

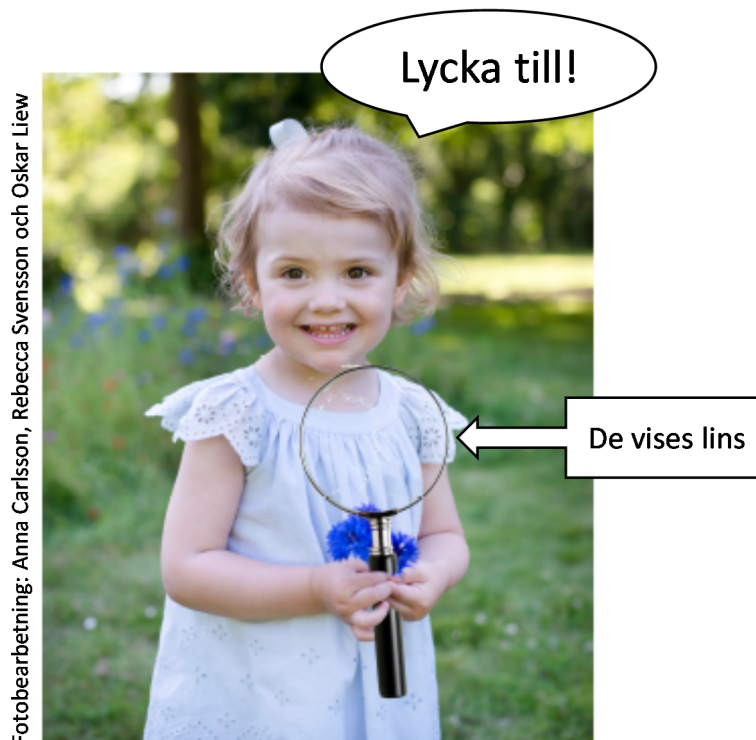
Tentamen i Optik FFY091

Fredag 9 juni 2017, kl. 14:00-18:00

Examinator och jourhavande lärare Jörgen Bengtsson, tel. 031-772 1591, **finns på plats ca kl 15 och 17** för att svara på frågor. För betyg 3, 4, 5 krävs 30p, 40p, respektive 50p, inklusive eventuell bonus, av max 60p. Se vidare Kursinformation på kurshemsidan, där också lösningsförslag publiceras efter tentan. Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail.

Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera dina steg och formulera dig klart (gärna icke-verbalt i form av skisser) – båda dessa aspekter poängbedöms.
- Gör egna rimliga antaganden där det behövs.



HKH Prinsessan Estelle

1. Lasergutten i Rjukan

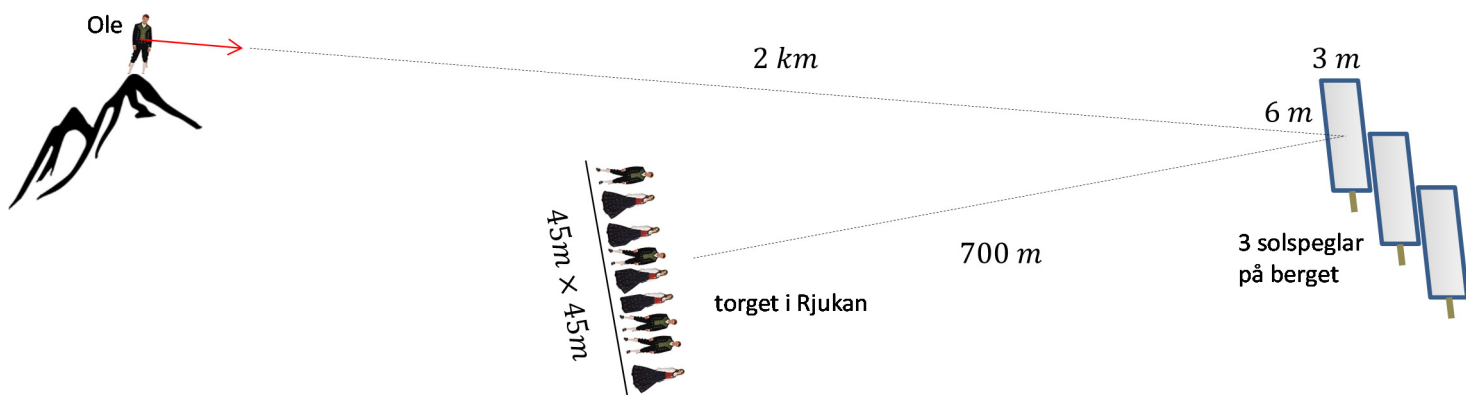
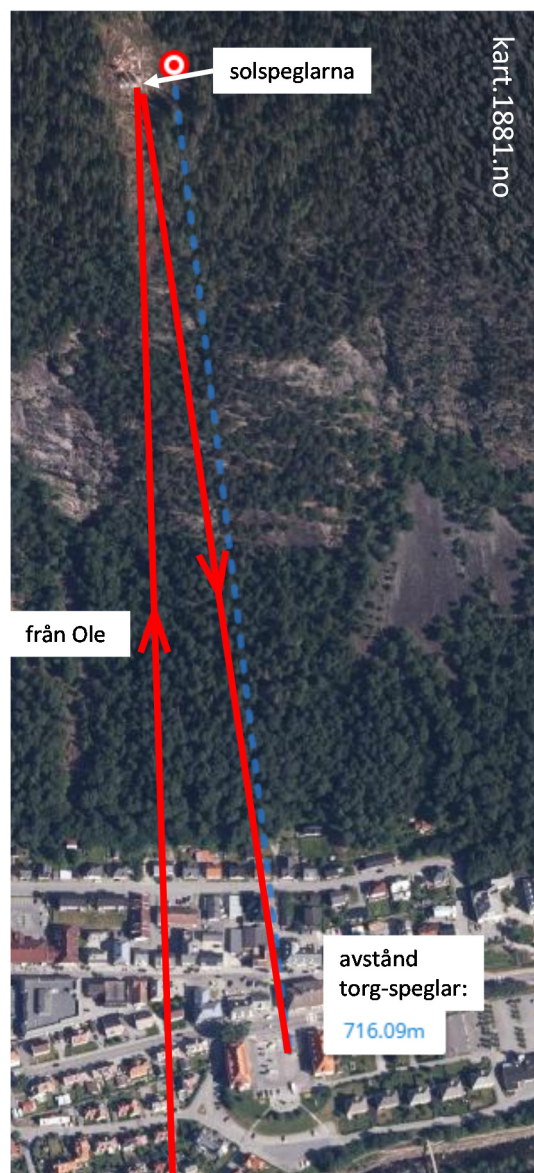
Byn Rjukan i Norge ligger i en dal dit solens strålar aldrig når ner under vintern. För att få solljus har man därför satt upp tre stora plana speglar (vardera $3\text{ m} \times 6\text{ m}$ med 100% reflektion) på bergskammen ovanför byn, se flygbilden. Spegelarna är individuellt roterbara vertikalt och horisontellt.

Elaka Ole, som bor ensam med sin olagligt starka laserpekare i en hytte på bergskammen på andra sidan byn, riktar nu laserpekaren mot speglarna. Strålen ut från laserpekaren är röd, kollimerad och har en gaussisk tvärsnittsintensitet med en stråldiameter $2\omega_{start} = 2\text{ mm}$. Här är ω_{start} $1/e^2$ -radien för den gaussiska intensitetsfördelningen när strålen kommer ut från laserpekaren.

(a) Om vi antar att speglarna är vinklade så att laserstrålen träffar torget i Rjukan, hur stor yta på torget blir belyst? (6p)

(b) Om speglarna av misstag inte varit perfekt plana utan haft en liten krökning, hade det kunnat bli farligt för någon person på torget? (6p)

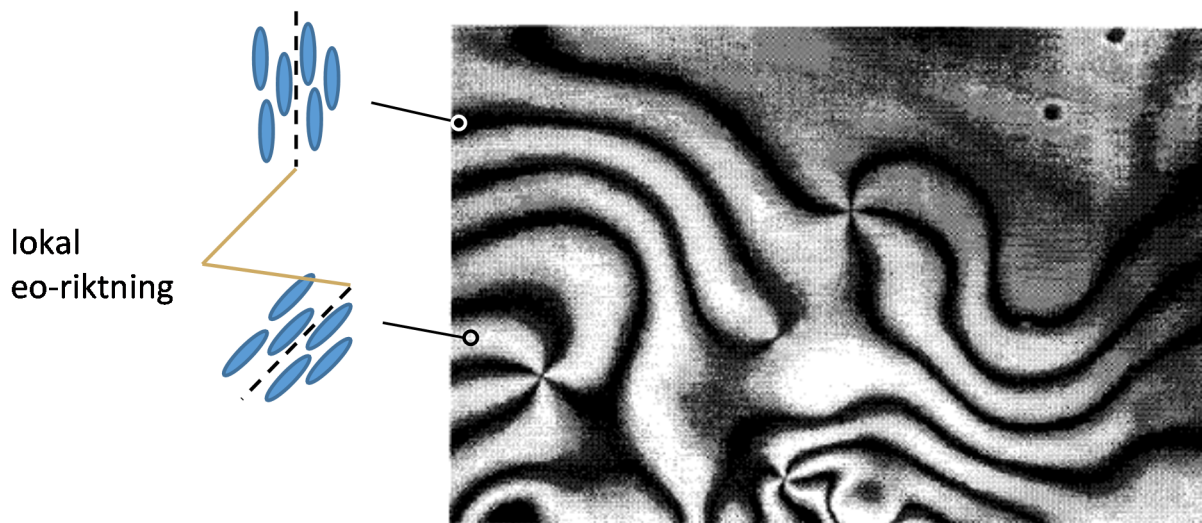
Förenkling: För att inte behöva bry oss om projektioner antar vi att Ole, speglarna, och torget ligger på i stort sett rät linje och att torget är vinkelrätt mot ljuset från speglarna, se figuren nedan.



2. Polarisationsmikroskopet

På framsidan av labbkompndiet för Labb P finns nedanstående fotografi och text. Ett *polarisationsmikroskop* är i princip bara två korsade polarisatorer mellan vilka man lägger det material man vill undersöka (samt några linser som ger en förstord bild, men dem bortser vi ifrån här). I det visade fallet undersöker man ett dubbelbrytande material vars eo-riktning kan variera i polarisatorernas plan, som jag indikerat till vänster i figuren. (Däremot ändras inte eo-riktningen när man rör sig vinkelrätt mot planet, dvs vi har *inte* ett twisted nematic material som i displayer).

