

# Tentamen i Optik FFY091

Tisdag 14 mars 2017, kl. 14:00-18:00

Examinator och jourhavande lärare Jörgen Bengtsson, tel. 031-772 1591, **finns på plats ca kl 15 och 17** för att svara på frågor. För godkänt krävs 30 p, inkl bonus, av max 60 p, se vidare Kursinformation på kurshemsidan där också lösningsförslag publiceras efter tentan. Visning/uthämtning av tenta sker efter överenskommelse via e-mail.

**Tillåtna hjälpmedel:** Typgodkänd räknare, linjal, samt ett ark (två sidor) A4-papper med egenhändigt handskrivna, valfria anteckningar.

- Motivera dina steg och formulera dig klart (gärna icke-verbalt i form av skisser) – båda dessa aspekter poängbedöms.
- Gör egna rimliga antaganden där det behövs.

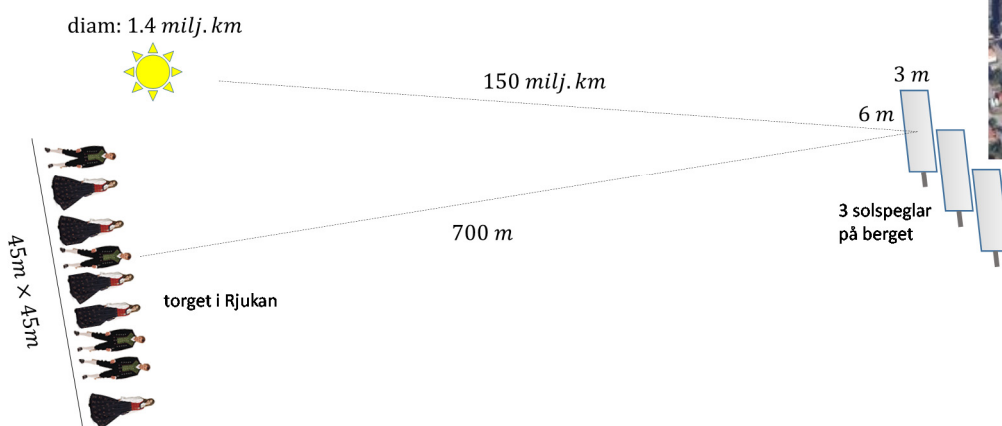
## 1. Kjempefesten (?) i Rjukan

Byn Rjukan i Norge ligger i en dal där solen aldrig når ner under vintern. För att få solljus satte man därför upp tre stora plana speglar (vardera  $3\text{ m} \times 6\text{ m}$  med 100% reflektion) på bergskammen ovanför byn, se flygbilden. Spegelarna är individuellt roterbara vertikalt och horisontellt. Spegelarna invigdes 2013 med en jättefest på det lilla torget i Rjukan.

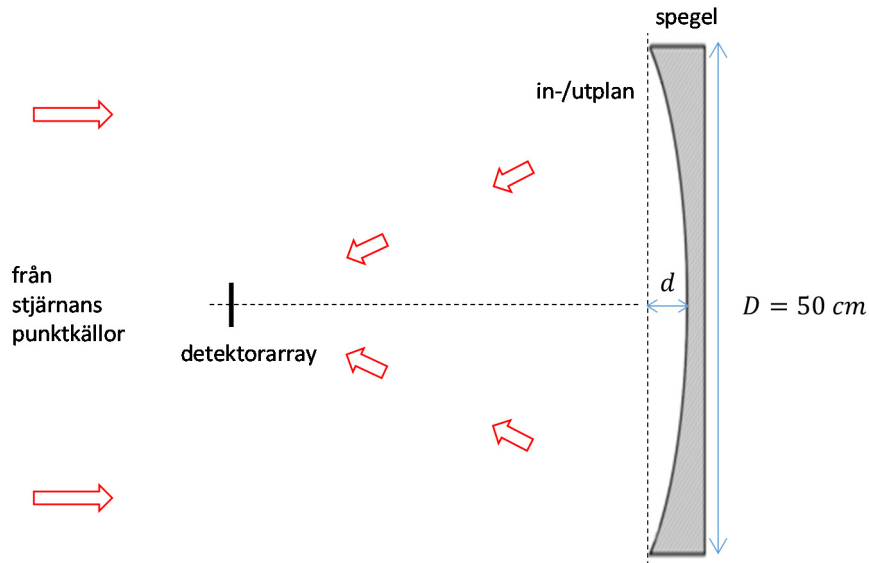
**(a)** Kunde hela torget ( $45\text{ m} \times 45\text{ m}$ ) solbelysas samtidigt? (4p)

**(b)** Om speglarna av misstag inte varit perfekt plana utan haft en liten krökning, hade det kunnat bli farligt? (3p)

*Förenkling:* För att inte behöva bry oss om projektioner antar vi att solen, speglarna, och torget ligger på i stort sett rät linje och att torget är vinkelrätt mot ljuset från speglarna, se figuren nedan. Det blir alltså ett väldigt brant torg, men normmän är vana vid branter.



## 2. Perfekt spegel



En teleskopspegel (diameter 50 cm) är precisionslipad så att den ger en radiellt varierande fasmodulering

$$\varphi(r) = -1.745 \cdot 10^6 r^2 + 48500 r^4 ; r \text{ uttrycks i [m]}$$

för våglängden 600 nm, där  $r$  är radiella avståndet från centrum av spegeln.

**(a)** Vilken fokallängd har spegeln? (1p)

Spegeln fokuserar en infallande plan våg på ett optimalt sätt till ett fokus på fokallängds avstånd från spegeln.

**(b)** Spegeln riktas mot himlens ljusstarkaste stjärna Sirius (Wikipedia: diameter 2.3 milj km, avstånd 8 ljusår, ålder 250 miljoner år) och intensitetsfördelningen studeras på en detektorarray på fokallängds avstånd från spegeln. Ungefär vilken storlek (utbredning på detektorarrayen) har området som belyses med ljus från stjärnan? (4p)

**(c)** Vad hade hänt med det belysta områdets storlek i (b) om den andra termen hade saknats i spegelns fasmodulering  $\varphi(r)$ ? Gör en kvalitativt riktig skiss över strålgången fram till detektorarrayen i ett område nära detektorarrayen så att man tydligt ser effekten av att utelämnas andra termen, och indikera även ljusets propagationsriktning hos strålarna. Vad kallas på optikspråk detta, mindre önskvärda, beteende hos en spegel eller lins? (3p)

**(d)** Hur djup,  $d$ , är spegeln? Hur mycket ändras djupet  $d$  på grund av den andra termen i fasmoduleringen? (2p)

Fysiker gillar att jämföra, att ställa två saker mot varandra. Svara klokt på de optikrelaterade jämförelsefrågorna i uppgift 3 till 6. Var kortfattad, men motivera alla dina svar.

### 3. Vanligare? Tema: I naturen (d.v.s. en plats opåverkad av människan, t.ex. Slottsskogen)

- (a) Är det vanligare med konvergent ljus än med divergent ljus i naturen? (1p)
- (b) Är stimulerad absorption av fotoner vanligare än stimulerad emission av fotoner i naturen? (2p)

### 4. Mer koherent? Tema: Mars vs. Sirius

I större teleskop på planeten Jorden (genomsnittlig temperatur på ytan +15 °C) framträder planeten Mars (genomsnittlig yttemperatur -50 °C) som en rund rödaktig skiva där man också kan skymta t.ex. isen runt polarområdena.

