna fasmoduleringen, $\varphi_{TOK}(r)$, hos den indikerade TOKen under paraxiella förhållanden. (4p)

(c) För att de indikerade HF-källorna ska interferera konstruktivt på avståndet f längs symmetriaxeln, d.v.s. i det indikerade fokuset, måste dessa ha en radiellt varierande fas $\varphi_{HF}(r)$. Visa att denna ges av

$$\varphi_{HF}(r) = -k_0 n_x \frac{r^2}{2f}$$

under paraxiella förhållanden. (4p)

(d) Vilket är det farliga värdet på brytningsindexet n_x ? (4p)

Ledning: Kom ihåg vad förkortningen TOK står för!

(e) Har vi anledning att vara rädda för att sfäriska vattendroppar kan fungera som brännglas? (1p)

Vattenledning: Flytande H₂O har brytningsindex $n \approx 1.33$.

Tentamen i Optik FFY091

Måndag 21 augusti 2017, kl. 14:00-18:00

Diskussion och lösningsförslag

1. Polarisation

(a) I elektromagnetik/optik används begreppet *polarisation* till åtminstone två olika saker. Dels fenomenet att bundna laddningar (=elektronmoln) i ett material rör sig en kort sträcka under inflytande av ett elektriskt fält. Det är graden av denna "polariserbarhet" som bestämmer brytningsindexet hos ett material.

Men i denna uppgift handlar polarisationen uppenbart om en egenskap hos själva det optiska fältet, nämligen fältets riktning. Eftersom ett elektromagnetiskt fält alltid har en riktning är det alltid polariserat, beteckningen *opolariserad* är alltså lite olycklig. Men beteckningen används för fält där riktningen hos fältet varierar på ett slumpmässigt sätt mycket snabbt i tiden. Detta är i allmänhet fallet för vanligt ljus.

(b) I Labb P används några olika sätt att extrahera linjärpolariserat ljus ur vanligt ljus.

- Enklast är förstås att använda en *polarisator* som blockerar (absorberar) en riktning hos fältet så att bara den vinkelräta polarisationsriktningen finns kvar efter passage.

- Man kan använda den *reflekterade strålen hos ljus som infaller under Brewstervinkeln* mot en yta (som man gör i uppställningen med pyramidskärmen). Observera att det inte går att använda den transmitterade strålen eftersom den fortfarande innehåller fält med båda polarisationerna (Brewstereffekten innebär att reflektionen blir noll för fält som är polariserat parallellt med det s.k. infallsplanet).

- Man kan också använda lite mer avancerade *polarisationskänsliga stråluppdelare* (polarizing beam splitters) t.ex. nicolprisma för att erhålla separerade strålar med linjärpolariserat ljus.

(c) Vår behandling av polariserat ljus, t.ex. framtagningen av Jonesmatriser, gäller egentligen för just koherent, laserliknande ljus. Så om man råkar ha en stråle med linjärpolariserat laserljus är det lätt att göra om den till t.ex. cirkulärpolariserad genom att sätta in en kvartsvågspatta med eo-axeln i 45° vinkel mot polarisationsriktningen. Ljuset som kommer ut på andra sidan plattan är fortfarande koherent, men nu cirkulärpolariserat.

Anmärkning 1: En punktkälla på ett objekt som belyses med vanligt ljus kan sägas sända ut laserliknande ljus. Därför kan vi också använda Jonesformalism för vanligt ljus, som i HUPP2 och som i Labb P.

Anmärkning 2: Faktum är dock att den ljusstråle som kommer ut direkt från lasern ofta (men inte alltid) är linjärpolariserad. Ibland beror detta på en medveten konstruktion hos lasern, men ofta uppstår linjärpolarisation spontant. Det beror på att lasern automatiskt "väljer" den polarisation som har minst förluster när ljuset studsar fram och tillbaka laserkaviteten, som aldrig går att tillverka perfekt rotationssymmetrisk.

(d) *Optisk aktivitet* betyder att polarisationsriktningen hos linjärpolariserat ljus vrids när ljuset propagerar i det optiskt aktiva materialet. Ljuset är fortfarande linjärpolariserat i varje punkt i rummet, men riktningen är olika i olika punkter.