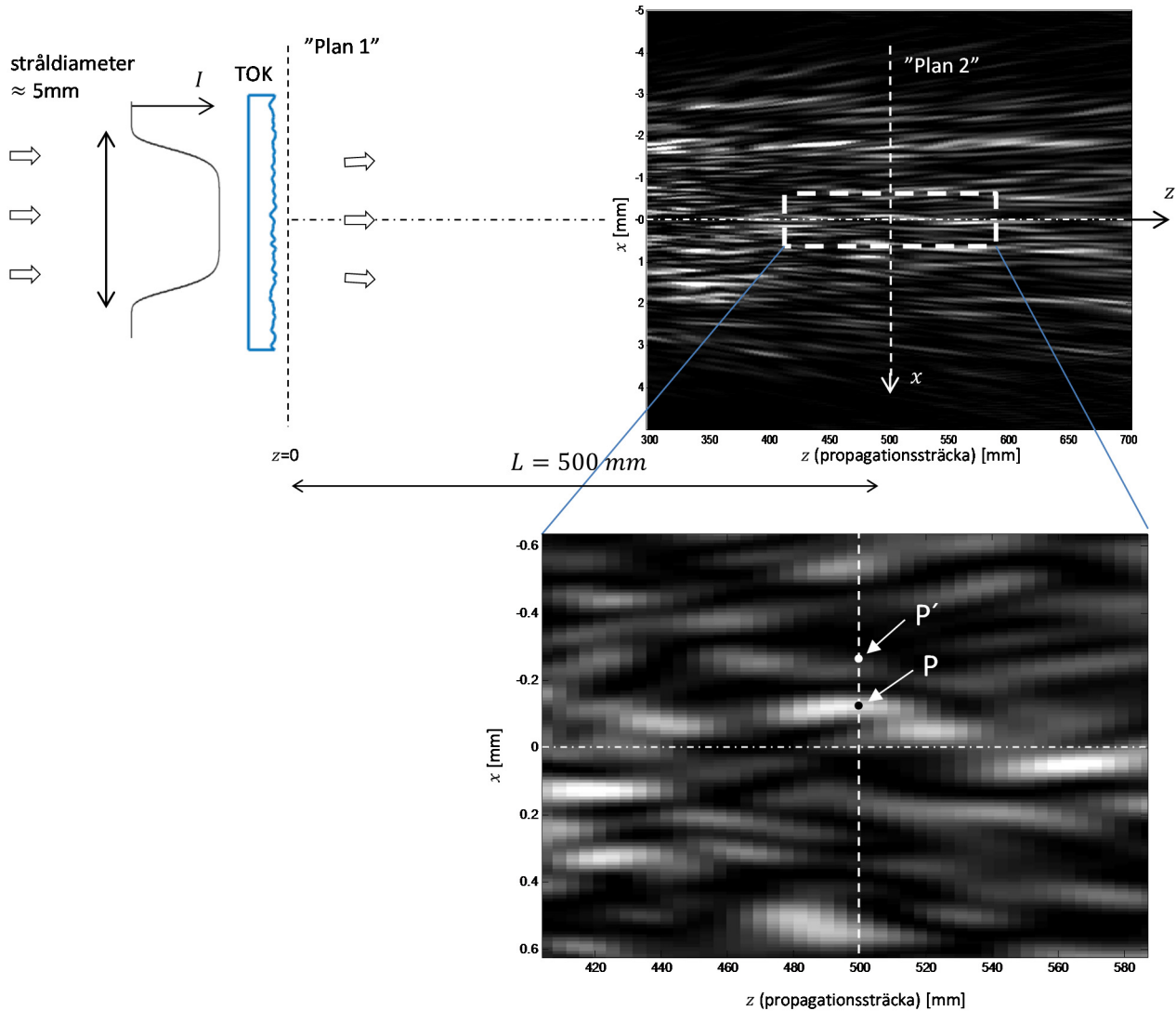
Visa att mörka linjer uppträder där den lokala eo-riktningen hos molekylerna är parallell med någon av polarisatorernas transmissionsriktningar. (4p)



En nematisk vätskekristall betraktad genom ett polarisationsmikroskop. De mörka linjerna uppträder där den lokala optiska axeln är parallell med någon av polarisatorerna. Foto: Torbjörn Lagerwall och Bengt Stebler, Chalmers.

3. Specklar, specklar, specklar

En bred, kollimerad, koherent laserstråle ($\lambda=633\text{ nm}$) får en slumpmässig fasmodulering över sitt tvärsnitt i Plan 1 när den passerat en genomskinlig TOK med skrovlig yta. Plan 1 är beläget där $z=0$, och fältet propagerar åt höger i z -led. Propagationen simuleras med PAS. Figuren visar intensiteten (kvadraten på absolutbeloppet av komplexa fältet) i xz -planet för z i intervallet 300-700mm, och inzoomat i nedersta bilden.



(a) Din mormor hävdar att vid en given tidpunkt t skulle det optiska fältet i punkt P och punkt P' kunna ha samma styrka, trots att punkt P ligger i ett område med hög intensitet och punkt P' i ett område med låg intensitet. Har hon rätt? (3p)

(b) Vad är periodtiden T för fältets oscillationer? (1p)

(c) Hur skulle optiska fältets styrka i punkt P och P' kunna ändra sig under tiden $t=[0, T]$? Besvara frågan genom att rita en skissartad graf för en möjlig variation av fältets styrka, $|E(t)|$, som funktion av $t = [0, T]$ i P respektive P' i samma graf! Gör själv de antaganden som krävs om du behöver mer information än vad som går att utläsa ur den inzoomade bilden ovan. (2p)

Som framgår av inzoomade bilden är de ljusa områdena typiskt ca 30 mm långa i z-led. En sådan sträcka propagerar ljuset som bekant på $T_{30mm} = \frac{30mm}{c} = 0.1ns$.

(d) Hur skulle optiska fältets styrka i punkt P och P' kunna ändra sig under tiden $t = [0, T_{30mm}]$? Besvara frågan genom att rita en skissartad graf för ett möjligt utseende av $|E(t)|$ som funktion av $t = [0, T_{30mm}]$ i P respektive P' i samma graf! Om du vill nöja dig med att rita ut enveloppen är det OK. (3p)

I HUPP5 fick du göra en rörlig film i Matlab som visar tidsutvecklingen av det optiska fältet när det propagerar i en optisk fiber.

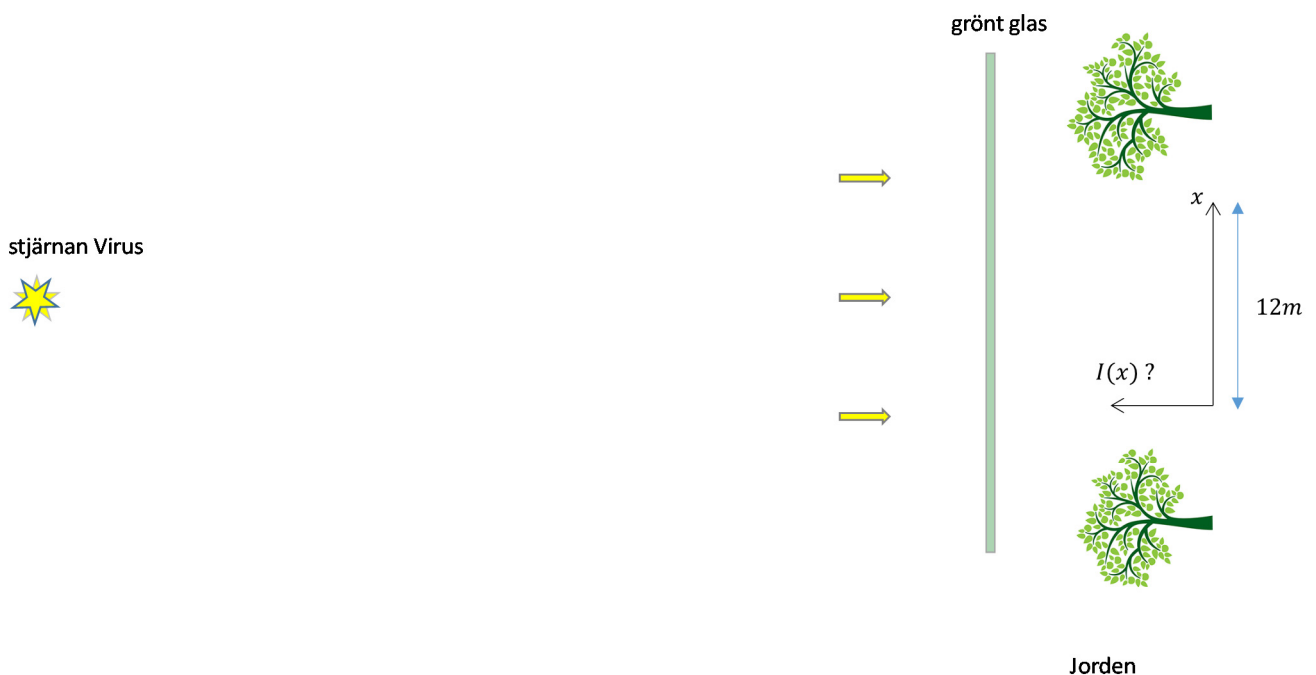
(e) Hur skulle du göra för att åstadkomma en motsvarande film för fältet i det inzoomade området, baserat på resultatet från PAS-simuleringen? (2p)

(f) Hur skulle filmen skilja sig från bilden av det inzoomade området ovan? Skulle den tydligt visa det man ville visa? (2p)

4. Blinkar lilla stjärnan?

När ljuset från den ljusstarka stjärnan Virus kommer till Jorden har det en spatiell koherenslängd på $l_s = 5$ meter (filtrerat genom ett grönt filter).

(a) Skissa ett typiskt resultat vid mätning av intensiteten $I(x)$ hos ljuset från Virus (i vanlig tidsmedelvärdesmening) som funktion av position $x \in [0, 12 m]$ i ett plan vinkelrätt mot infallande stjärnljusets propagationsriktning. Över området man mäter inom välver sig ett stort grönt glastak, som visas av figuren. Bortse från eventuella effekter av jordatmosfären. (3p)



(b) Samma fråga som i (a) men nu för den *instantana* intensiteten $I_{inst}(x)$ i samma x -intervall i ett visst tidsögonblick. Antag att din mätutrustning är oändligt snabb så att du kan göra en ögonblicksmätning. Bortse från eventuella effekter av jordatmosfären. (3p)

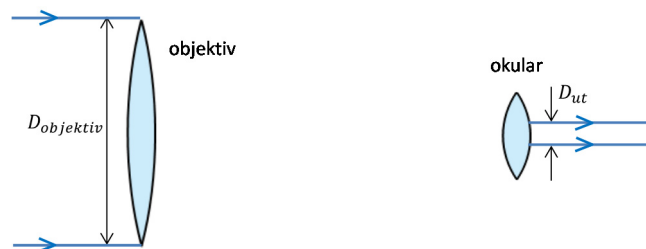
(c) "Oändligt snabb" mätutrustning existerar ju inte, så uppskatta hur långsam din mätutrustning maximalt får vara, uttryckt som storleksordningen hos den maximala integrationstiden för en mätning, för att kunna göra mätningen i (b) i praktiken. (3p)

(d) Varför tycker Homo Sapiens att stjärnor blinkar? (1p)

5. Teleskopet

(a) Förklara vad som menas med förstoringen M_t hos ett teleskop (eller kikare). Rita en strålgångsskiss och härled ur denna ett uttryck för M_t som funktion av objektivets och okulalets fokallängder. Antag att teleskopet består av två positiva linser, som i figuren nedan, och att teleskopet är inställt för att en normalsynt person ska kunna se astronomiska objekt med "avslappnade" ögon. Man brukar ange M_t som positiv även om teleskopet vänder på bilden. (5p)

(b) Visa att ett teleskop som har förstoringen M_t också fungerar som en "beam compressor" med kompressionsfaktorn M_t , d.v.s. utstrålen från teleskopet har en diameter $D_{ut} = \frac{D_{objektiv}}{M_t}$ enligt figuren.



Antag att teleskopet är samma teleskop som i (a) och att okulalet har tillräckligt stor diameter för att allt ljus ska gå igenom linsen. (2p)

6. Nära ögat



GP

START NYHETER SPORT NÖJE TV LEDARE LIVSSTIL A-Ö

Teleskop krävs för att se asteroiden på onsdag. Arkivbild. Bild: Yvonne Åsell, TT

Otäck asteroid närmar sig jorden

VÄRLDEN Den är större än världens näst högsta byggnad och passerar jorden på ett farligt nära avstånd på onsdag. Det är en ypperlig chans att se asteroiden 2014 JO25, men ett eventuellt nedslag skulle vara förödande.