- (a) Är det synliga ljuset som vi tar emot från planeten Mars mer tidskoherent än det från himlens ljusstarkaste stjärna Sirius (yttemperatur 9000 °C, som kan jämföras med solens 5500 °C)? (2p)
- (b) Är ljuset som vi tar emot här på Jorden från planeten Mars mer rumskoherent än det som vi tar emot från stjärnan Sirius? (Ljuset från båda himlakropparna har på vanligt sätt först gått igenom identiska färgfilter innan det analyseras) (2p)

Ledning: Hur ser stjärnor ut i jordiska teleskop?

### 5. Farligare? Tema: Solljus på näthinna

Antag att "farligheten" hos solstrålningen enbart bestäms av maximala intensiteten [ $W/m^2$ ] hos ljuset när det når fram till näthinnan.

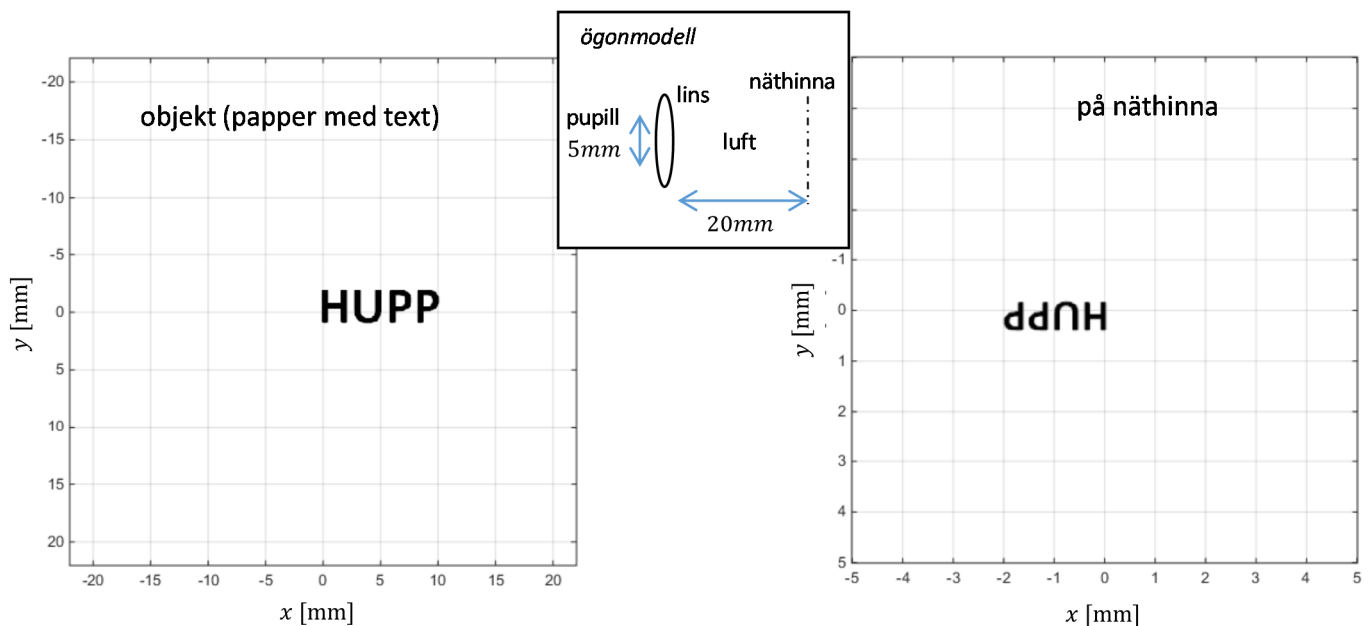
- (a) Är det farligare för näthinnan att kolla på solen med blotta ögat från en öken på planeten Mars (avstånd till solen 230 milj km) än från Saharaöknen i Afrika (avstånd till solen 150 milj km)? (3p)
- (b) Är det farligare för näthinnan att kolla på solen genom en kikare (märkt 10x25, dvs 10 gångers förstoring och 25 mm objektivdiameter) än med blotta ögat? (3p)

### 6. Diverse jämförelser Tema: I optiklabbet och andra mörka lokaler

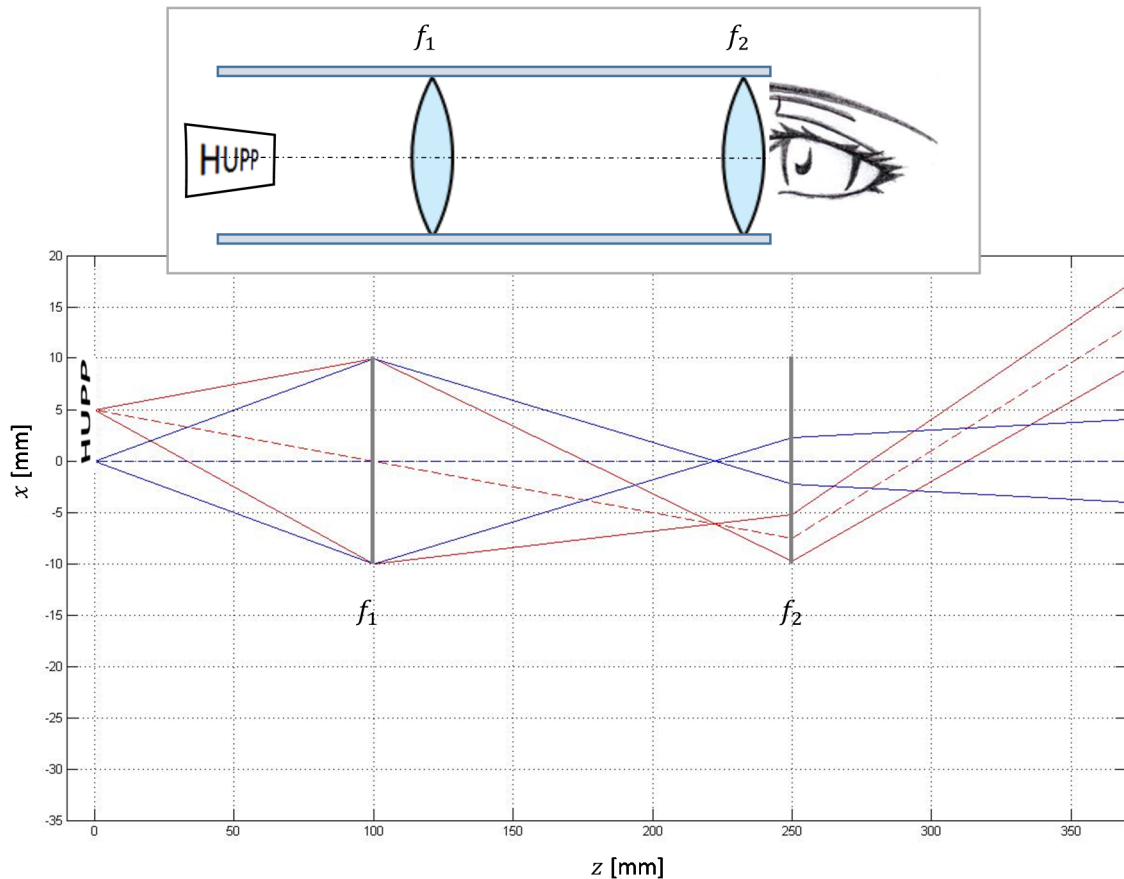
- (a) Är cirkulärpolariserat ljus vanligare på en 3D bio än på en vanlig (2D) biograf? (1p)
- (b) Stämmer gitterekvationens förutsägelser bättre för höga diffraktionsordningar, vars ljus sänds ut i stora vinklar (från rakt-fram-riktningen), än för låga diffraktionsordningar? (1p)
- (c) Är fundamentalmodens effektiva index  $n_{eff}$  vid 1550 nm våglängd större i en singelmodfiber än i en multimodfiber? (båda fibrerna är av stegindextyp och har brytningsindex i kärnan  $n_{core} = 1.51$  och höljet  $n_{clad} = 1.50$ ) (2p)
- (d) I ett labb har man två lasrar som båda utnyttjar stimulerad emission från neonatomer (Ne) för att skapa laserstrålning. Om laserstrålningen från den ena lasern är röd, kan laserstrålningen från den andra lasern ha en annan färg? (1p)