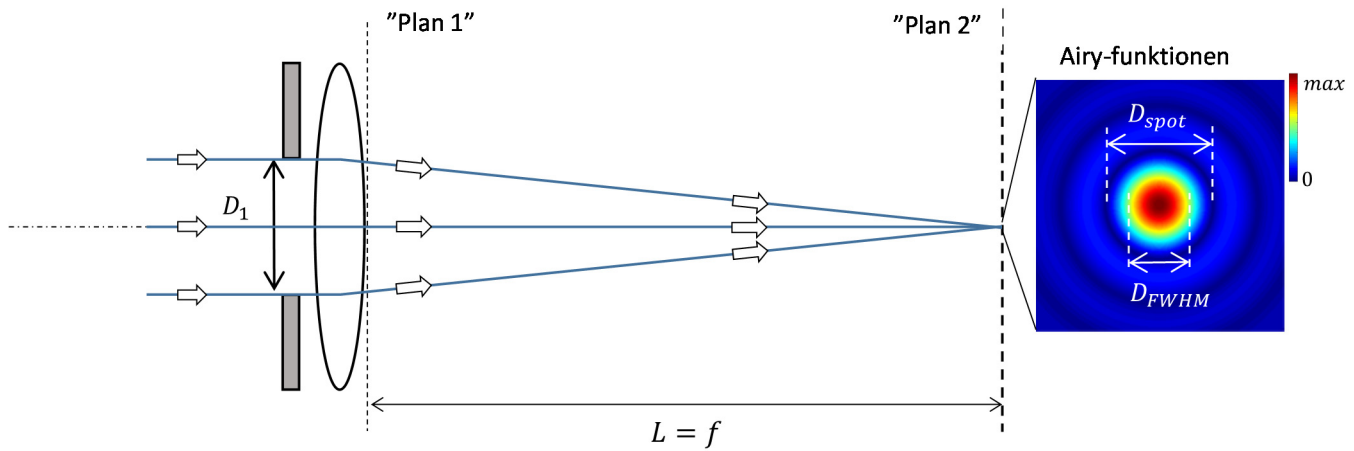
(e) Det beror på vad som finns i ditt kök! Men i Labb P använder man socker löst i vatten som optiskt aktivt material.

(f) I labbkompndiet till Labb P "förklaras" optisk aktivitet med att materialet har olika brytningsindex för de två olika rotationsriktningarna för cirkulärpolariserat ljus. Linjärpolariserat ljus kan skrivas som en summa av två cirkulärpolariserade fält med olika rotationsriktning, och från denna uppdelning kan man se att skillnaden i brytningsindex ger en vridning i polarisationsriktningen när ljuset propagerar.

Att molekylerna i det dubbelbrytande materialet har olika brytningsindex för de två olika rotationsriktningarna hos cirkulärpolariserat ljus brukar fysikaliskt förklaras med att molekylerna har en spiralstruktur.

(g) Hunden briljerar med sina kunskaper om kvartsvågsplattans Jonesmatris. Kvartsvågsplattan tillhör en typ av komponenter som kallas *wave plates* eller *retarders* på engelska (det senare namnet eftersom de fördröjer – d.v.s. ändrar fasen på – fältet olika mycket beroende på dess polarisation). Personen som lyssnar på hunden har inte gått Optik F2 utan tycker bara den söta lilla hunden låter konstigt. Hen drar därför slutsatsen att hunden är försenad – *retarded* – i sin intellektuella utveckling jämfört med en normal hund.

2. Exakta tumregler kan se ut på flera sätt



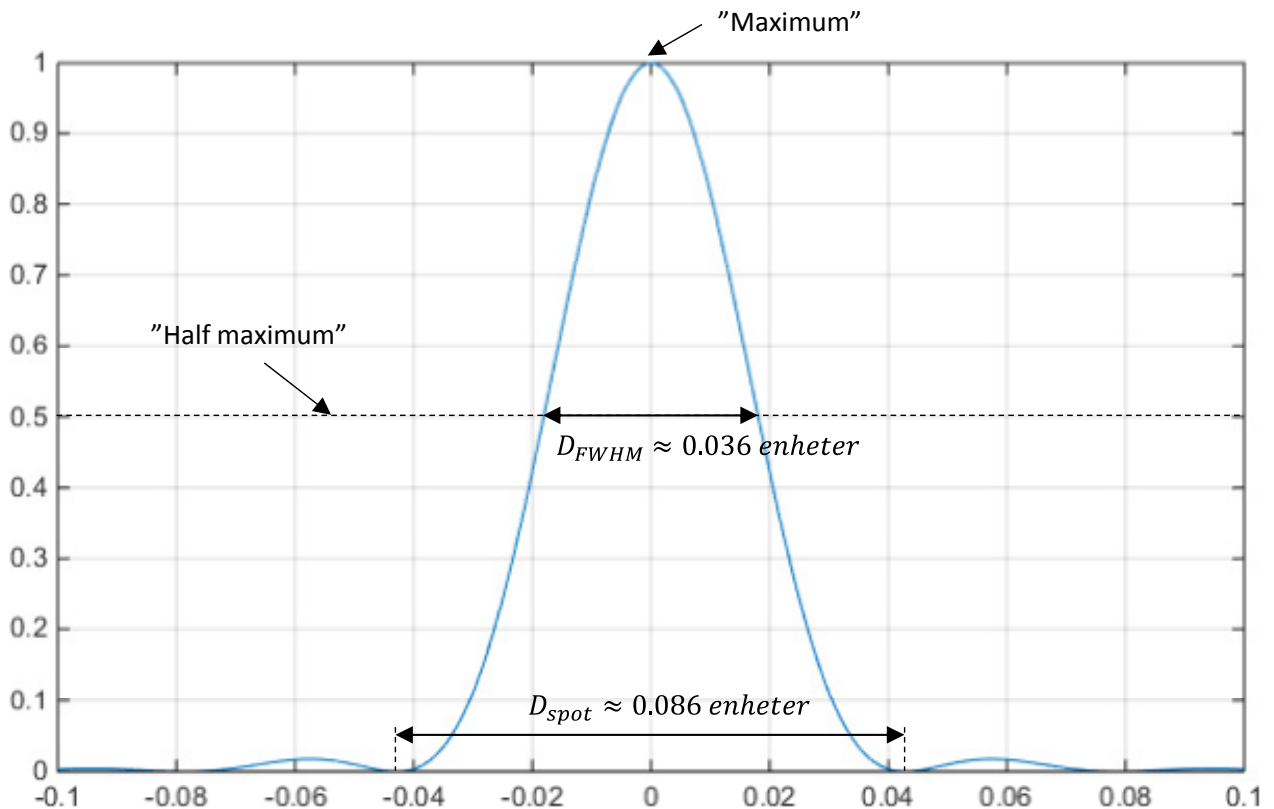
I HUPP1 stiftar vi bekantskap med den vanligaste definitionen av "utbredningen" hos fokuset i Plan 2 för ett cirkulärt konstant fält, nämligen diametern för första nollstället hos Airy-funktionen. Denna kallar vi ofta D_{spot} , och vi fann i HUPP 1 att den ges av