Cecilia Vaccari

16:52 - 18 apr, 2017
Göteborg

Asteroiden 2014 JO25 är 650 meter bred, längre än Shanghai Tower, och kommer korsa jordbanan på ett avstånd som är drygt fyra gånger avståndet till månen. Den upptäcktes för tre år sedan och har dragit till sig intresse från forskare på grund av kollisionenrisken.

– Det skulle bli en fullständig katastrof om den slog ner på jorden. Den skulle kunna fördärva hela Göteborg eller Stockholm, säger Maria Sundin, astrofysiker vid Göteborgs universitet.

MER INNEHÅLL
populärt på gp.se

Två gripna efter väpnat

Den 19 april i år flög den otäckaste asteroiden 2014 JO25 förbi Jorden på ett avstånd av 1.8 miljoner km (dvs nästan 5 gånger längre bort än månen). Asteroiden har en ungefärlig diameter av 650 meter. Den består av ett material som reflekterar ca 25% av infallande synligt ljus (vilket är ovanligt mycket för stenmaterial – månens reflektans är bara hälften).

Enligt artikeln i GP måste en person som vill observera asteroiden använda teleskop. Men vi som gått Optisk F2 vill naturligtvis veta mer precis: vad måste teleskopets märkning "X × Y" vara, enligt den vanliga konventionen för kikare/teleskop, där X är dimensionslöst och Y anges i mm (som exempel hade kikaren som användes i Labb D beteckningen 8×40). Antag att teleskopet är av den typ som behandlades i uppgift 5.

(a) Vi struntar i att försöka se formen på asteroiden, utan nöjer oss med att se asteroiden som en ouppplöst ljusfläck på näthinnan (så som vi alltid ser stjärnorna). Vad ska teleskopet minst vara märkt med (X × Y) för att man ska kunna se asteroiden på detta sätt? (8p)

Ledning: Antag att Jorden ligger på rät linje mellan asteroiden och solen vid passagen. Ljuset från de svagast synliga stjärnorna (med blotta ögat) har en intensitet på ca 10^{-9} W/m^2 (framför ögat). Detta kan jämföras med solljusets intensitet vid Jorden på ca 1000 W/m^2 . Du kan anta att asteroiden är en rund skiva vänd mot solen/Jorden. Använd dig också av det påstående som skulle bevisas i uppgift 5(b).

(b) För att nätt och jämnt skönja asteroidens form (t.ex. avgöra om den är avlång) vad måste teleskopets $X \times Y$ vara då? Har du någon astronomiintresserad kompis som har ett sådant teleskop eller måste man bege sig till Slottsskogsobservatoriet, eller...? (6p)

Ledning: Använd även här uppgift 5(b).

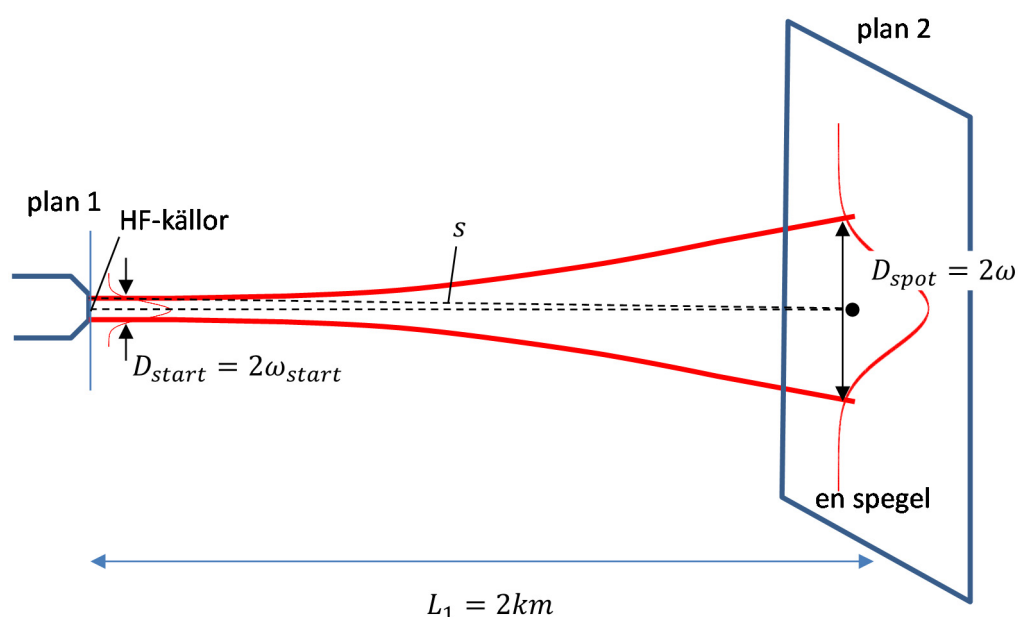
Tentamen i Optik FFY091

Fredag 9 juni 2017, kl. 14:00-18:00

Diskussion och lösningsförslag

1. Lasergutten i Rjukan

(a) Lasern skickar ut koherent ljus. Strålen har en gaussisk intensitetsfördelning i tvärsnittet, och strålen förblir gaussisk under hela sin propagation enligt HUPP 1 (förutsatt att inte spegeln hugger av så mycket av den perifera delen av strålen att ljuset som lämnar spegeln inte kan sägas vara gaussiskt – en avhuggen gauss är ingen gauss!).



Vi börjar med att beräkna hur fältet ser ut när det når spegeln. Våra tumregler för minsta spotsize gäller om fältet i Plan 1, vid lasern, är perfekt fokuserat i centrum av Plan 2, vid spegeln. Vi kollar det! Eftersom strålen är kollimerad i Plan 1, d.v.s. har plana vågfronter, är alla HF-källor i fas i Plan 1. Om skillnaden i gångväg till centrum av Plan 2 är mycket mindre än en våglängd är fälten från HF-källorna i fas även där, d.v.s. vi har bästa möjliga fokusering. Vi beräknar gångvägsskillnaden för en HF-källa i kanten av strålen jämfört med den i mitten av strålen, d.v.s. differensen

$$\begin{aligned} s - L_1 &= \sqrt{\left(\frac{D_{start}}{2}\right)^2 + L_1^2} - L_1 = L_1 \sqrt{1 + \left(\frac{D_{start}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{L_1^2}} - L_1 \approx \{\text{paraxiellt}\} \\ &\approx L_1 \left(1 + \left(\frac{D_{start}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2L_1^2}\right) - L_1 = \frac{D_{start}^2}{8L_1} = \frac{(2\text{mm})^2}{8 \cdot 2\text{km}} = 0.25\text{nm} \ll \lambda \end{aligned}$$

∴ Fältet är optimalt fokuserat! I kursen har vi dessutom tagit upp några andra – men ekvivalenta – metoder att kolla detta:

Alternativt sätt #1 att kolla detta

"Egentligen" blir ett fält med plana vågfronter i Plan 1 optimalt fokuserat efter sträckan L_1 genom att vi sätter in en lins med $f = L_1$. Vi konstaterar nu att i vårt fall blir linsen så svag att dess fasmodulering är försumbar, d.v.s. fältet är optimalt fokuserat även utan denna lins. Linsens maximala fasmodulering inträffar längst ut från linsens centrum och är

$$\varphi_{lins}^{max} = (-)k \frac{r_{max}^2}{2f} = k \frac{\left(\frac{D_{start}}{2}\right)^2}{2f} = \frac{2\pi}{650nm} \frac{(2mm)^2}{8 \cdot 2km} = 2\pi \frac{0.25nm}{650nm} \ll 2\pi$$

där vi antagit att linsen inte behöver "jobba" längre ut än sträckan $\frac{D_{start}}{2}$ från mitten eftersom utsträckningen av den gaussiska strålen är ungefär D_{start} .

∴ Fältet är optimalt fokuserat!

Alternativt sätt #2 att kolla detta

Vi kollar att L_1 är tillräckligt stort så att fältet i Plan 2 är fjärrfältet till fältet i Plan 1. Vi har ju sagt att i fjärrfältet har vi minsta möjliga utbredning av fältet (d.v.s. "minsta spotsize") om HF-källorna i Plan 1 är i fas, som här, eftersom divergensvinkeln för strålen blir som minst då. I F3 i kompendiet Föreläsningssanteckningar med kommentarer har vi ett approximativt villkor på L_1 för att vara i fjärrfältet i Plan 2:

$$L_1 > k \frac{(\text{maximal utbredning av fält i Plan 1 från origo})^2}{2 \cdot (2\pi/10)} \approx \frac{2\pi}{650nm} \frac{(1mm)^2}{2 \cdot \left(\frac{2\pi}{10}\right)} = 7.7m \approx 10m$$

Fjärrfältet inträffar alltså redan efter ~ 10 meter för den smala laserstrålen, vilket bl.a. innebär att efter ca 10 meter börjar strålens tvärsnittsutbredning växa linjärt med propagerade avståndet som indikerats med de två röda kurvorna i den mycket icke-skalenliga bilden ovan. Fältet i Plan 2, som ligger 2 km bort, är alltså med mycket god marginal fjärrfältet till fältet i Plan 1, och har alltså minsta möjliga utbredning eftersom fältet i Plan 1 har plana vågfronter.

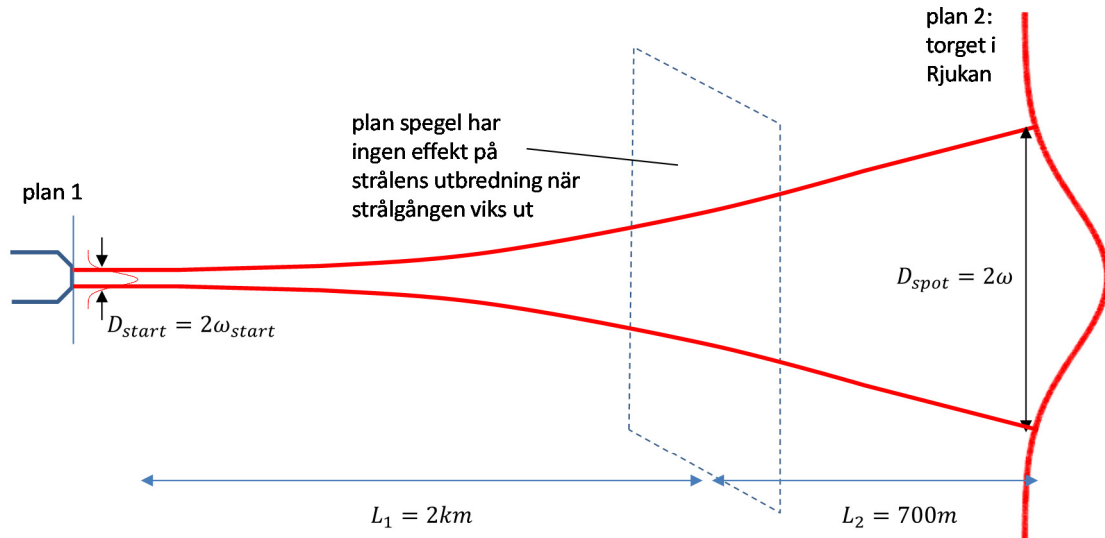
∴ Fältet är optimalt fokuserat!

Nu är vi helt säkra på att vi kan använda tumregeln om minsta spotsize, och eftersom strålen är gaussisk kan vi använda exakta tumregeln för gaussiska strålar från HUPP 1

$$D_{spot} \equiv 2\omega = C \frac{\lambda}{D_{start}} L_1 = 1.27 \frac{\lambda}{2\omega_{start}} L_1 = 1.27 \frac{650nm}{2mm} 2km = 0.8m$$

Har man glömt att $C = 1.27$ går det naturligtvis bra att använda $C = 1$. Laserstrålen divergerar oundvikligen under propagationen, men dess tvärsnittsdiаметer på runt 1m vid spegeln är tillräckligt liten för att strålen gott och väl ska rymmas inom en av speglarna, med försumbar avhuggning p.g.a. ljus som faller utanför spegeln.