## 7. På näthinnan

(a) En ung person med öga enligt kursmodellen ser skarpt på alla avstånd ända ner till ett minsta avstånd till objektet, eftersom den flexibla ögonlinsen ställer in sig optimalt. Figurerna visar situationen när personen betraktar texten "HUPP" på ett papper som hålls just på detta minsta avstånd från ögat. Intensitetsfördelningen på näthinnan visas i högra figuren. Vad är det minsta avstånd personen ser skarpt på, d.v.s. vad är avståndet till texten i det visade fallet? (1p)



(b) Nu tittar samma person på texten genom ett rör med två linser, se figur nedan. Strålgången genom röret för två punktkällor på objektet (texten) är korrekt utritad i figuren (ögat ingår ej i strålgångsskissen). Personen har ögat precis efter lins 2, med ögonlinsens symmetriaxel sammanfallande med linsrörets symmetriaxel. Visa att personens ögonlins inte har några problem att ställa in sig så att hen ser texten skarpt! (1p)



I uppgifterna (c)-(e) antas ögat vara positionerat som i (b), och med ögonlinsen inställd att se texten så skarpt som möjligt.

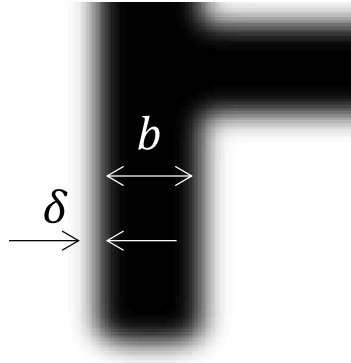
**(c)** Hur lång är bilden av texten "HUPP" på näthinnan (alltså det avstånd som på objektet är ca 10 mm)? Antag här att linserna i röret har oändligt stor diameter så att hela texten kan avbildas på näthinnan. Vad blir "förstoringsfaktorn" (d.v.s. hur många gånger större blir bilden på näthinnan) jämfört med att titta direkt på texten som i (a)? (3p)

**(d)** En nackdel med linsröret är att synfältet är begränsat, vilket du bortsåg från i (c). Med de indikerade linsdiametererna (20 mm), uppskatta grovt med hjälp av strålgångsskissen hur många av bokstäverna i texten "HUPP" som faktiskt är synliga utan att flytta ögat från dess position. Du kan behöva göra en ingenjörsmässig grafisk interpolering. Hur upplevs intensitetskontrasten hos den del texten som man faktiskt kan se? (2p)

**(e)** Bedöm nu oskärpan hos avbildningen: Är övergångsområdets storlek,  $\delta$  (se figuren nedan), mellan "svart" och "vitt" i bilden på näthinnan signifikant i jämförelse med bredden på bokstävernas staplar,  $b$ , i avbildningen? (2p)

Anm: Figuren illustrerar enbart vad som menas med  $\delta$ , den har inget med uppgiftens förhållanden att göra.

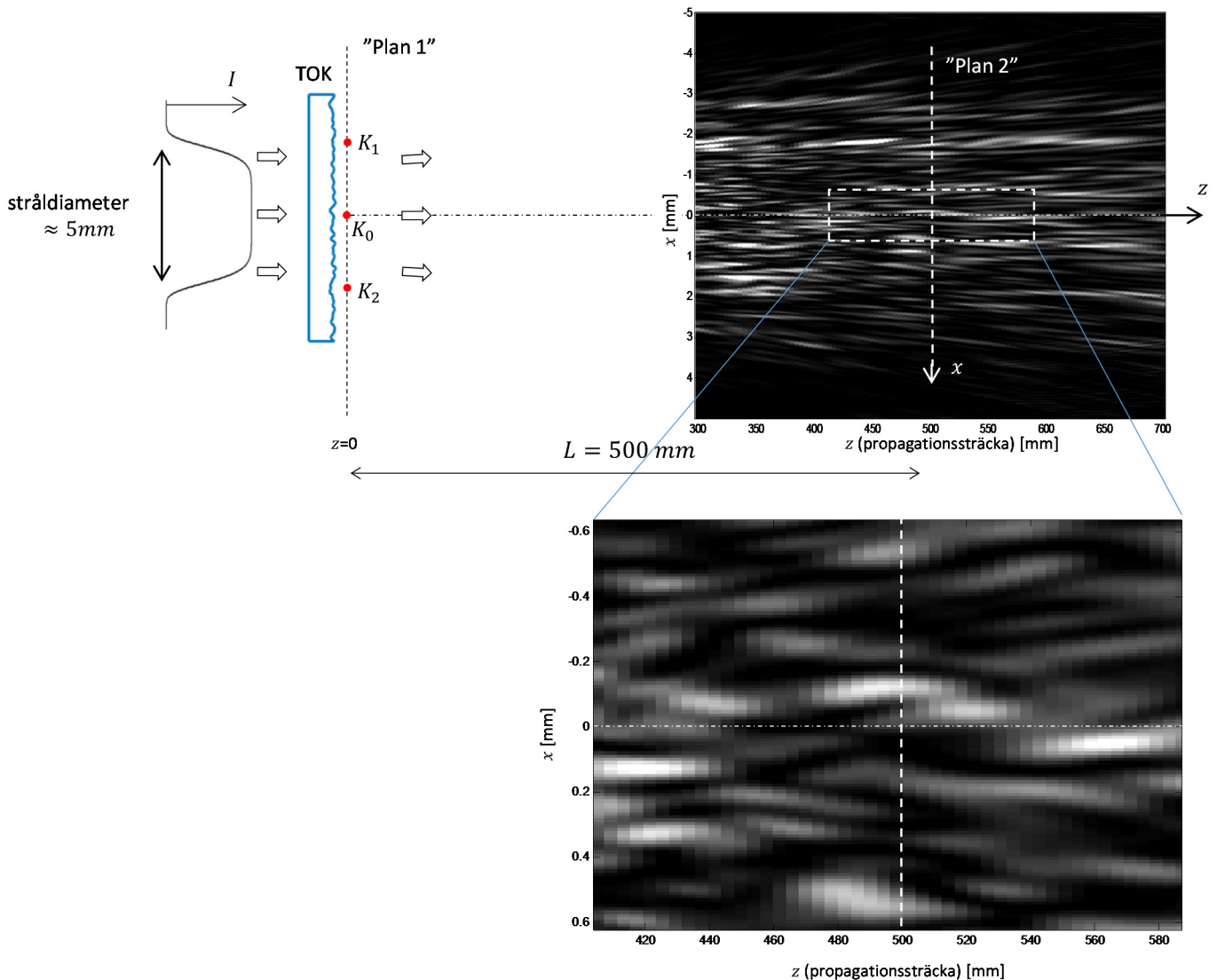
**(f)** Svara på föregående fråga om oskärpan igen, under identiska förhållanden förutom att observatörens ögonlins nu saknar inställningsförmåga. Observatörens ögonlins antas alltid vara inställd så att hen ser oändligt avlägsna föremål skarpt (med blotta ögat). (3p)



(g) Av strålgångsskissen framgår att det finns en fördel att *inte* placera ögat så nära lins 2 som möjligt när man vill se texten. Vilken position längs rörets symmetriaxel skulle vara mer fördelaktig, och varför? (1p)

### 8. Interferens i tre dimensioner

En bred laserstråle ( $\lambda=633\text{ nm}$ ) får en slumpmässig fasmodulering över sitt tvärsnitt i Plan 1 när den passerat en genomskinlig TOK med skrovlig yta. Plan 1 är beläget där  $z=0$ , och fältet propagerar åt höger i  $z$ -led. Propagationen simuleras med PAS. Figuren visar intensiteten i  $xz$ -planet för  $z$  i intervallet 300-700mm, och inzoomat i nedersta bilden.