$$D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda}{D_1} L$$

Dividerar vi detta uttryck med $D_{FWHM} = const \frac{\lambda}{D_1} L$, där $const$ ska bestämmas, fås

$$\frac{D_{FWHM}}{D_{spot}} = \frac{const}{2.44}$$

Intensitet i ett radiellt tvärsnitt i Plan 2



Avläser vi D_{FWHM} och D_{spot} ur plotten av Airyfunktionen fås

$$\frac{D_{FWHM}}{D_{spot}} = \frac{0.036}{0.086} = \frac{const}{2.44} \Rightarrow const = 1.02 \approx 1$$

(Jag avläser från Matlab i den skala jag råkar valt för plotten av Airy-funktionen, medan du mäter med linjal i figuren, så vi får olika värden på D_{FWHM} och D_{spot} men kvoten D_{FWHM}/D_{spot} blir densamma.)

Med D_{FWHM} som definition på fokusets "utbredning" blir alltså den exakta tumregeln för cirkulärt konstant startfält praktiskt taget identisk med vår approximativa tumregel för generella startfält!

3. Starstruck?

(a) Vi ville beräkna den spatiella koherensen hos ljuset från en viss stjärna när det når jorden. Mer precis ville vi beräkna hur the mutual coherence function, Γ_{AB} , varierar med avståndet från referenspunkten A . Utgående från denna variation bestämmer vi den spatiella koherenslängden hos stjärnljuset, l_s , med användning av någon lämplig/bekvämt definition på när vi anser att korrelationen avtagit signifikant (i detta fall det första nollstället hos Γ_{AB}).

(b) Den spatiella koherensen hos ljuset som når observatören bestäms av den inkoherenta ljuskällans (stjärnans) skenbara utsträckning. Mer precis är spatiella koherenslängden l_s direkt kopplad till hur stor vinkel stjärnan upptar sett från jorden, d.v.s. en bestämning av l_s gör att man får reda på kvoten $D_{stjärna}/L_{stjärna}$, där $D_{stjärna}$ är stjärndiametern och $L_{stjärna}$ avståndet till stjärnan. Detta är värdefullt eftersom stjärnor upptar så små vinklar att vi inte kan skilja dem från punktkällor vid direkt observation, vare sig med blotta ögat eller med teleskop (utom möjligen de nya stora rymdbaserade teleskopen som inte besväras av jordens oroliga atmosfär).

(c) Moder-Naturmetoden:

1. Beräkna koherenta fältet från stjärnan under en koherenstid. Under koherenstiden har alla punktkällor på ljuskällan (stjärnan) fix men slumpmässig fasrelation, och fältet på jorden beräknas med koherenta propagationsmetoder. I vårt fall summerar vi helt enkelt det propagerade fältet från varje punktkälla (sfärisk våg) direkt utan att ta till matematiska trix som fouriertransform, vilket är genomförbart eftersom vi representerar stjärnan med ett relativt litet antal punktkällor och bara är intresserade av fältet i ett ganska litet antal punkter på jorden.
2. Beräkna koherenta fältet på jorden under en ny koherenstid genom att upprepa punkt 1 med en ny fördelning av slumpmässiga faser hos punktkällorna på stjärnan.
3. Upprepa 2 massor av gånger – flera tusen för ett riktigt bra resultat – och beräkna varje gång storheten $E_A E_B^*$ där E_A är det aktuella värdet på koherenta fältet i referenspunkten A , och E_B motsvarande för positionerna B . Addera värdet av $E_A E_B^*$ till dess värde i tidigare koherenstider, så att man successivt närmar sig ett stabilt tidsmedelvärde $\Gamma_{AB} = \langle E_A E_B^* \rangle$ (så när som på en multiplikativ konstant).

(d) Avståndet r är avståndet mellan en punktkälla på stjärnan och en punkt på jorden där det koherenta fältet under en koherenstid, E_A och E_B , ska beräknas,

$$r = \sqrt{L^2 + (y - 0)^2 + (x - u)^2}$$

där L är avståndet mellan stjärnan och jorden, x och y är punktkällans koordinater på stjärnan, och u är avståndet från referenspunkten A på jorden. Eftersom L är så ohyggligt stort i förhållande till x , y och inte minst u , räcker inte datorns precision när de små kvadraterna ska adderas till gigantiska L^2 i kvadratroten.