Eftersom hela fältet vid Plan 2 ryms inom spegelytan har reflektionen i den plana spegeln ingen effekt på propagationen, förutom att den ändrar propagationsriktningen. Om vi på vanligt sätt viker ut propagationen ser hela propagationen från lasern till torget i Rjukan ut på detta sätt



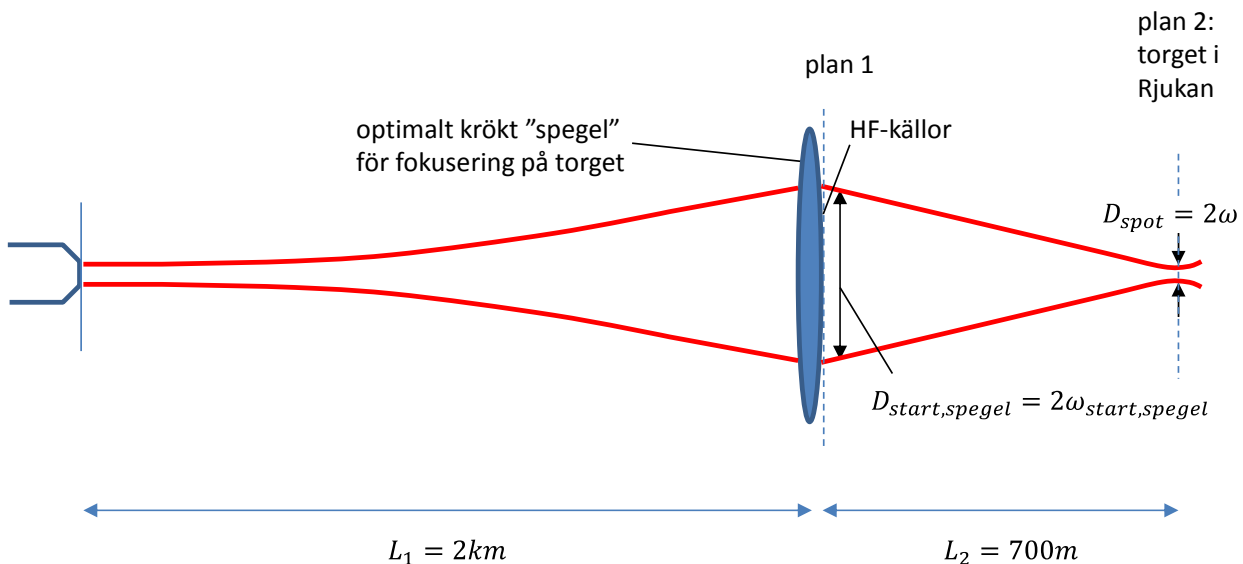
Vi kan alltså använda samma formel som vi använde nyss: den exakta tumregeln för gaussiska strålar,

$$D_{spot} \equiv 2\omega = C \frac{\lambda}{D_{start}} (L_1 + L_2) = 1.27 \frac{650nm}{2mm} (2km + 700m) = 1.1m$$

Det är alltså bara någon kvadratmeter av torgets yta som blir belyst av lasern, om Ole är så kallblodig att hans hand som håller lasern inte darrar det minsta. Men det innebär ändå att en pupill som tillhör ett öga hos en betraktare på torget träffas av en effekt som bara är $A_{pupill}/A_{spot} \sim (5mm)^2 / (1m)^2 \sim 10^{-5}$ av den totala effekt som lasern avger, vilket är helt ofarligt även om lasern ligger 10-100 gånger över max tillåten uteffekt för laserpekare.

(b) Om spegeln är krökt fungerar den som en lins, som ändrar fäsen på fältet. Farligast (minsta utbredning av ljuset på torget) blir det om linsen lägger på en fas som gör fältet efter spegeln optimalt fokuserat på torget. (Observera skillnaden mot (a), där det var fältet direkt efter lasern som var optimalt fokuserat på torget. Nu är det fältet efter spegeln som är optimalt fokuserat, förutsatt att vi har rätt krökning hos spegeln, och då kan vi fokusera till mycket mindre spot på torget eftersom fältets utbredning vid spegeln är mycket större än fältets utbredning vid lasern.)

Vi har



För att beräkna D_{spot} på torget använder vi samma formel som tidigare för spotsize för en optimalt fokuserad gaussisk stråle

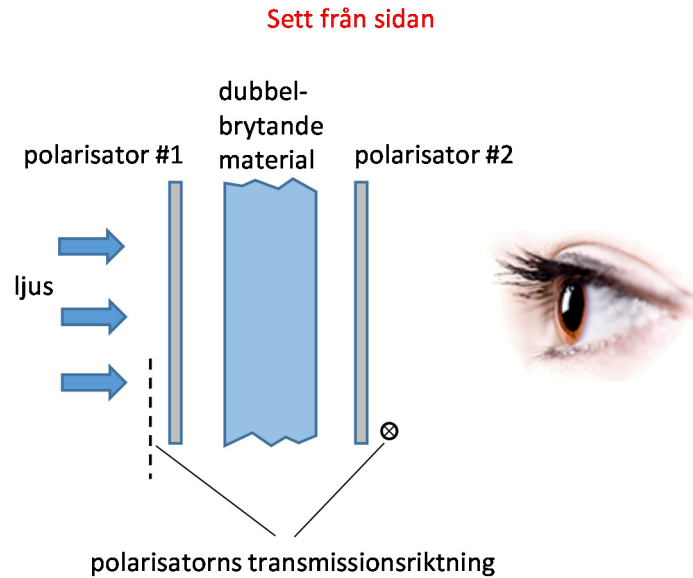
$$D_{spot} \equiv 2\omega = C \frac{\lambda}{D_{start,spegel}} L_2 = 1.27 \frac{650\text{nm}}{0.8\text{m}} 700\text{m} = 0.7\text{mm}$$

där $D_{start,spegel}$ är lika med D_{spot} för den infallande strålen på spegeln som vi beräknade först i denna uppgift, d.v.s. $D_{start,spegel} = 0.8\text{m}$.

Laserpricken på torget är alltså t.o.m. mindre än strålens diameter när den kommer ut från lasern! En oturligt placerad människa (med pupilldiameter på ett par millimeter) på torget i Rjukan kan alltså teoretiskt sett få allt laserljus från laserpekaren att passera genom sin pupill och in i ögat. Detta är sannolikt farligt eftersom lasern hade förbjudet hög uteffekt.

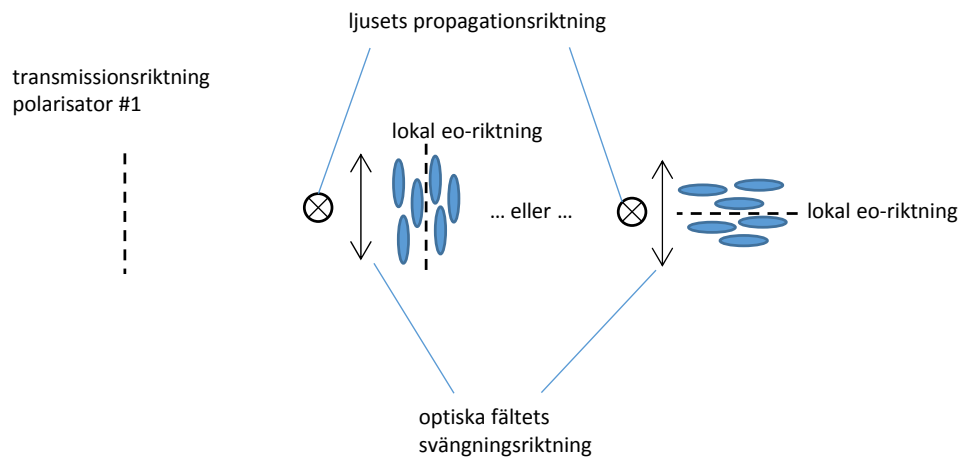
Exemplet är naturligtvis inte helt realistiskt: Krökningen på spegeln får inte avvika från den optimala formen med mer än en bråkdel av våglängden över en meterstor yta, vilket kräver samma precision som när man mödosamt slipar stora teleskopspeglar. Inte heller tar vi hänsyn till att luftens brytningsindex inte är helt homogent, vilket gör att propagationen genom luften ger en extra, ytterst liten, fasmodulering som dessutom varierar i tiden, vilket motverkar strålens perfekta fokusering på torget.

2. Polarisationsmikroskopet



Eftersom polarisatorerna är korsade, d.v.s. deras transmissionsriktningar är roterade 90° relativt varandra, är uttrycket "där den lokala eo-riktningen är parallell med någon av polarisatorernas transmissionsriktningar" ekvivalent med "där den lokala eo-riktningen är antingen parallell med eller vinkelrät mot transmissionsriktningen hos polarisator #1". Det betyder att vi har följande två möjliga situationer efter att ljuset propagerat genom polarisator #1, som vi godtyckligt antar har "vertikal" transmissionsriktning som indikeras i figuren:

Med propagationsriktningen vinkelrätt mot papperet, efter polarisator #1



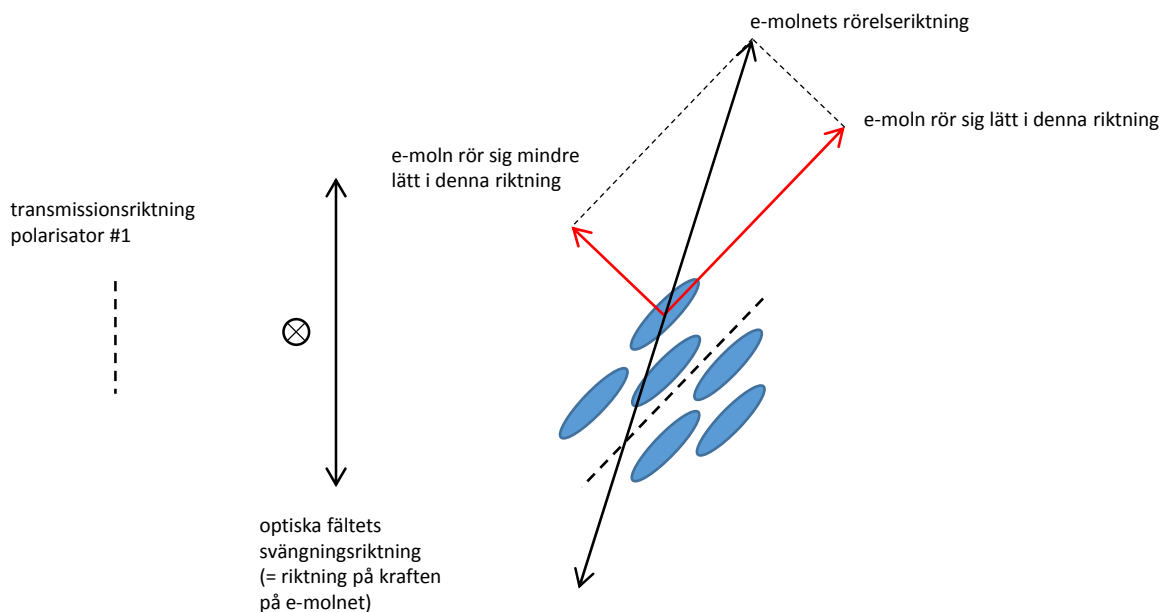
I det vänstra fallet försöker fältet röra elektronmolnet hos molekylerna (de blå ellipserna) längs eo-riktningen, i det högra fallet i en riktning 90° mot eo-riktningen. I båda fallen kommer elektronmolnet att röra sig i exakt samma riktning som fältet (fast olika lätt). Det är precis det som

sker i vanliga (icke-dubbelbrytande) material, och ljuset tycker därför att det är precis som att propagera i ett vanligt material, som inte förändrar polarisationstillståndet hos ljuset.