(a) Vad kallas den visade, kraftiga rumsliga variationen i intensitet som uppstår hos laserljus som propagerar efter att dess fält fått en slumpmässig, spatiellt varierande fasmodulering? (1p)

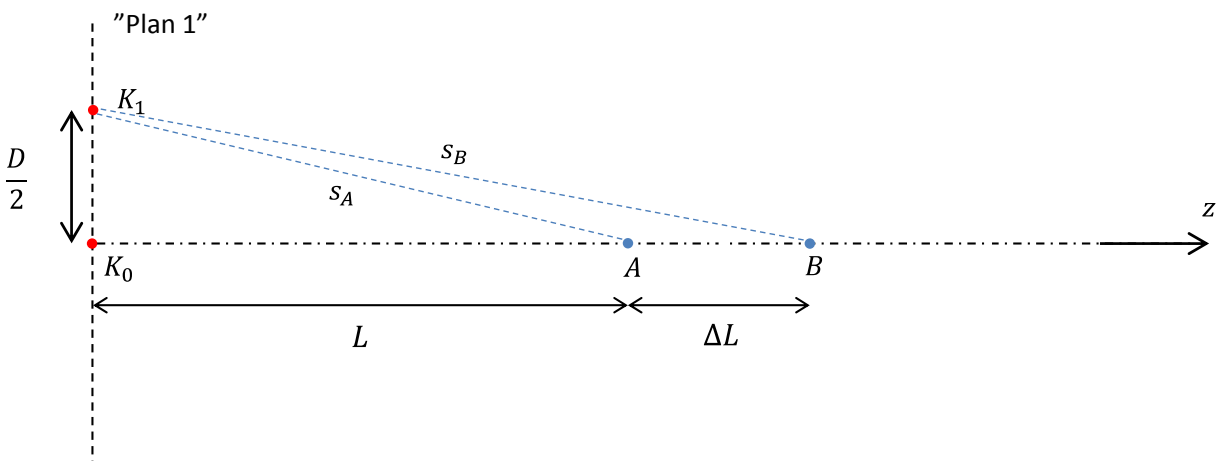
(b) Vilken av tumreglerna är tillämplig när vi analyserar intensitetens variation längs  $x$ -axeln för  $z=500\text{mm}$ , d.v.s. den vertikala streckade linjen i figurerna? Är eventuella villkor för tumregelns giltighet uppfyllda? (1p)

(c) Vad säger denna tumregel om fältet längs  $x$ -axeln i det visade fallet (ange numeriskt värde)? Är tumregeln uppfyllt enligt din observation av det visade fältet? "Mät" på en av de ljusaste detaljerna. (1p)

Fältet som visas i figuren varierar uppenbarligen mycket långsammare i  $z$ -led (för  $x$  konstant) men även här kan man tala om en "feature size", alltså storleken av en ljus "detalj" i intensitetsfördelningen. I det nedanstående ska du härleda ett uttryck för *storleksordningen av minsta möjliga feature size i  $z$ -led*. Gör som när vi härledde tumregeln för minsta feature size i  $x$ -led: använd dig av enbart två "extrema" punktkällor i Plan 1, och kolla "hur långt man måste gå" för att interferensen mellan dessa ska förändra sig signifikant. Men i det här fallet ska du gå längs  $z$ -axeln.

(d) I härledningen av minsta feature size i  $x$ -led använde vi punktkällorna  $K_1$  och  $K_2$  i figuren ovan, båda placerade på avståndet  $D/2$  (halva stråldiametern) från  $z$ -axeln. Det valet av punktkällor fungerar inte i det här fallet. Varför? (1p)

Vi kommer att använda de två "extrema" punktkällorna  $K_0$  och  $K_1$  enligt figuren nedan.  $K_1$  är samma källa som i härledningen av minsta feature size i  $x$ -led.  $K_0$  är en punktkälla på  $z$ -axeln.



(e) Härled ett uttryck för  $s_A$ , avståndet mellan  $K_1$  och punkten  $A$  på  $z$ -axeln. Punkten  $A$  ligger på avståndet  $L$  från Plan 1. Gör den paraxiella approximationen. (1p)

Ledning: Maclaurinutveckling av  $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2}$  för  $\epsilon \ll 1$ .

**(f)** Härled ett uttryck för  $s_B$ , avståndet mellan  $K_1$  och punkten  $B$  på  $z$ -axeln. Punkten  $B$  ligger på avståndet  $L + \Delta L$  från Plan 1, där vi antar att  $\Delta L \ll L$ . Gör härledningen genom att först ersätta  $L$  med  $L + \Delta L$  i uttrycket du härledde i (e). Använd dig sedan av Maclaurinutvecklingen

$$\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta \text{ för } \delta \ll 1$$

för att få bort  $\Delta L$  från nämnaren. (1p)

**(g)** Använd källorna  $K_0$  och  $K_1$  och gå längs  $z$ -axeln, för att på så sätt härleda ett enkelt analytiskt uttryck för storleksordningen av minsta feature size i  $z$ -led! Antag paraxiell propagation, d.v.s. använd dina nyss härledda uttryck för  $s_A$  och  $s_B$ . (5p)

Ledning: Teckna fasen för fältbidragen från källa  $K_0$  respektive  $K_1$ . Gör detta dels i punkt  $A$  och dels i punkt  $B$ :

Fas i  $A$  från  $K_0$ :  $\varphi_{0,A} = \varphi_0 + \dots$ , där  $\varphi_0$  är fasen hos  $K_0$ .

Fas i  $A$  från  $K_1$ :  $\varphi_{1,A} = \dots$

Fas i  $B$  från  $K_0$ :  $\varphi_{0,B} = \dots$

Fas i  $B$  från  $K_1$ :  $\varphi_{1,B} = \dots$

Vad gäller om  $K_0$  och  $K_1$  ska interferera "signifikant olika" i  $B$  jämfört med  $A$ ?

**(h)** Från PAS-simuleringen, uppskatta en typisk feature size i  $z$ -led för fältet i närheten av  $z=500\text{mm}$ . "Mät" på en av de ljusaste detaljerna. Är ditt härledda uttryck för storleksordningen av minsta feature size i närheten av  $z=500\text{mm}$  förenligt med din "mätning"? (1p)