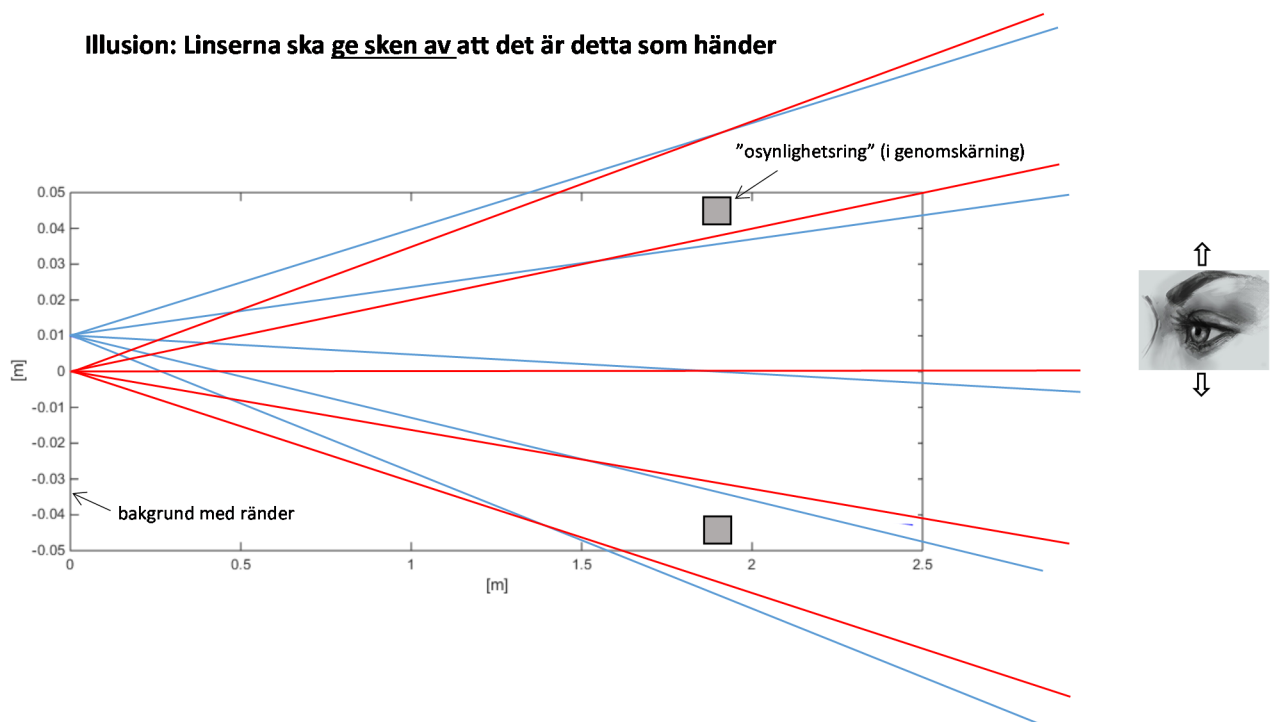
(e) I F9 tar vi upp *van Cittert-Zernikes teorem*, som säger att Γ_{AB} kan beräknas med en fouriertransform över ljuskällans yta.

(f) De överensstämmer mycket väl! I HUPP 4 får vi t.ex. ett värde på spatiella koherenslängden l_s för en cirkulär inkoherent ljuskälla som stämmer väl med det vi tar fram i föreläsning F9 med van Cittert-Zernikes teorem ($l_s = 1.22 \frac{\lambda}{D_{source}} L$), baserat på analogin med fallet för cirkulär *koherent, fokuserad* ljuskälla som vi undersökte i HUPP 1.