Eftersom polarisationstillståndet inte ändras kommer ljuset vara "vertikalt" polariserat hela vägen ända fram till polarisator #2. Den har "horisontell" transmissionsriktning eftersom polarisator #1 och #2 är korsade. Inget ljus kommer alltså igenom – det blir mörkt i de positionerna. Det var det vi skulle visa.

(Hade däremot molekylerna legat snett i förhållande till infallande ljusets polarisation, hade elektronmolnet tenderat röra sig både längs eo-axeln och i riktning 90° mot eo-riktningen:

Om eo-riktningen ligger "snett" i förhållande till polarisatorns transmissionsriktning



∴ e-molnet rör sig inte i samma riktning som optiska fältet → ljusets polarisation ändras vid propagation

Eftersom det är lättare för elektronmolnet att röra sig längs eo-axeln blir denna rörelse större: elektronmolnet rör sig inte längre exakt i samma riktning som fältet som orsakar rörelsen. Avvikelsen mellan elektronmolnets rörelseriktning och polarisationen hos infallande ljus på molekylerna leder till att polarisationstillståndet ändras när fältet propagerar. Då kommer i allmänhet inte ljuset som faller på polarisator #2 vara vertikalt linjärpolariserat, och därför inte blockeras fullständigt av den polarisatorn.)

3. Specklar, specklar, specklar

I denna uppgift studerar vi ett vanligt koherent optiskt fält av lasertyp, alltså av det slag som vi vanligen studerar i optikkursen (och som ni *alltid* studerade i elfältkursen). Det betyder att fältet i varje punkt i rummet varierar sinusformigt, och vi använder som vanligt komplex notation för att beskriva fältets fas och amplitud. Amplituden, d.v.s. absolutbeloppet av komplexa fältet, betecknar maximala styrkan hos fältet under en oscillation ("period") hos fältet.

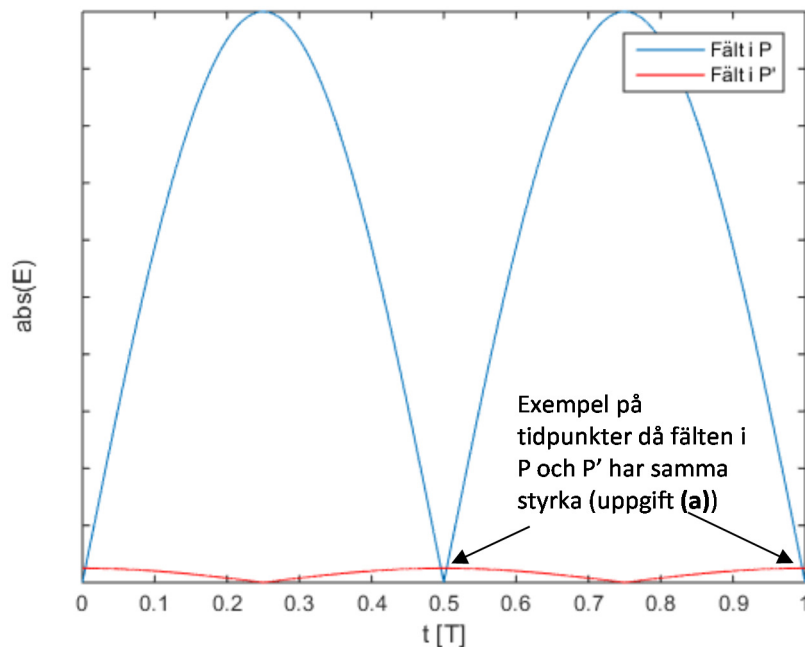
(a) I punkt P är amplituden hos fältet hög enligt inzoomad figur, eftersom figuren visar intensiteten (=amplituden i kvadrat) och P befinner sig i ett "ljus" område. Alltså är den maximala styrkan hos fältet hög, men eftersom fältet oscillerar går fältets styrka ner till noll två gånger per period. I punkt P' är amplituden hos fältet nära noll eftersom P' är beläget i ett mörkt område i bilden. Fältet i P' är alltså *alltid* nära noll. Fältet i P och P' kan alltså ha samma styrka i de ögonblick då fältet i P är nära noll. Mormor har alltid rätt!

(b) Ett fält med våglängden $\lambda=633\text{ nm}$ har en periodtid

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{633\text{ nm}}{3 \cdot 10^8\text{ m/s}} = 2\text{ fs}$$

Snabba vibrationer!

(c) Den inzoomade bilden på tentatesen visar amplituden (i kvadrat) och ger ingen information om fäsen på fältet, d.v.s. vid vilka tidpunkter oscillationerna hos fältet i P och P' når sina maxvärden. I skissen nedan antar vi helt godtyckligt att fältet i P är noll vid tiden $t=0$, medan fältet i P' antas ligga förskjutet 90° i fas relativt fältet i P. Då fås



eftersom fältet i varje punkt i rummet har ett maximum och ett (lika starkt) minimum per period T.

(d) Precis som alla interferensmönster från koherent ljus är detta interferensmönster stationärt, d.v.s. det ändrar sig inte i tiden. Punkter i rummet där de sfäriska vågorna från HF-källorna i Plan 1 interfererar övervägande konstruktivt, t.ex. punkt P, förblir starka eftersom HF-källorna har samma fasrelation hela tiden (detta är ju kännetecknande för koherent ljus), och vice versa för punkt P'.

Amplituden hos fältet i en punkt i rummet ändrar sig alltså inte med tiden – fältet oscillerar naturligtvis med perioden T men fältets maxvärde ändras inte.

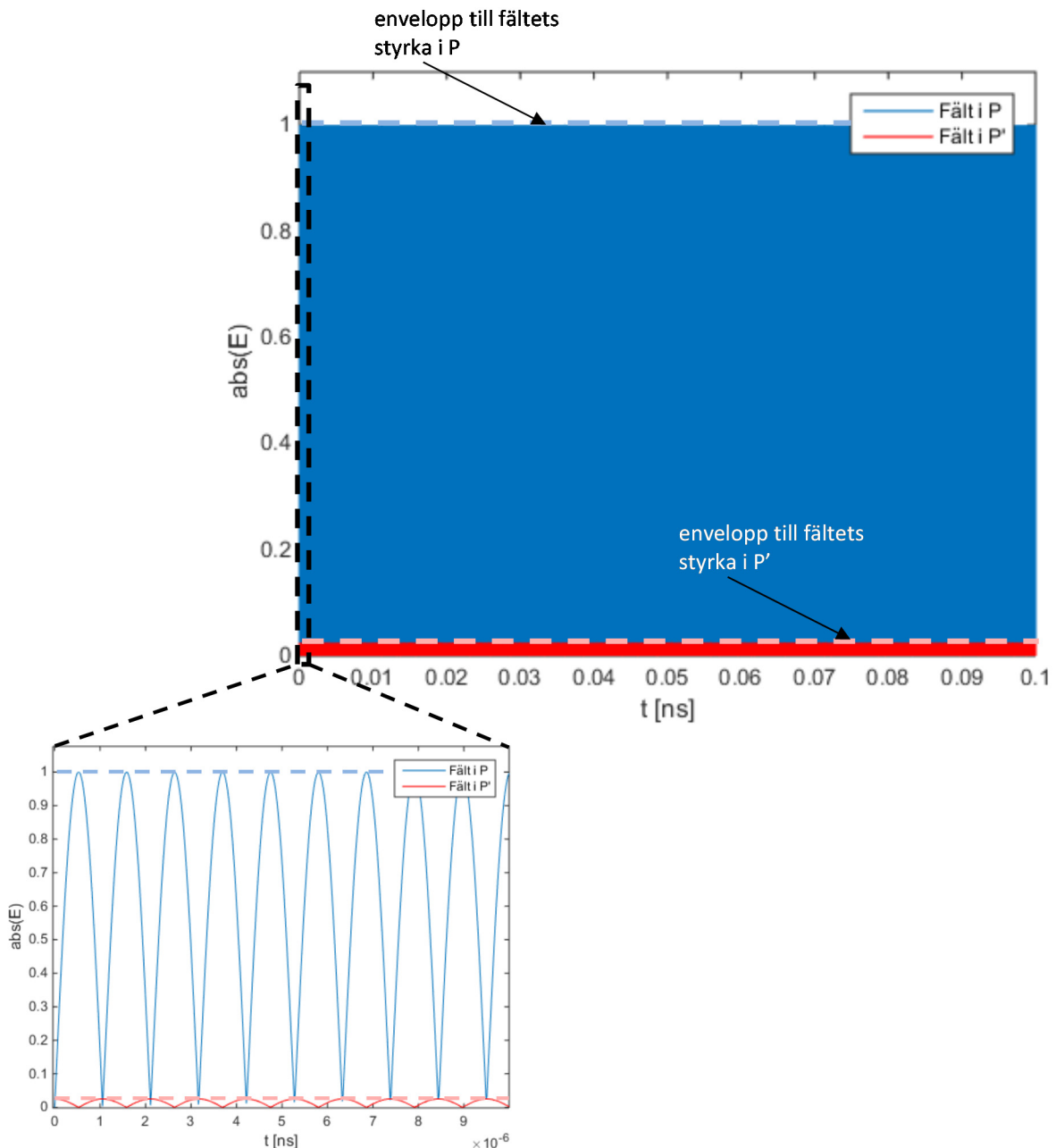
tveksam?

Om du fortfarande tycker specklarna borde röra sig, tänk då på hur det såg ut när vi demonstrerade speckle genom att lysa med en bred laserstråle på den skrovliga projektorduken i FB-salen. När du tittade på den röda fläcken på duken var den full av ljusa och mörka "gryn" – speckle – som inte rörde sig så länge du höll huvudet stilla. Grynen är egentligen ett interferensmönster hos ljusvågen som går från duken till ditt öga, och att de ligger stilla betyder att laserljuset ger ett stationärt interferensmönster.

fortfarande tveksam?

Om du ändå fortfarande tycker att specklarna borde röra sig, tänk då på det enklaste "speckelmönstret" av alla: den enda speckel man får om TOKen varit en lins, d.v.s. den speckel vi vanligen kallar fokus. Som bekant ligger ett fokus stilla även om ljuset – vågfronterna – propagerar genom fokuset.