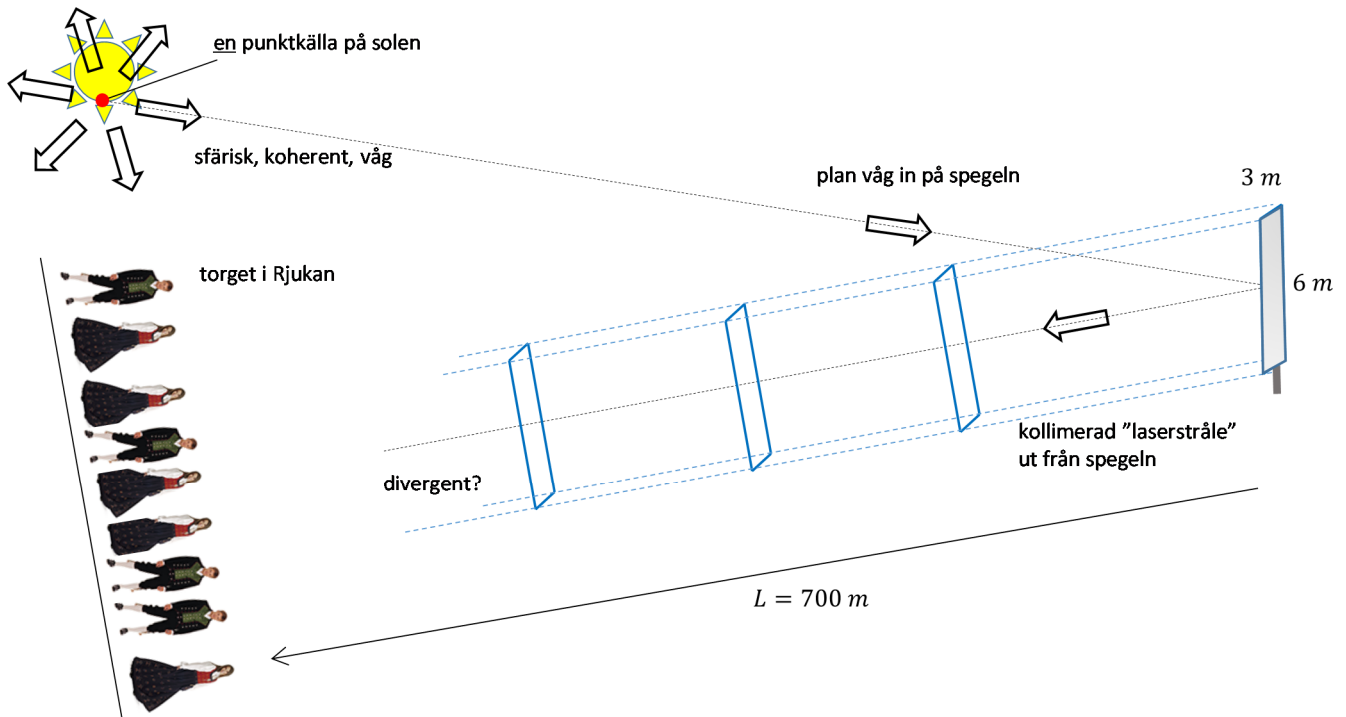


# Tentamen i Optik FFY091

Tisdag 14 mars 2017, kl. 14:00-18:00

## Diskussion och lösningsförslag

### 1. Kjempefesten (?) i Rjukan

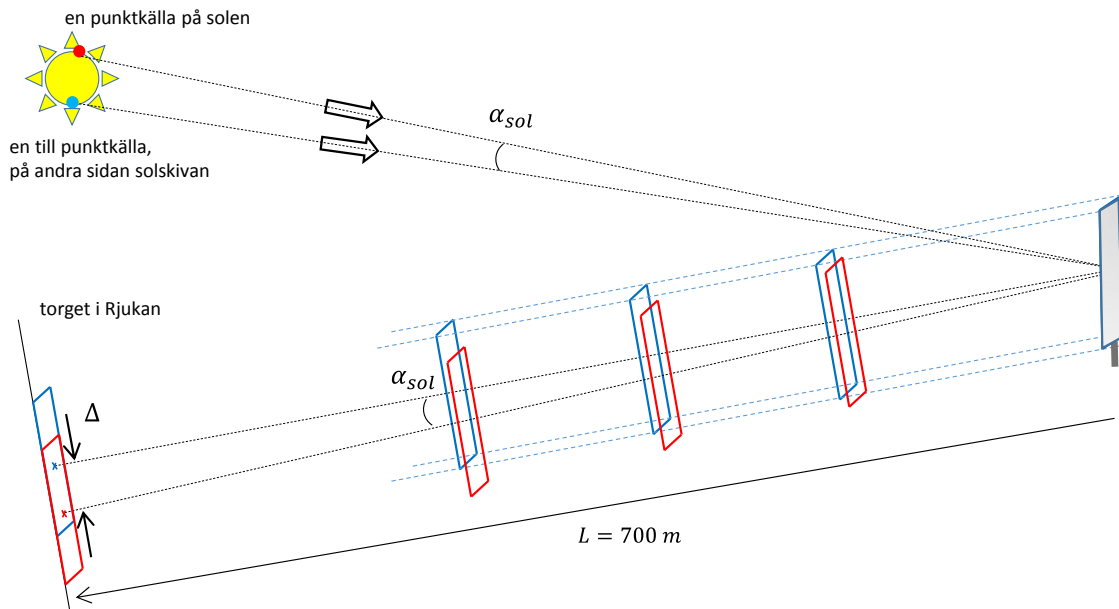


(a) Vi börjar med att betrakta en ensam punktkälla på solytan. Den sänder ut en koherent (laserliknande) sfärisk våg, som med god approximation blivit plan över spegelns yta när den kommit till Jorden. Spegeln "skär ut" en rektangulär del av fältet, så att det reflekterade fältet har konstant amplitud över sitt rektangulära tvärsnitt och plana vågfronter (om spegeln är plan). Det fält som lämnar spegeln är alltså en kollimerad laserstråle med det enorma tvärsnittet  $3\text{ m} \times 6\text{ m}$ . Strålen uppfyller alltså villkoren i Plan 1 (precis efter spegeln) för tumregeln om minsta stråldivergens, den har alltså divergensvinkeln

$$\theta_{min} \approx \frac{\lambda}{\text{utbredning Plan 1}} \approx \frac{550\text{ nm}}{3\text{ m}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

där vi tog en våglängd mitt i det synliga området och den mindre kantlängden på spegeln för att räkna med ett "worst case scenario". ( $\theta_{min}$  gäller alltså egentligen stråldivergens vinkelrätt mot papperet i figuren ovan, medan divergensen i papperets plan bara är hälften.) I vilket fall är divergensen utomordentligt liten för en så bred stråle, så breddningen under 700 m propagation fram till torget är  $\approx \theta_{min} \cdot L < 1\text{ mm}$ , d.v.s. fullständigt försumbar.

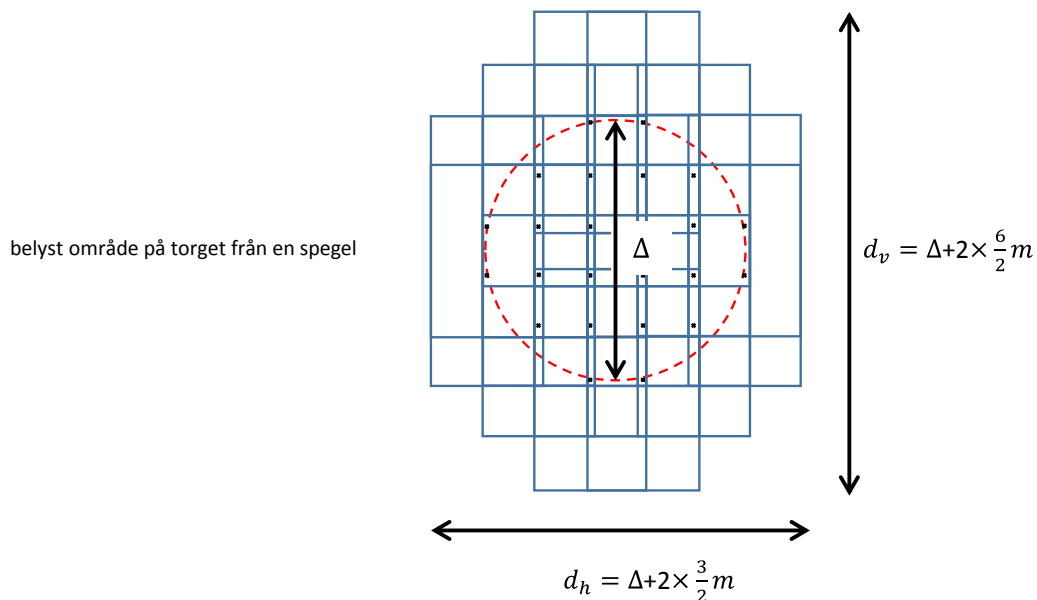
En punktkälla på motsatt sida av solytan ger på samma sätt en rektangulär belysning av torget, men dess centrumposition är förskjuten en sträcka  $\Delta$  jämfört med första punktkällan:



Sträckan  $\Delta$  fås ur vinkeln  $\alpha_{sol}$  som är skillnad i infallsvinkel för de två plana vågor från respektive punktkälla på solen.

$$\Delta = \alpha_{sol} \cdot L = \frac{D_{sol}}{L_{sol}} L = \frac{1.4 \text{ milj km}}{150 \text{ milj km}} 700 \text{ m} \approx 7 \text{ m}$$

där  $D_{sol}$  och  $L_{sol}$  är solens diameter och avstånd till Jorden. Två diametralt motsatta källor ger alltså två belysta rektanglar på torget, vars centrumpositioner är separerade med  $\Delta \approx 7$  meter. Den totala intensitetsfördelningen från alla källor på solen är alltså en mängd överlagrade rektanglar vars centrumpositioner ligger i ett cirkulärt område med diameter  $\Delta$ .