4. Osynlighetsringen

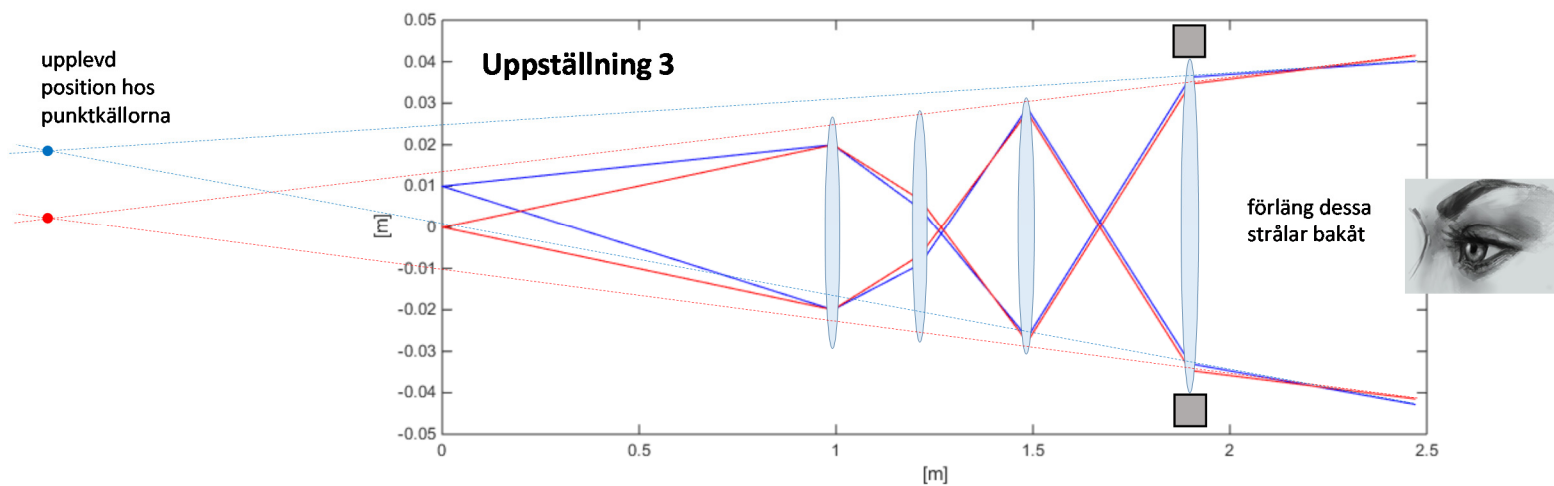
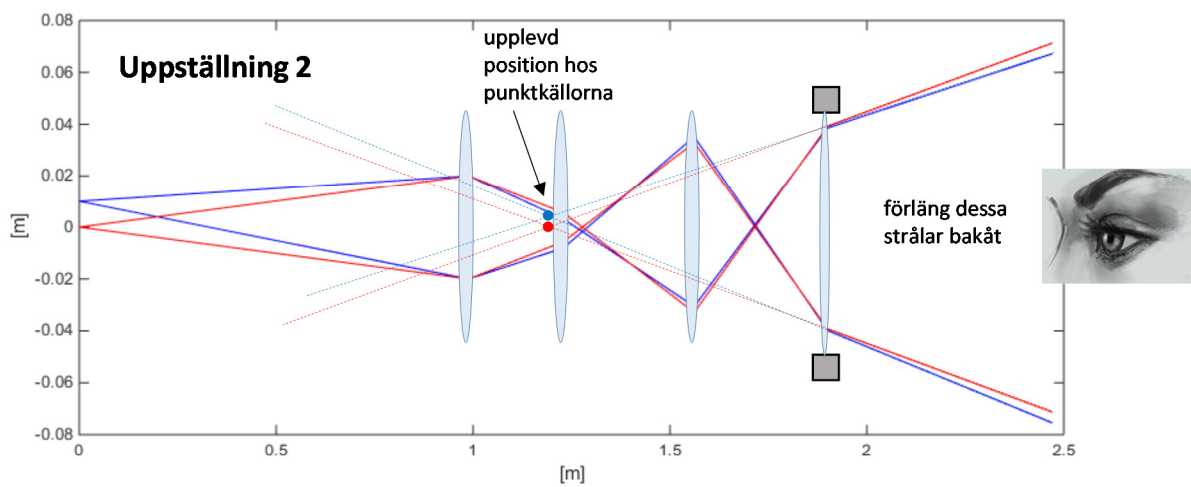
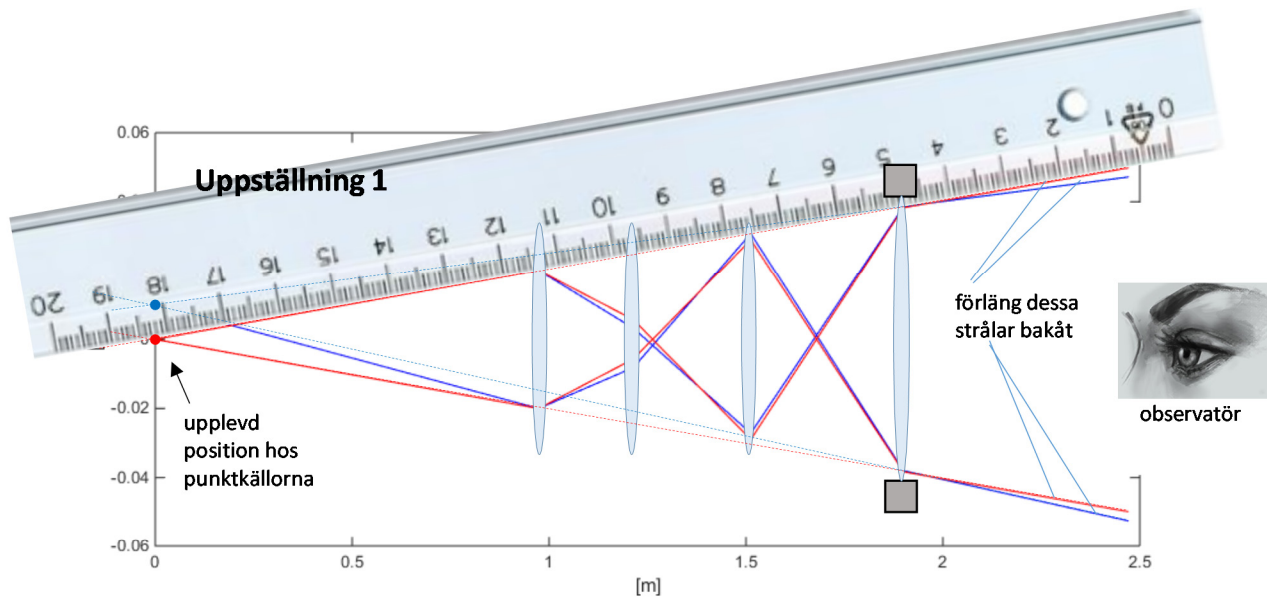
(a) I den omagiska verkligheten kan inte ljuset gå rakt genom handen. Ljuset måste ta sig från bakgrunden till observatören utan att stöta på något annat än linserna. Som framgår av strålgångsdiagrammen kan linserna visserligen komprimera ljusflödet i vissa positioner (det är där man sätter in handen, se uppgift c) men åtminstone ett litet område kring systemets symmetriaxel måste alltid vara oblockerat – annars försvinner hela bakgrundsbilden. Det är därför man spretar med fingrarna i bildserien så att det ska verka som man kan stoppa in nästan hela handen fast man lämnar ett oblockerat utrymme kring symmetriaxeln. Man kan också gissa att killen på första bilden noggrant har positionerat sitt ansikte så att bakgrundsljuset nätt och jämnt tar sig förbi – en gnutta längre in mot symmetriaxeln med huvudet och han skulle blockera allt ljus från bakgrunden.