Eftersom fältet hinner oscillera väldigt många gånger under tiden $t = [0, T_{30mm}] = [0, 0.1 \text{ ns}]$, närmare bestämt $T_{30mm}/T \approx 50000$ gånger, kan det vara lämpligt att bara ta med enveloppen, som visas som blå respektive ljusröda streckade linjer i figuren nedan:

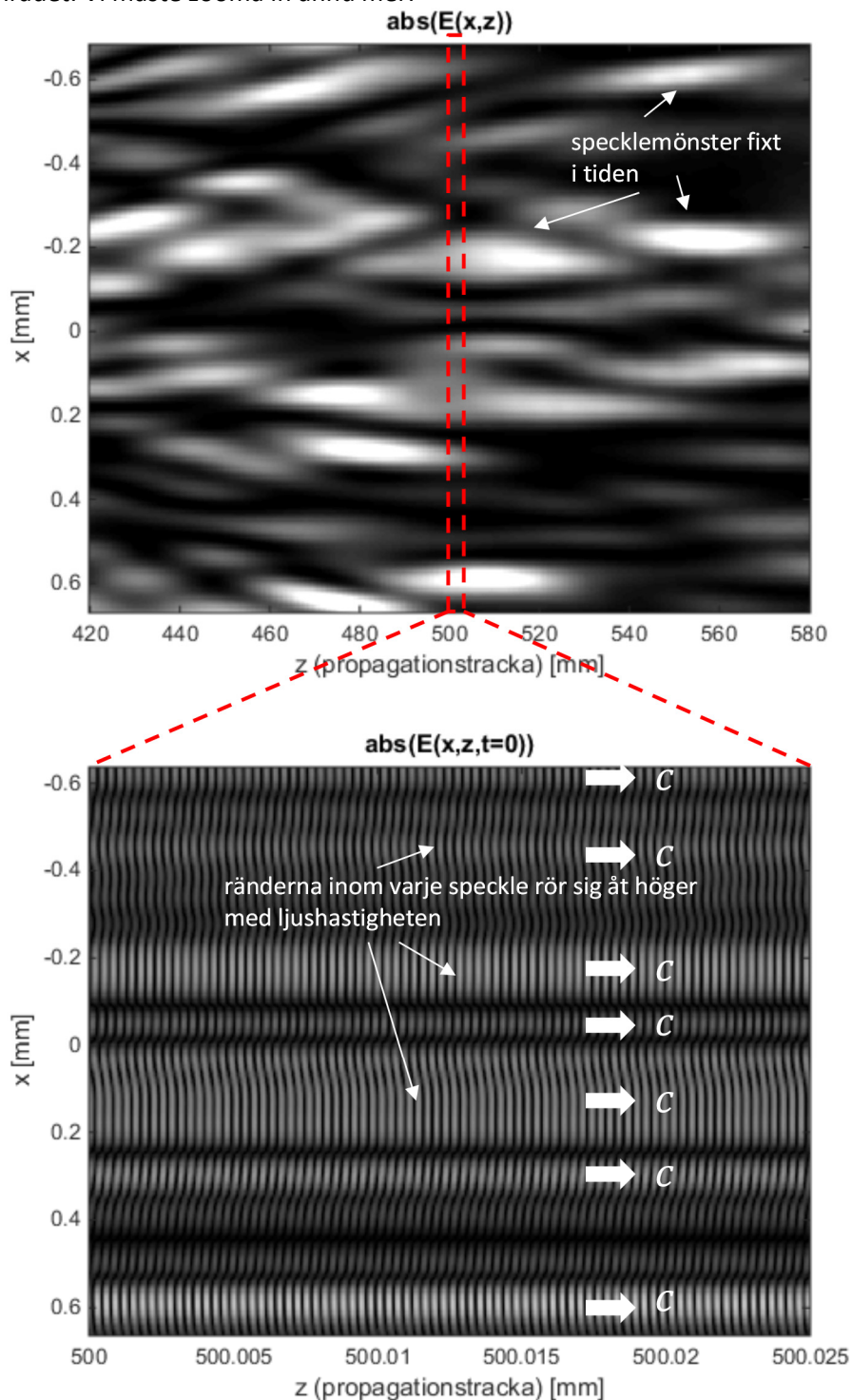


(e) PAS och HFM, i likhet med nästan alla andra analytiska eller numeriska propagationsmetoder för koherent ljus, ger det *komplexa* fältet i rummet, t.ex. fältet $E(x, z)$ i det område som visas i uppgiftsbeskrivningen. Det *verkliga* värdet på fältet vid en tidpunkt t , $E(x, z, t)$, för ett fält på komplex form fås genom att multiplicera med faktorn $e^{-j\omega t}$ och ta realdelen

$$E(x, z, t) = \text{Re}\{E(x, z)e^{-j\omega t}\}$$

Detta görs successivt för ökande värden på t . Plottas $E(x, z, t)$ för varje t fås då en spännande film som visar hur fältet ändras i tiden.

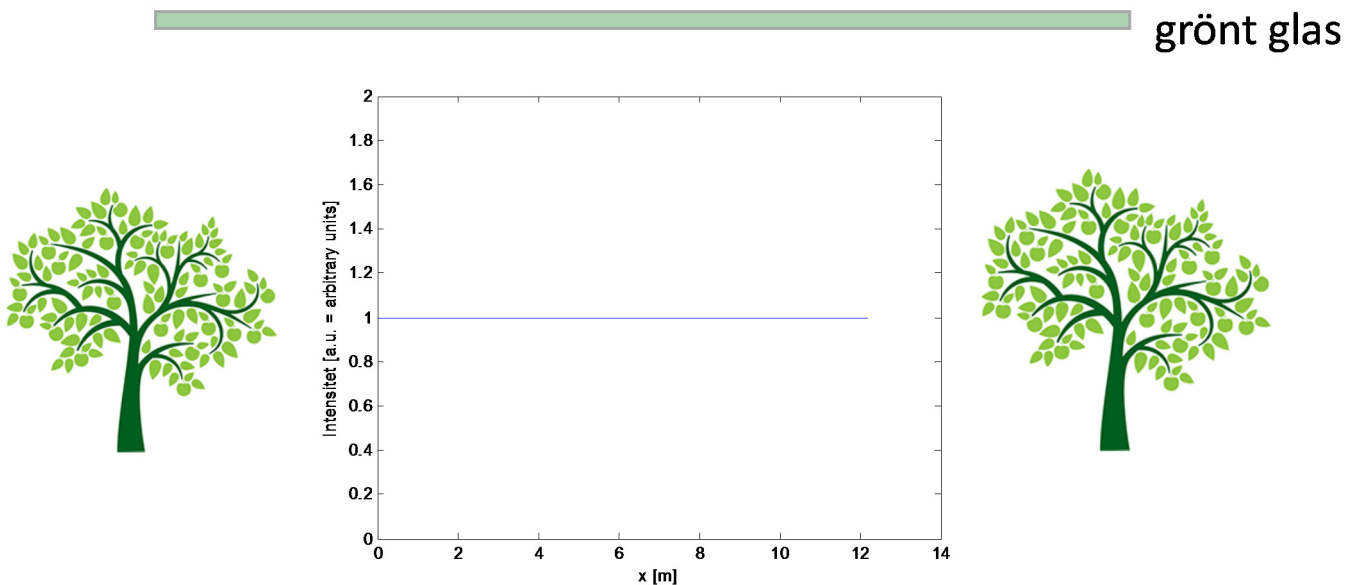
(f) Till skillnad från amplituden (i kvadrat), som visas i inzoomade bilden, varierar det verkliga fältet, $E(x, z, t)$, i en viss tidpunkt t mycket snabbt i z -led eftersom det går ner till noll två gånger per våglängd i utbredningsriktningen. Det verkliga fältet blir alltså "randigt", men ränderna ligger så tätt i z -led att det inte går att visa korrekt om man plottar ett område som är så långt i z -led som det inzoomade området. Vi måste zooma in ännu mer:



(det visade exemplet är en simulering med en annan slumpmässig fasmodulering på TOKen än den som användes vid konstruktionen av uppgiften, så specklemönstret blir annorlunda än det som visas på tentatesen). När filmen körs, d.v.s. t ökar kommer ränderna att röra sig åt höger med ljusets hastighet inom varje speckel, men speckeln själv ligger kvar. När en ljus rand närmar sig högerkanten av en speckel kommer den alltså att börja dämpas ut.

4. Blinkar lilla stjärnan?

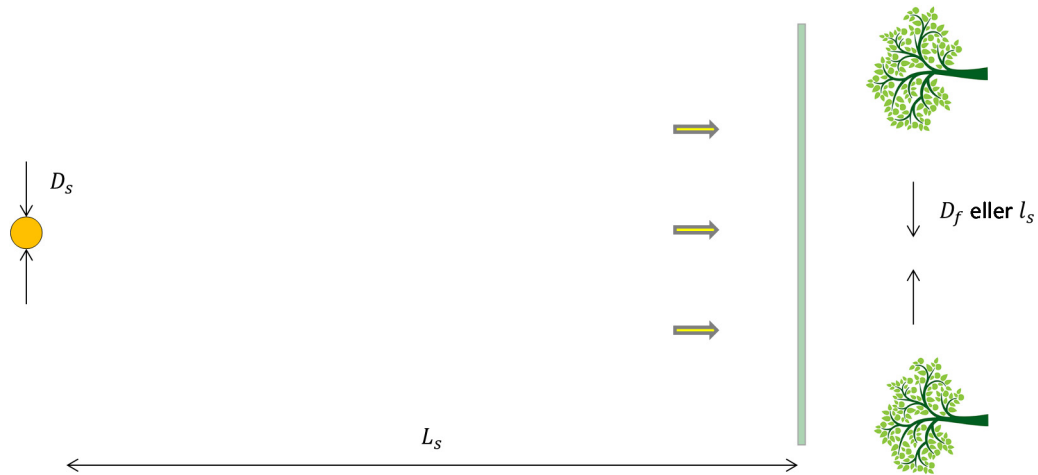
(a) En stjärna är en inkoherent (vanlig, icke-laser) ljuskälla. Dess punktkällor strålar var för sig likformigt i en halvsfär (om vi tänker oss stjärnan som en platt cirkulär skiva som t.ex. i HUPP4). Eftersom stjärnan är en inkoherent ljuskälla finns det ingen korrelation mellan fältet från olika punktkällor. Det betyder att den vanliga (tidsmedelvärdesbildade) intensiteten fås som summan av punktkällornas intensiteter var för sig (all interferens mellan källorna integreras bort på alla mätbara tidsskalor). Den totala intensiteten från stjärnan blir alltså också konstant på en halvsfär. Den halvsfär som skär Jorden har en radie på flera ljusår – intensiteten från stjärnan är därför väldigt konstant över alla jordiska mått, som visas i nedanstående figur.



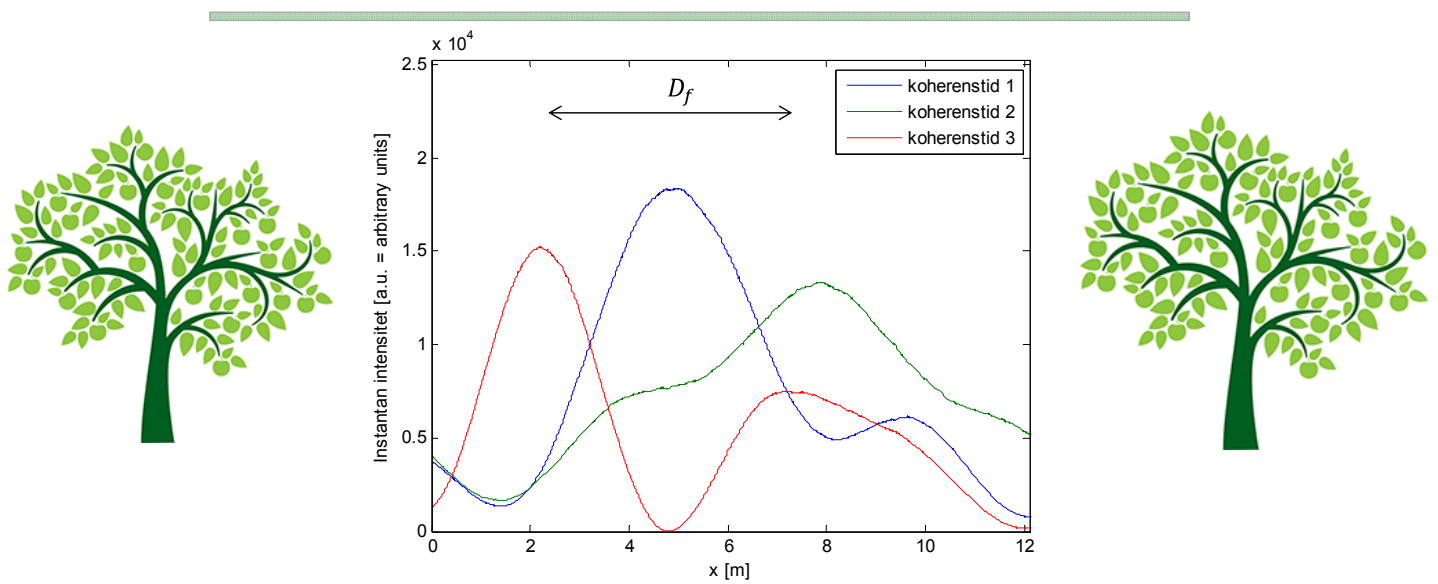
(b) Inom ett tidsspänn kortare än en koherenstid har fältet från stjärnans olika punktkällor en fix fasrelation – de är korrelerade – och ger därför ett interferensmönster på jordytan (ett specklemönster som ändrar sig från en koherenstid till nästa). Under en koherenstid är fältet från stjärnan alltså koherent, och vi kan därför använda tumregeln om minsta feature size, D_f , hos fältet när det når Jorden. Som vi kanske kommer ihåg när det gäller den spatiella koherenslängden l_s för en inkoherent källa så följer den en tumregel som ser matematiskt likadan ut

$$D_f = C \frac{\lambda}{D_s} L_s \text{ (koherent ljuskälla, t.ex. en inkoherent ljuskälla vars fält bara observeras inom en koherenstid)}$$

$$l_s = C \frac{\lambda}{D_s} L_s \text{ (inkoherent ljuskälla)}$$



Eftersom uppgiftstexten anger att spatiella koherenslängden är $l_s = 5\text{m}$ är alltså även minsta featuresizen i specklemönstret under en koherenstid $D_f = 5\text{m}$. Exempel på den instantana intensitetsfördelningen vid tre olika tillfällen skulle därför kunna se ut så här:



Eftersom D_f endast anger övre gränsen för hur snabbt fältet kan variera i rummet (d.v.s. kortaste sträckan över vilken fältet kan ändra sig signifikant) är långsammare rumsliga variationer fysiskt möjliga (t.ex. tycks fältet under koherenstid #2 i exemplet ovan variera lite långsammare i det undersökta området), men pga punktkällornas slumpmässiga fas har de flesta specklar en storlek som ligger i närheten av D_f .

(c) En viss instantan intensitetsfördelning, med sina speckles, existerar bara under en koherenstid. Därefter har punktkällorna på stjärnan ställt in sig med andra fasrelationer och ger ett nytt interferensmönster med specklar på andra ställen. Koherenstiden τ_c bestäms av bandbredden hos ljuset. Eftersom ljuset från stjärnan gått genom det gröna glaset har andra färger än grönt i strålningen absorberats bort vid passagen genom glaset. Det gör fältet något mindre "kaotiskt" och därmed mer förutsägbart under en något längre tid. Om vi antar att glaset släpper igenom ljus i hela det våglängdsområde vi kallar "grönt", d.v.s. ungefär 500-560 nm, så blir alltså bandbredden på ljuset som gått igenom, uttryckt i våglängd,

$$\Delta\lambda \approx 60\text{nm}$$

Själv kommer jag aldrig ihåg uttrycket för bandbredd uttryckt i frekvens, $\Delta\nu$, som funktion av $\Delta\lambda$. Antingen differentierar man eller så gör man som på gymnasiet:

$$\Delta\nu \equiv \nu^+ - \nu^- = \frac{c}{\lambda^-} - \frac{c}{\lambda^+} = c \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^- \lambda^+} = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^- \lambda^+} \approx c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = c \frac{60\text{nm}}{(550\text{nm})^2} = 60 \text{ THz}$$

där superscript +/- betecknar största respektive minsta värde i det intervall man betraktar. Koherenstiden blir

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{60 \text{ THz}} \approx 20 \text{ fs}$$

Koherenstiden är ohyggligt kort i detta fall. Ska man mäta eller fotografera specklemönstret måste utrustningen ha en integrationstid som maximalt är i storleksordningen av τ_c , d.v.s. ~ 20 fs. Sådan apparatur torde inte existera!

(d) En Homo Sapiens som står under det gröna glastaket och tittar mot stjärnan befinner sig typiskt omväxlande i en mörk speckle eller ljus speckle under en tidsrymd av storleksordningen τ_c . Så hade vi haft sjukt snabba ögon hade vi kunnat uppfatta att stjärnan blinkande p.g.a. detta (specklarna har ju en utsträckning på ungefär $D_f = l_s = 5\text{m}$, så vänster- och högerpupillen, som är separerade med ca 6 cm, upplever samtidigt antingen "mörker" eller "ljus"). Men ögonen är på tok för långsamma: deras integrationstid är i bästa fall ~ 0.01 sekunder. Det betyder att de medelvärdesbildar $\sim 0.01\text{s}/\tau_c \approx 10^{12}$ intensitetsfluktuationer, vilket ger en perfekt utjämning av intensiteten. Ögat borde inte uppfatta minsta lilla blink. Men så har vi det där med jordatmosfären som vi försummat hittills i denna uppgift. P.g.a. inhomogeniteter varierar luftens brytningsindex en aning så att atmosfären fungerar som ett fasmodulerande diffraktivt optiskt element (DOE). Ett sådant sänder typiskt ut mer ljus i vissa riktningar än andra (tänk bara på ett gitter). Råkar dina ögon befinna sig i en sådan "förstärkt stråle" ser stjärnan lite starkare ut, för att nästa ögonblick verka svagare när den atmosfäriska DOEn ändrat fasmodulering och sänder ut mer ljus i andra riktningar. Stjärnan blinkar, men nu med en frekvens som är så låg att ögat kan uppfatta blinket.

5. Teleskopet

(a) Med "förstoringen" M_t hos ett teleskop/kikare avses

1. vinkelförstoringen hos en infallande plan våg (kollimerad ljustråle),
2. hur mycket större bilden av objektet blir på näthinnan med teleskopet jämfört med om objektet observerats direkt utan teleskop.

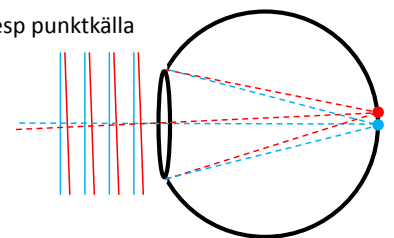
Dessa två definitioner av M_t är ekvivalenta. Vanligen anges M_t alltid som positiv, även för ett teleskop som ger en upp-och-nedvänd bild (som i detta fall).

Ett avslappnat normalsynt öga, med en ögonlins som är så platt som möjligt, är inställt för att se avlägsna föremål tydligt:

avlägsna punktkällor

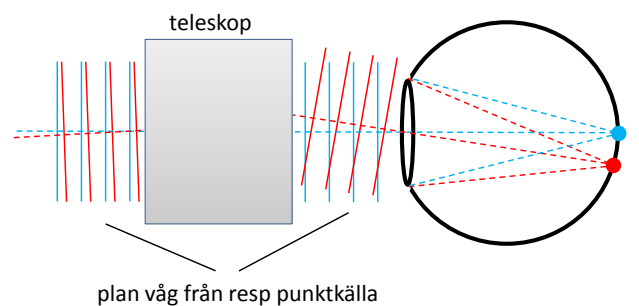


plan våg från resp punktkälla

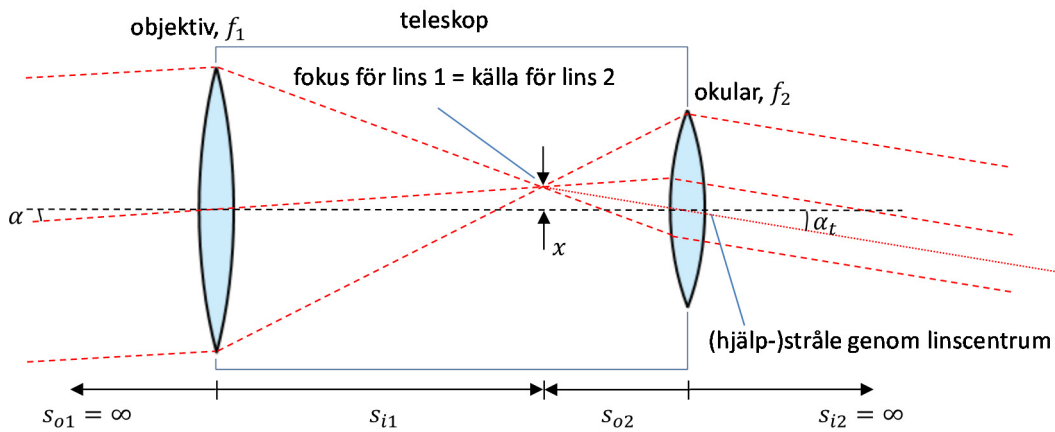


d.v.s. ljuset från varje punktkälla på objektet har plana vågfronter (är kollimerat) när det kommer till ögat. Det kräver vi även när ljuset gått genom teleskopet

avlägsna punktkällor



Strålgångsdiagrammet genom teleskopet har alltså oändligt avlägsen källa för objektivet och oändligt avlägset fokus för okularet:



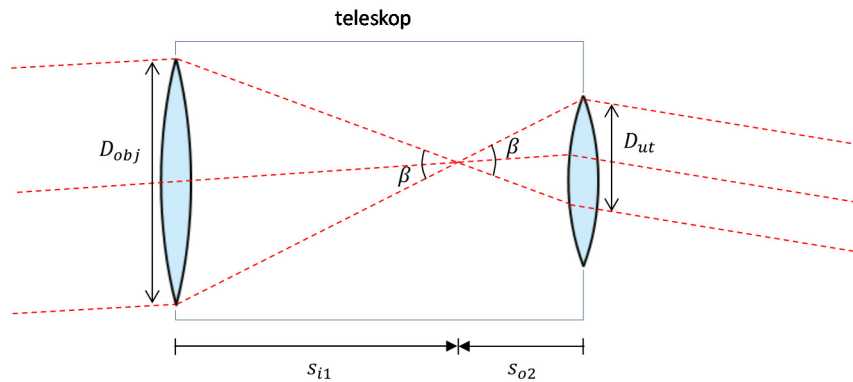
Utvinkeln α_t blir

$$\alpha_t = \frac{x}{s_{o2}} = \frac{\alpha s_{i1}}{s_{o2}} = \frac{\alpha f_1}{f_2}$$

vilket ger vinkelförstoringen

$$M_t \equiv \frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$$

(b) Paraxiellt (som vi nästan alltid antar utan att nämna det explicit) har vi



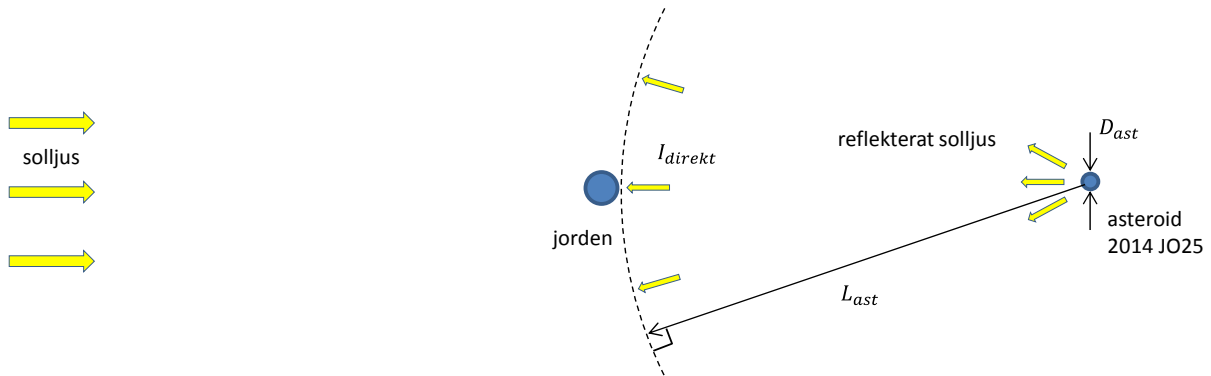
$$\beta = \frac{D_{ut}}{s_{o2}} = \frac{D_{obj}}{s_{i1}} \Rightarrow \frac{D_{ut}}{D_{obj}} = \frac{s_{o2}}{s_{i1}} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{M_t}$$

d.v.s. en kompression av strålen med faktorn M_t (längdskala).