Det belysta området är alltså lite elliptiskt med en vertikal utsträckning  $d_v = \Delta + 2 \times \frac{6}{2} m \approx 13 \text{ m}$  och horisontell utsträckning  $d_h = \Delta + 2 \times \frac{3}{2} m \approx 10 \text{ m}$ .

De tre speglarna kan ställas in för att belysa var sitt område av torget. Den belysta arean blir då

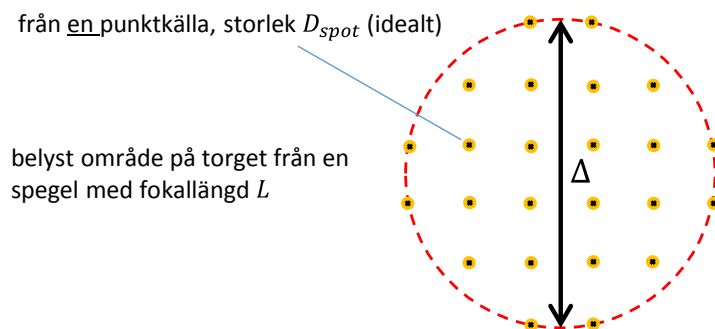
$$A_{belyst} = 3 \times (13m \cdot 10m) = 400m^2 \Rightarrow \frac{A_{belyst}}{A_{torg}} = \frac{400m^2}{45 \times 45m^2} \approx 20\%$$

där  $A_{torg}$  är torgets yta. Om hela torget var fullpackat med folk vid invigningsfesten fick alltså bara en av fem personer en glimt av solen (gissningsvis vreds speglarna kontinuerligt så att "solfläckarna" sveptes över hela torget vid detta arrangemang).

**(b)** Om en spegel får en allt kraftigare sfärisk krökning kommer laserstrålen ut från spegeln, från en punktkälla, inte att vara kollimerad utan fokuserad på ett ändligt avstånd. När laserstrålen är fokuserad på torget (vilket sker då spegelns fokallängd är  $L = 700m$ , dvs spegelns krökningsradie är  $2 \times 700m = 1400m$ , så det inte mycket krökning som behövs) är ljuset fokuserat till minsta möjliga spot, med en diameter  $D_{spot}$  given av tumregeln

$$D_{spot} \approx \frac{\lambda}{\text{utbredning Plan 1}} L \approx \frac{550nm}{3m} 700m \approx 100\mu m$$

(Detta kräver en extrem precision hos spegelns ytform, förmodligen är fläcken på torget från en punktkälla mycket större än så, men så länge den bara är mycket mindre än  $\Delta$  påverkar det inte svaret på denna uppgift.)  $D_{spot}$  är dock inte storleken av det belysta området från alla punktkällor eftersom laserstrålen från varje punktkälla fortfarande är centrerad på samma ställe på torget som när spegeln var plan. Men eftersom detta ljus nu är fokuserat överlappar inte längre ljuset från olika punktkällor varandra nämnvärt – vi har erhållit en bild av solen på torget



Diametern på solbilden är  $\Delta \approx 7$  meter. Detta resultat hade också kunnat fås direkt med geometrisk optik eftersom vi har en avbildning av solen på torget

$$\frac{D_{solbild}}{D_{sol}} = \frac{L}{L_{sol}} \Rightarrow D_{solbild} = \frac{700m}{150milj km} 1.4 milj km \approx 7m$$

Intensiteten i bilden  $I_{bild}$  kan vi få genom att inse att det är effekten som faller på spegeln  $P_{spegel}$  som fördelas över bilden på torget

$$I_{bild} = \frac{P_{spegel}}{\pi \left(\frac{D_{solbild}}{2}\right)^2} = \frac{I_{spegel} \cdot A_{spegel}}{\pi \left(\frac{D_{solbild}}{2}\right)^2} = \frac{6m \cdot 3m}{\pi \left(\frac{7m}{2}\right)^2} I_{spegel} = 0.5 \cdot I_{spegel}$$

där  $I_{spiegel}$  är intensiteten av solljuset som faller in på spegeln och  $A_{spiegel}$  är spegelns area. Om vi nu ställer in de tre speglarna så att deras bilder av solen överlappar får vi alltså en intensitet  $I_{total}$  på torget

$$I_{total} = 3 \times I_{bild} = 1.5 \times I_{spiegel}$$

Intensiteten kan alltså som max bli ungefär 1.5 gånger högre än intensiteten hos det direkta solljuset, vilket knappast är farligt.

## 2. Perfekt spegel

(a) Anledningen till att vi behöver den andra termen i faskorrektionen är att den paraxiella approximationen inte gäller för ljuset som träffa spegeln långt ut mot kanten, alltså för stora värden på  $r$ . För tillräckligt små värden på  $r$  gäller paraxiella förhållanden, vi kan då försumma andra termen i fasmoduleringen

$$\varphi_{paraxiell}(r) = -1.745 \cdot 10^6 r^2 \quad (\text{små } r)$$

Enligt paraxiell teori är fasmoduleringen hos en spegel relaterad till dess fokallängd som

$$\varphi_{paraxiell}(r) = -k \frac{r^2}{2f}$$

vi kan identifiera

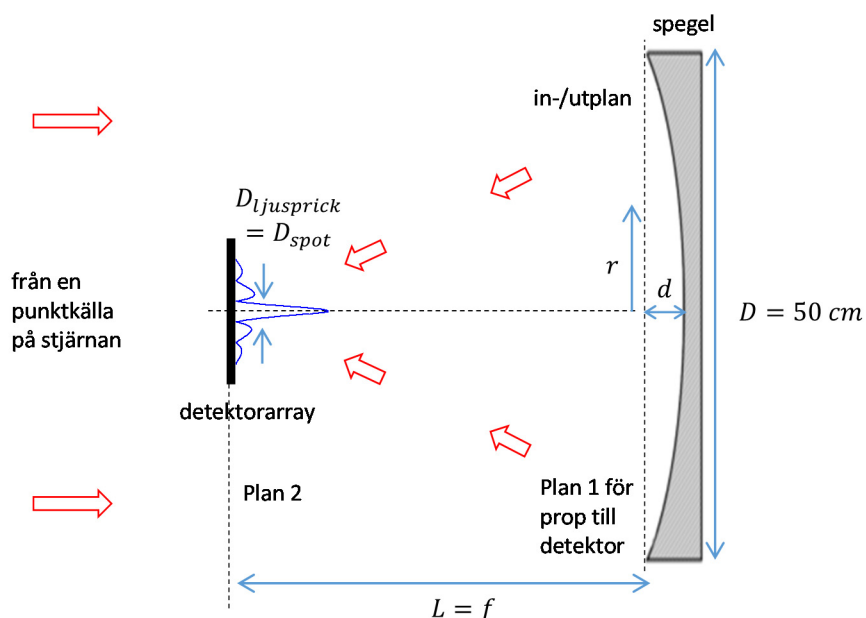
$$\frac{k}{2f} = 1.745 \cdot 10^6 [m^{-2}] \Rightarrow f = \frac{\pi}{600 \cdot 10^{-9} [m]} \cdot \frac{1}{1.745 \cdot 10^6 [m^{-2}]} = 3.00 \text{ m}$$