(b) Det magiska med det noggrant uppställda systemet av linser är att bakgrunden ser precis likadan ut för observatören när hen tittar genom linserna som om det inte fanns några linser och ringen bara var ett hål:



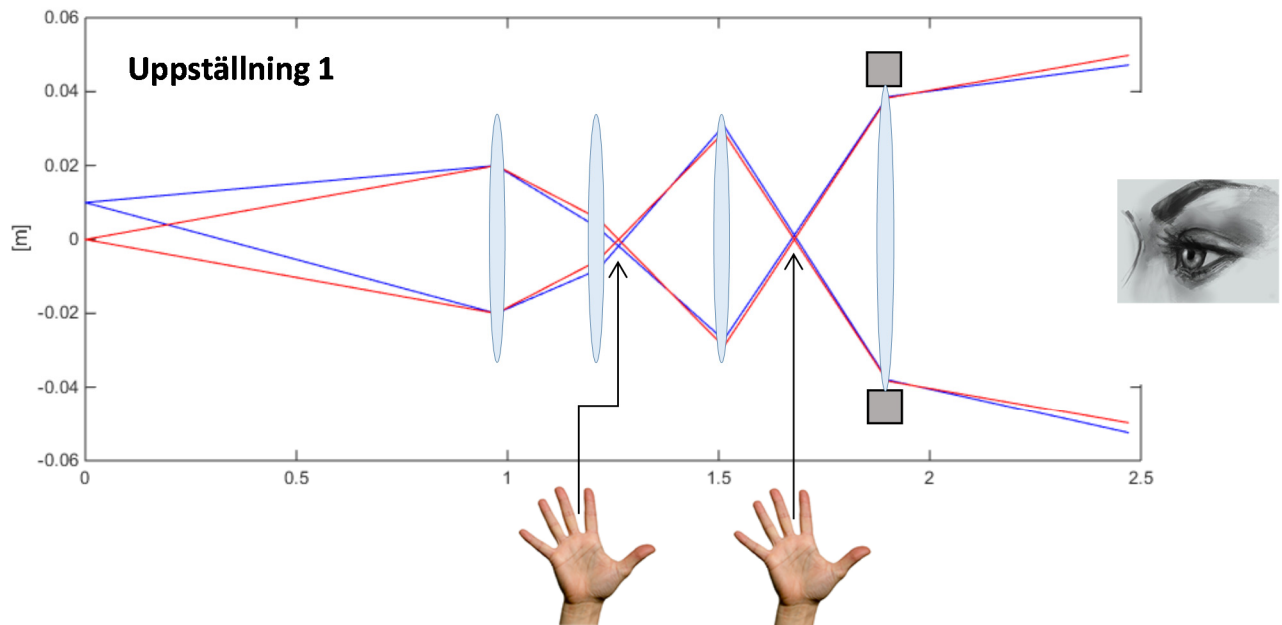
För observatören – som tittar genom systemet av linser – ska alltså *ljuset från varje punktkälla på bakgrunden tyckas komma från källans faktiska, fysiska, position på bakgrunden*. Om så sker betar sig den bakgrund man observerar genom osynlighetsringen (och resten av linserna) identiskt med den "direktobserverade" bakgrunden man ser i ovanstående figur. Det betyder till exempel att när man flyttar sitt öga rör sig bakgrunden man ser genom ringen och bakgrunden man ser utanför ringen på samma sätt, som i bildserien som visas i uppgiften.

Vilken av Uppställningarna 1-3 ger denna illusion? Ja, det är bara att ta fram linjalerna och följa "de röda" strålarna i observatörens område – efter osynlighetsringen – bakåt för att se var "den röda" punktkällan finns som strålarna tycks komma ifrån, och på samma sätt för "de blå" strålarna:



Vi ser att det är Uppställning 1 som ger den önskade funktionen! Där upplever observatören att punktkällorna ligger i samma positioner som de fysiska punktkällorna. Observatören har ingen chans att skilja situationen från den som visas på föregående sida (för ett idealt system), och tycker alltså att hen observerar bakgrunden direkt genom en tom ring.