6. Nära ögat

(a) Anledningen till att vi inte ser asteroiden är att intensiteten vid ögat är för låg. Teleskopets stora objektiv samlar in mer ljus som komprimeras av teleskopet, enligt uppgift 5(b), så att intensiteten vid ögat ökar.

Vi börjar med att beräkna intensiteten hos ljuset från asteroiden vid Jorden, I_{direkt} (den vi tar emot direkt, utan att använda teleskop)



$$I_{direkt} = \frac{P_{ut,ast}}{4\pi L_{ast}^2} = \frac{I_{sol} A_{ast} R_{ast}}{4\pi L_{ast}^2}$$

där $P_{ut,ast}$ är den av asteroiden utsända effekten av det reflekterade solljuset. Den är lika med effekten av det inkommande solljuset $I_{sol} A_{ast}$, där I_{sol} är solljusets intensitet vid asteroiden och $A_{ast} = \pi \left(\frac{D_{ast}}{2}\right)^2$ är asteroidens tvärsnittsarea, multiplicerat med reflektansen R_{ast} hos asteroidens ytmaterial. Vi antar förenklat att asteroiden är en platt cirkelskiva som strålar ut likformigt i en halvsfär, vilket ger intensiteten I_{direkt} enligt formeln ovan. Med insättande av uttrycket för A_{ast} fås

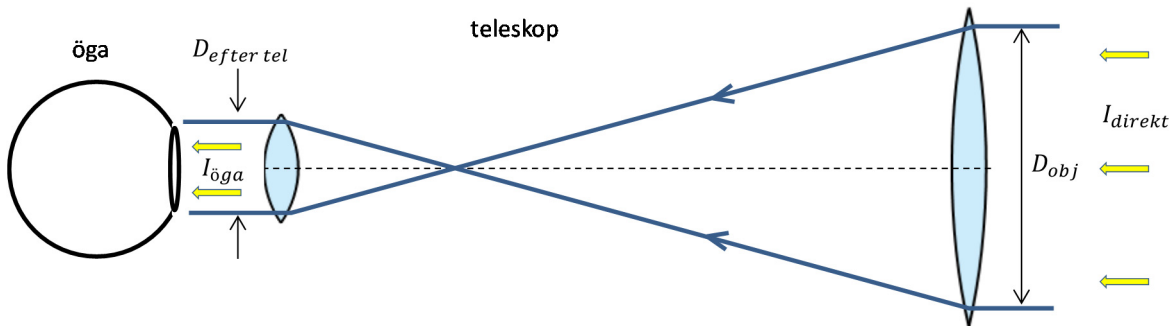
$$I_{direkt} = I_{sol} \frac{D_{ast}^2 R_{ast}}{8L_{ast}^2} = \frac{(650m)^2 0.25}{8 \cdot (1.8 \text{ milj km})^2} I_{sol} = 4 \cdot 10^{-15} I_{sol} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

eftersom intensiteten hos solljuset i stort sett är samma vid asteroiden som vid Jorden. Eftersom ögat behöver träffas av en intensitet av $I_{min} = 10^{-9} \text{ W/m}^2$ för att vi ska registreras en ljus fläck (stjärna) måste vi öka intensiteten med en faktor $F_i \equiv I_{min}/I_{direkt} = 10^{-9}/4 \cdot 10^{-12} = 250$ med hjälp av teleskopet.

Enligt uppgift 5(b) åstadkommer en kikare med förstoring M (parametern "X" i märkningen) en kompression av strålen med en faktor M (längdskala), och ökar således intensiteten på strålen med en faktor M^2 . Minsta möjliga värde på M ges alltså av

$$F_i \equiv I_{min}/I_{direkt} = M^2 = 250 \Rightarrow M = \sqrt{250} = 16$$

Samtidigt gäller denna gräns för synbarhet bara om *hela* pupillen fylls med ljus av intensitet I_{min} , vilket ju gäller när vi studerar en stjärna direkt, utan kikare. Vi kräver alltså också att stråldiametern efter teleskopet är minst lika med pupilldiametern



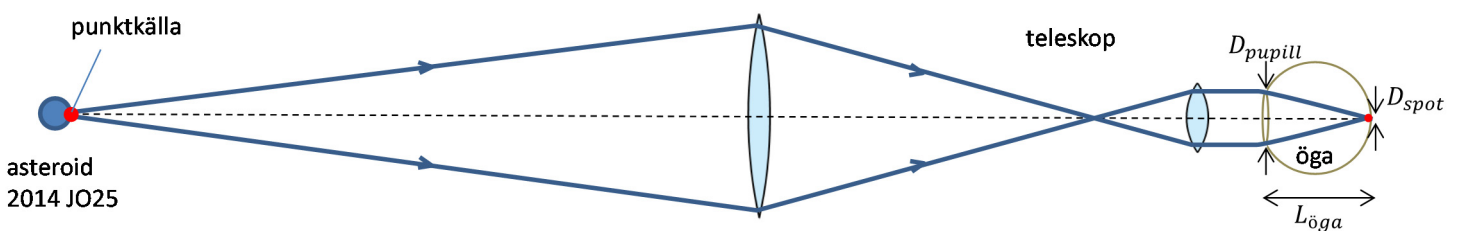
$$D_{\text{efter tel}} = \frac{D_{\text{obj}}}{M} \geq D_{\text{pupill}} \Rightarrow D_{\text{obj}} \geq M \cdot D_{\text{pupill}} \approx 16 \cdot 6\text{mm} \approx 100\text{mm}$$

om vi antar en pupilldiameter på 6 mm (mörkerseende). Eftersom objektivdiametern (uttryckt i mm) är den andra parametern ("Y") i märkningen på teleskopet ska alltså teleskopet minst vara märkt med $M \times D_{\text{obj}} =$

$$16 \times 100$$

De flesta amatöртеleskop har ungefär dessa prestanda eller något bättre, speciellt om de är utformade som spegelteleskop ("objektivlinsen" är då en buktig spegel, som i alla större teleskop).

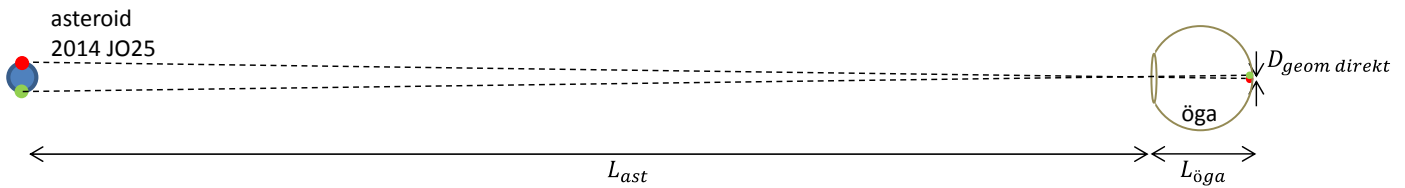
(b) Vi börjar med att beräkna hur stor en punkt(-källa) på asteroiden blir på näthinnan. Vi antar att strålen ut från teleskopet belyser hela pupillen ($D_{\text{pupill}} = 6\text{ mm}$) och att ögonlinsen i vår ögonmodell fokuserar perfekt över hela sin belysta yta (ett i verkligheten *mycket* optimistiskt antagande med tanke på den stora pupillen som belyser linsen långt ut i periferin där linsens form oftast avviker starkt från den ideala). Då fås



$$D_{\text{spot}} = 2.44 \frac{\lambda}{D_{\text{pupill}}} L_{\text{öga}} = 2.44 \frac{500\text{nm}}{6\text{mm}} 20\text{mm} = 4\mu\text{m}$$

(Jag använder $C = 2.44$ i formeln för spotsize eftersom pupillen är cirkulär och infallande strålen från teleskopet har konstant tvärsnittsintensitet. Då får jag dessutom upp värdet på den annars löjligt lilla spotsizen som kommer av att vi antagit att ögonlinsen funkar perfekt över hela pupillen.) Detta värde på D_{spot} får vi även om vi betraktar asteroiden direkt utan teleskop eftersom även då hela pupillen är belyst.

Om vi tittar direkt utan teleskop blir storleken av *bilden av asteroiden enligt geometrisk optik*



$$D_{geom\ direkt} = M_{direkt} D_{ast} = \frac{L_{\text{öga}}}{L_{ast}} D_{ast} = \frac{20\text{mm}}{1.8\text{milj km}} 650\text{m} = 7\text{nm} \lll D_{spot}$$

d.v.s. när vi tittar direkt ger alla punktkällor på asteroiden blaffor på näthinnan (storlek $D_{spot} \approx 4\mu\text{m}$) vars centra ligger inom en cirkel med diametern $D_{geom\ direkt} = 7\text{nm}$. Alltså ligger blafforna helt och hållet ovanpå varandra och bildar en enda blaffa med storleken D_{spot} . Även om asteroiden varit avlång, så att geometriska bilden t.ex. skulle blivit elliptisk med, säg, långaxeln 14 nm och kortaxeln 7 nm skulle det inte märkas eftersom ellipsen skulle vara mycket mindre än storleken av ljusblafforna.

Vi måste alltså använda ett teleskop med kraftig förstoring så att storleken av geometriska bilden av asteroiden blir mycket större. För att vi ska kunna ana formen på asteroiden bör storleken av geometriska bilden på näthinnan vara åtminstone, säg, 2 blaffor, alltså

$$D_{geom\ teleskop} = 2 \cdot D_{spot}$$

där

$$D_{geom\ teleskop} = M \cdot D_{geom\ direkt}$$

eftersom förstoringen M anger hur mycket större ett föremål ser ut när man kollar genom teleskopet jämfört med blotta ögat (vilket är samma sak som vinkelförstoringen). Vi får

$$M = \frac{D_{geom\ teleskop}}{D_{geom\ direkt}} = \frac{2 \cdot D_{spot}}{D_{geom\ direkt}} = \frac{2 \cdot 4\mu\text{m}}{7\text{nm}} \approx 1000$$

Vi måste ha 1000 gångers förstoring (=mycket)! Eftersom $M = 1000$ också innebär att strålens diameter komprimeras en faktor $M = 1000$ i teleskopet måste objektivdiametern $D_{obj} = M \cdot D_{pupill} = 6$ meter (!) för att strålen från teleskopet ska fylla ut pupillen.

Vi behöver alltså ett teleskop märkt

1000×6000

eftersom D_{obj} anges i mm. Så stora teleskop existerar i stort sett inte. Slottsskogsobservatoriets största teleskop har $D_{obj} = 30$ cm! Ingen människa har därför direkt sett formen på 2014 JO25! Istället har formen på asteroiden beräknats från radarmätningar som utförts när den varit i närheten av Jorden vid tidigare passager. Man mäter då radareköt vid en massa olika tidpunkter under ett tidsspänn då asteroiden hinner rotera (minst) ett varv. Sedan låter man en kraftfull dator lösa "baklängesproblemet" att bestämma hur en yta ser ut som ger detta eko vid de olika

rotationsvinklarna. Men denna metod har uppenbarligen svårigheter med att bestämma absoluta storlekar – efter nya mätningar när asteroiden passerade som närmast i år konstaterade man att diametern kunde vara upp till dubbelt så stor som man tidigare trott.