(b) Stjärnans vinkelstorlek är så liten att den geometriska bilden av stjärnan,  $D_{geom}$ , är helt försumbar i jämförelse med minsta spotsize hos det optimalt fokuserade ljuset från en punktkälla på stjärnan (som också utgör systemets point spread function, PSF). Om du tvivlar beräknas  $D_{geom}$  med de vanliga avbildningsformlerna

$$\frac{D_{geom}}{D_{stjärna}} = \frac{f}{\text{avstånd till stjärna}} \Rightarrow D_{geom} = \frac{3m}{8 \text{ ljusår}} 2.3 \text{ milj km} = 0.1 \mu\text{m} (\ll D_{spot})$$

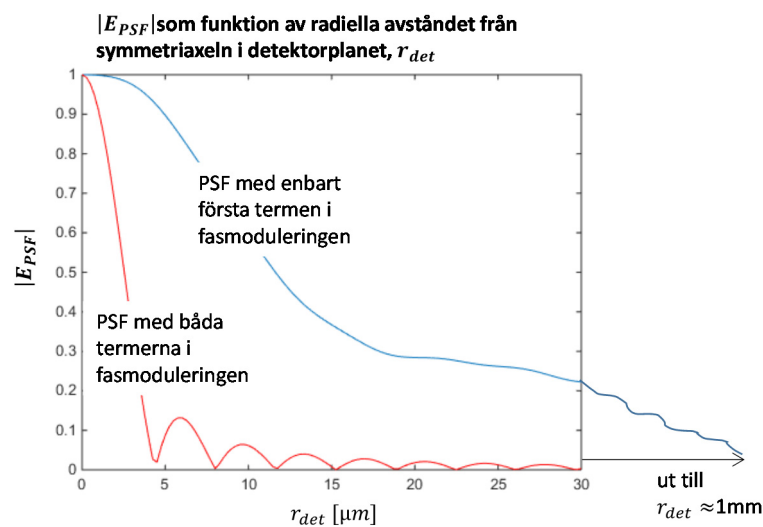
”Bilden” av stjärnan är alltså en massa minsta-spotsize-stora ljusblaffor som i praktiken ligger centrerade på varandra i detektorplanet. Den totala blaffans storlek,  $D_{ljusprick}$ , är därför lika med storleken hos varje enskild blaffa, som ges av minsta spotsize

$$D_{ljusprick} = D_{spot} \approx 2.44 \frac{\lambda}{D} L \approx 2.44 \frac{600 \text{ nm}}{50 \text{ cm}} 3 \text{ m} \approx 10 \mu\text{m}$$

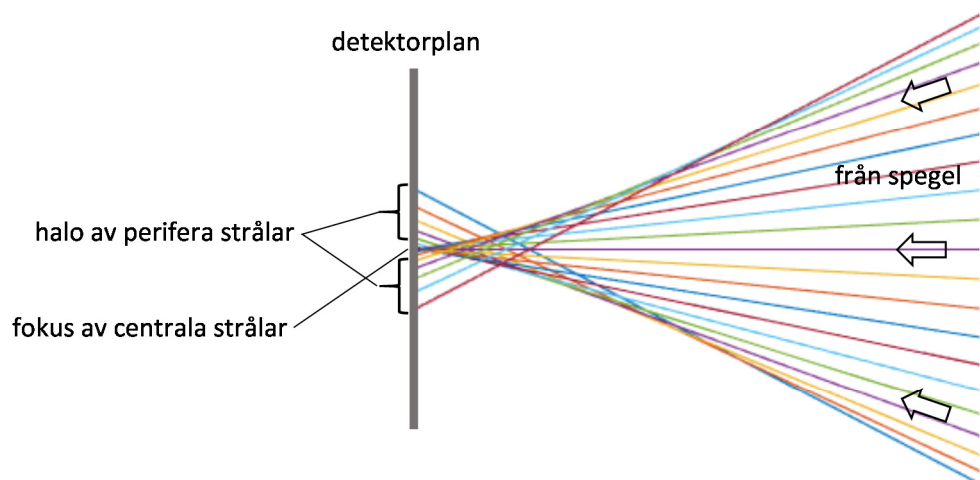


där jag valde "const" = 2.44 för att visa att vi får en Airy-funktion i Plan 2 från den konstanta cirkulära intensitetsfördelningen i Plan 1 (om det inte vore för att den insatta detektorarrayen blockerar lite av det infallande ljuset, men det påverkar bara marginellt formen på ljusfläcken på detektorn). Men man hade lika gärna kunnat använda "const" = 1 eller = 1.5 eller = 2, eller så. Man får en ljusfläck med utbredning på ca 5-10  $\mu\text{m}$ .

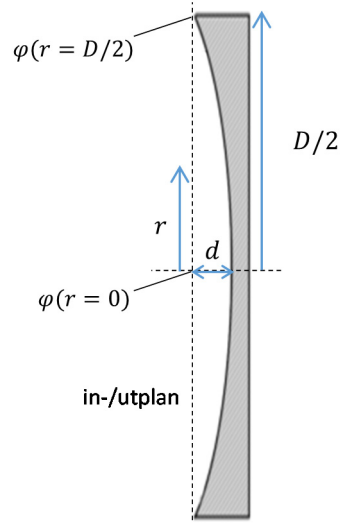
(c) Den andra termen i fasmoduleringen är positiv, och verkar i motsatt riktning mot den första. Den försöker alltså göra spegeln mindre starkt fokuserande för stora  $r$ . Det betyder alltså att utan denna term är spegeln för starkt fokuserande i periferin. Ljuset från den centrala delen av spegeln bildar ett ganska skarpt fokus medan ljuset från periferin når symmetriaxeln för tidigt och sedan hinner avlägsna sig därifrån innan det når detektorn. Ljusfläcken på detektorn har därför en ljusstark central del (från centrala delen av spegeln) och en svag men utbredd "halo" av svagare ljus runt det ljusa centrum. E-fältet från en punktkälla på detektorn (=PSF) ser ut så här:



Strålgångsmässigt ser alltså situationen nära detektorn ut så här:



Fenomenet att en spegel eller lins med fasmodulering enligt paraxiella approximationen blir för stark i perifera delen kallas *sfärisk aberration*.



**(d)** Enligt TOK-modellen är fasmoduleringen mellan in- och utplan i spegelns centrum ( $r=0$ )

$$\varphi(r=0) = k \cdot 2d$$

där  $k = 2\pi/\lambda$  är fältets fasändring per längdenhet och  $2d$  är sträckan ljuset propagerar mellan in- och utplanet via reflektion i spegelytan. På samma sätt är fasmoduleringen i spegelns periferi

$$\varphi(r=D/2) = 0$$

eftersom spegelytan sammanfaller med in-/utplanet. Differensen mellan dessa blir

$$\varphi(r=0) - \varphi(r=D/2) = k \cdot 2d = 0 - (-1.745 \cdot 10^6 \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 48500 \left(\frac{D}{2}\right)^4)$$

där vi satt in den givna fasmoduleringsfunktionen för spegeln för  $r=0$  och  $r=D/2$ . Djupet  $d$  blir alltså

$$d = \frac{\lambda}{4\pi} \left( 1.745 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{0.5}{2}\right)^2 - 48500 \left(\frac{0.5}{2}\right)^4 \right) [m] = 0.0052m = 5.2mm$$

Djupändringen  $\Delta d$  pga andra termens faskorrektion är uppenbarligen den andra termen i uttrycket ovan, dvs

$$\Delta d = \frac{\lambda}{4\pi} \left( -48500 \left(\frac{0.5}{2}\right)^4 \right) [m] = -9 \cdot 10^6 m = -9 \mu m$$

Spegeldjupet är 5.2 mm och minskar med endast 9  $\mu m$  genom andra termens faskorrektion, men det gör ändå att den blaffiga bilden av stjärnan, med sin stora halo, blir en samlad ljusfläck med minsta möjliga storlek på detektorn. Denna förbättring av systemets PSF gör underverk för skärpan i avbildningen.