(c) Men för att det ska vara någon vits med uppställningen – och inte bara ett jobbigt sätt att åstadkomma samma sak som inga linser alls – måste vi dessutom kunna föra in ett blockerande föremål, t.ex. en hand, ganska långt in mot symmetriaxeln i linssystemet utan att ljuset från bakgrunden blockeras. Vi ser från strålgångsskissen för Uppställning 1 att det finns två ställen där ljuset från bakgrunden koncentreras till små områden runt symmetriaxeln, markerade nedan:

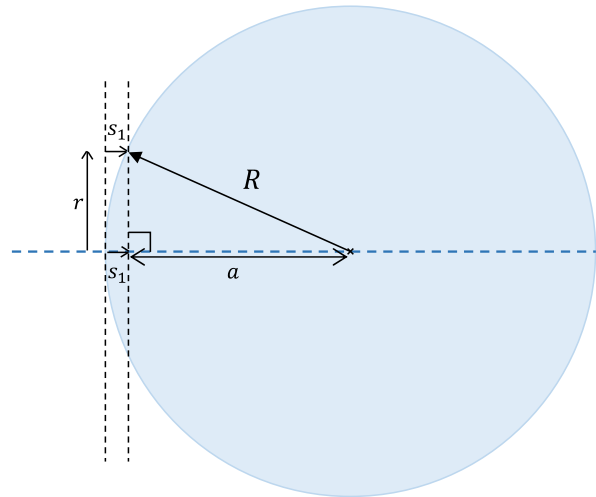


I dessa positioner kan man alltså föra in en hand nästan till symmetriaxeln utan att det händer något med ljuspropagationen från bakgrunden till observatören. Ur observatörens synpunkt "försvinner" handen bakom osynlighetsringen.

5. Brandfarligt brytningsindex hos vatten?

(a) Vi bestämmer sträckan s_1 i den paraxiella approximationen.

Bestämning av $s_1(r)$



Ur figuren ser vi att

$$s_1(r) + a(r) = R$$

där sträckan $a(r)$ fås från Pytagoras sats

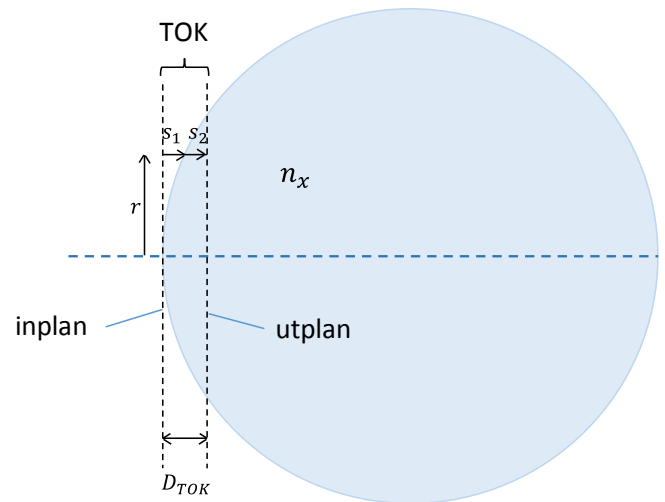
$$a(r) = \sqrt{R^2 - r^2} = R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \approx \left(r \ll R, \text{ utnyttja } \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \approx R \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) = R - \frac{r^2}{2R}$$

Vilket ger

$$s_1(r) = R - a(r) = \frac{r^2}{2R}$$

(b) Sedan bestämmer vi fasmoduleringen hos TOKen genom att beräkna fasändringen hos ljuset när det propagerar från in- till utplanet hos den indikerade TOKen.

Bestämning av TOKens fasmoduleringsfunktion



Om vi följer ljusets utbredning längs de två pilarna på avståndet r från symmetriaxeln fås fasändringen

$$\varphi_{TOK}(r) = k_0 s_1(r) + k_0 n_x s_2(r)$$

eftersom fasändringen per längdenhet är $k_0 n$ vid propagation i ett medium med brytningsindex n , och luft har brytningsindex 1. Sätter vi in att $s_2(r) = D_{TOK} - s_1(r)$ fås

$$\varphi_{TOK}(r) = k_0 s_1(r) + k_0 n_x (D_{TOK} - s_1(r)) = k_0 s_1(r) (1 - n_x) + \cancel{k_0 n_x D_{TOK}}$$

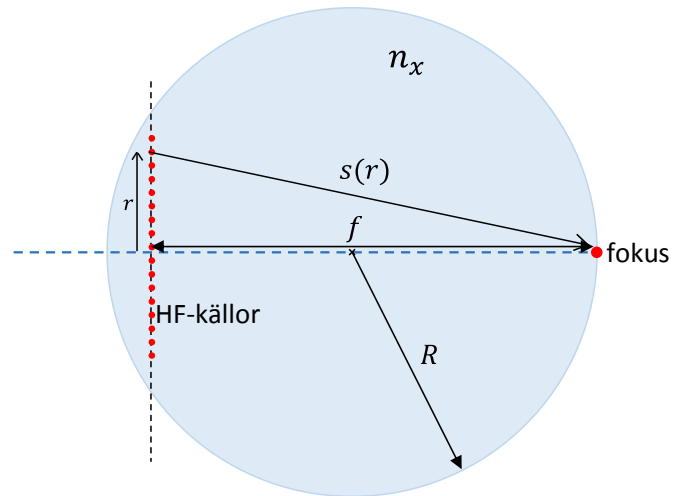
där vi stryker sista termen eftersom den är konstant (oberoende av r) och därför ej påverkar propagationen efter TOKen. Sätter vi in det paraxiella uttrycket för $s_1(r)$ från (a) fås

$$\varphi_{TOK}(r) = k_0 \frac{r^2}{2R} (1 - n_x) = -k_0 \frac{r^2}{2R} (n_x - 1)$$

Eftersom fasmoduleringen avtar kvadratisk med r fungerar TOKen, föga förvånande, som en positiv lins (om vi antar att det än så länge okända brytningsindexet $n_x > 1$).

(c) Nu bestämmer vi HF-källornas fas så att de allihop interfererar konstruktivt i den punkt vi kallar fokus (annars vore det inget fokus!).

Bestämning av HF-källornas fas för att få fokus på avståndet f



En HF-källa på avståndet r från symmetriaxeln har avståndet $s(r)$ till fokus. Jämfört med HF-källan vid $r = 0$ har ljuset en extra gångväg till fokus på

$$\delta(r) = s(r) - f = \sqrt{f^2 + r^2} - f = f \sqrt{1 + \frac{r^2}{f^2}} - f \approx (r \ll f) \approx f \left(1 + \frac{r^2}{2f^2}\right) - f = \frac{r^2}{2f}$$

P.g.a. den extra gångvägen får ljuset från HF-källan vid r en extra fasändring vid propagationen till fokus som uppgår till

$$\varphi_{extra}(r) = k_0 n_x \delta(r) = k_0 n_x \frac{r^2}{2f}$$

eftersom fasändringen per längdenhet är $k_0 n_x$. Eftersom fälten från alla HF-källorna ska vara i fas i fokus, måste fassen hos HF-källan vara sådan att den kompenserar för den extra gångvägen (och tillhörande extra fasändring). Fassen hos HF-källan på avståndet r från symmetriaxeln måste alltså vara

$$\varphi_{HF}(r) = -\varphi_{extra}(r) = -k_0 n_x \frac{r^2}{2f}$$

(d) Nu använder vi *Huygens-Fresnels princip* för att beräkna fasen hos HF-källorna som orsakas av TOKens fasmodulering, och sätter sedan HF-källornas fas så att vi får ett fokus på avståndet f .

Enligt Huygens(-Fresnels) princip är fasen hos en HF-källa lika med fasen hos det ljus som faller in på källan. HF-källorna befinner sig omedelbart efter TOKen så fasen hos fältet som faller in på HF-källorna är lika med fasen hos fältet omedelbart efter TOKen (i "utplanet"). Detta är i sin tur givet av fältet omedelbart före TOKen (i "inplanet") plus TOKens fasmodulering. Eftersom fältet i inplanet är en plan, normalt infallande våg (parallellt ljus) kan vi sätta fasen till noll överallt i inplanet. Sammanfattar vi allt detta matematiskt blir alltså fasen hos HF-källorna

$$\varphi_{HF}(r) = (\text{HF's princip}) = \varphi_{utplan}(r) = \varphi_{inplan}(r) + \varphi_{TOK}(r) = 0 - k_0 \frac{r^2}{2R} (n_x - 1)$$

där vi använde resultatet från (b). Sätts detta uttryck lika med det värde vi fann i (c) på det $\varphi_{HF}(r)$ som krävs för att vi ska ha ett fokus på avståndet f fås

$$-k_0 \frac{r^2}{2R} (n_x - 1) = -k_0 n_x \frac{r^2}{2f}$$

för alla r . Förkortar vi ger detta villkoret

$$\frac{1}{R} (n_x - 1) = n_x \frac{1}{f}$$

som alltså ger ett samband mellan fokallängden f och parametrarna n_x och R hos droppen.

TOKEN är per definition tunn. Därför gäller att om fokuset ska ligga på motstående sida måste $f = 2R$ (om du tycker detta samband ser märkligt ut bör det påpekas att det inte har något med sambandet mellan f och R för en sfärisk spegel att göra). Ovanstående villkor blir därmed

$$\frac{1}{R} (n_x - 1) = n_x \frac{1}{2R} \Rightarrow n_x = 2$$

Droppen måste alltså ha ett brytningsindex på $n_x = 2$ för att fokus ska ligga på motsatta sidan, och det gäller oavsett storleken på den sfäriska droppen – en stor droppe ger en svagare TOK-lins så att ljuset inte är lika konvergent inuti droppen, men ljuset har samtidigt längre sträcka till motsatta sidan.

(e) Som nämdes i uppgiften har vatten ett brytningsindex $n \approx 1.33$, vilket är betydligt lägre än n_x . Det lägre brytningsindexet ger en svagare TOK-lins för samma storlek R på droppen. Så i en riktig vattendroppe är ljuset fortfarande på väg mot sitt fokus när det träffar droppens motsatta sida. Bra tänkt, Moder Natur!