### 3. Vanligare?

Tema: I naturen (d.v.s. en plats opåverkad av människan, t.ex. Slottsskogen)

**(a)** Eftersom allt ljus i naturen kommer från punktkällor på ytan av ljuskällan (och alla föremål är ljuskällor) är naturen alltså full av sfäriska vågor från dessa källor. Allt naturligt ljus är alltså divergent i denna mening, vilket också är anledningen till att ett normalt öga inte kan fokusera på konvergent ljus. Ett av de få ställen där konvergent ljus förekommer naturligt är just inne i ögat hos Slottsskogens pigga invånare: sälar, pingviner, älgar, ... Ett annat exempel är solljus som bryts i en buktig vattenyta (om det går vågor på vattnet) som kan fokuseras i vattnet.

**(b)** Stimulerad absorption av fotoner är det som vi vanligen kallar enbart absorption. Det är en mycket vanlig process där infallande ljus tillför energi till ett material (t.ex. genom att få en elektron i en atom i materialet att gå till en bana med högre energi). Samtidigt "försvinner" den foton som stimulerade processen så att ljusets energi minskar – ljuset dämpas vid propagationen i materialet. Denna process kräver, förutom en foton, en atom i ett lägre energitillstånd som kan stimuleras till högre energi.

Stimulerad emission är "tvillingprocessen" till absorption. En foton stimulerar en atom i ett högre energitillstånd att avge sin extraenergi i form av en foton identisk med den som stimulerade (nettoresultat blir två fotoner). Denna process kräver, förutom en foton, en atom i ett högre energitillstånd som kan stimuleras till lägre energi. Sådana atomer är generellt mycket sällsyntare i naturen än atomer i det lägre energitillståndet eftersom det inte finns någon effektiv pumpprocess (energitillförsel) som kompenserar för att exciterade atomer snabbt förlorar energi via en mängd (spontana) processer. Dessutom, även om vi på något sätt skulle få många atomer med högre energi krävs det en "onaturligt" hög koncentration av stimulerande fotoner för att inte atomen i det högre energitillståndet ska hoppa ner till det lägre via spontan emission långt innan stimulering hinner ske. Med andra ord krävs pumpning och effektiva speglar för att hålla kvar fotonerna i närheten av atomerna – två villkor som sällan uppstår spontant i naturen.



## 4. Mer koherent? Tema: Mars vs. Sirius

**(a)** Tidskoherensen bestäms av ljusets bandbredd, dvs det våglängdsintervall som strålningen ligger inom. Sirius lyser med svartkroppstrålning motsvarande ca 9000°C, vilket är mer än den "gula" solen, och har alltså ett ännu vitare sken. Sirius strålning täcker alltså hela det synliga området i ungefär lika hög grad. Mars lyser inte med eget ljus, utan reflekterar solljuset. Pga ytmaterialiet på Mars (järnoxid=rost) är reflektionen starkast i det röda området. Ljuset från Mars är alltså inte lika starkt i hela det synliga området utan har en topp i rött. Dess bandbredd  $\Delta\nu$  är alltså något mindre än Sirius, och koherenstiden  $\tau_c$  därför högre ( $\tau_c \approx 1/\Delta\nu$ ). Ljuset från Mars torde alltså vara något mer tidskoherent än det från Sirius, även om det i båda fallen handlar om så korta koherenstider att begreppet knappast är meningsfullt (koherenstid av storleksordningen periodtid hos E-fältets svängningar).

**(b)** Rumskoherensen bestäms av den inkoherenta ljuskällans (vinkel-)storlek sett från observatören,  $\theta_{obs}$ ,

$$l_s \approx \frac{\lambda}{D_{källa}} L = \frac{\lambda}{\theta_{obs}}$$

Enligt texten går det att se att Mars är en skiva, och till och med detaljer på ytan, med teleskop på Jorden. Stjärnor är däremot alldeles för små för att framträda som skivor - det är därför man måste mäta deras rumskoherens i en "stellar interferometer" för att få fram deras diameter. Mars upptar alltså en mycket större vinkel  $\theta_{obs}$  än Sirius, sett från Jorden och ljuset från Mars har därför mycket mindre koherenslängd. Ljuset från Mars har mycket lägre rumskoherens.

## 5. Farligare? Tema: Solljus på näthinna

**(a)** Solljusets intensitet ändras som  $\sim 1/L^2$ , där  $L$  är avståndet från solen. Detta inses eftersom arean av en sfär med solen i mitten ökar som  $\sim L^2$  och effekten (intensitet gånger area) genom sfären måste vara oberoende av  $L$  (om vi inte har absorption). Om vi antar att man har samma pupillstorlek på Jorden och Mars ändras alltså solljusets effekt in på pupillen (intensitet gånger pupillarea) som  $P_{in} \sim 1/L^2$ . Å andra sidan ändras diametern på bilden av solen på näthinnan som  $D_{bild} \sim 1/L$ , och alltså arean av bilden på näthinnan som  $A_{bild} \sim 1/L^2$ . Detta resonemang, som bygger på geometrisk optik, gäller om solen fortfarande är tillräckligt nära för att avbildas som en skiva och inte en punkt. Och det torde väl vara klart att eftersom solen på Mars är mer än hälften så stor som på Jorden (eftersom avståndet till solen är mindre än dubbelt så långt) är den fortfarande synlig som en skiva.

Eftersom den infallande effekten på pupillen fördelar sig över bilden på näthinnan blir alltså intensiteten på näthinnan

$$I_{näthinna} = \frac{P_{in}}{A_{bild}} = \text{oberoende av } L$$

Med andra ord, den lägre intensiteten hos solljuset när det kommer till Mars kompenseras av att det fördelar sig på en mindre area på näthinnan. Det är lika farligt på Mars som på Jorden! Läger vi sen

till effekter som den oundvikliga absorptionen i jordatmosfären som dämpar solljuset en aning, samt att pupillen kanske är något större på Mars eftersom soljuset är svagare där, kan vi till och med argumentera att det är lite farligare på Mars, men det handlar inte om någon dramatisk skillnad.

**(b)** En kikare förändrar två saker jämfört med att betrakta objektet med blotta ögat: den förstörar bilden av objektet på näthinnan och den samlar in mer ljus från objektet (eftersom objektivlinsen är större än pupilldiametern). Den insamlade effekten är proportionell mot arean; om vi antar att vi har en pupilldiameter på 3 mm (starkt solljus) och enligt uppgift en objektivdiameter på 25 mm, samlar kikaren alltså in  $(25/3)^2 = 70$  gånger mer effekt från solen än vårt blotta öga. Det kan tyckas farligt! Men eftersom denna effekt fördelas över en större bild på näthinnan så får vi också en "utspädningseffekt". Kikaren förstörar 10 gånger (vinkelförstoring), alltså blir bilden av solen på näthinnan 10 gånger större än utan kikare, och arean av solbilden alltså  $10^2 = 100$  gånger större. Men 70 gånger mer effekt fördelat på en 100 gånger större yta ger faktiskt en mindre intensitet, med en faktor 0.7. Så kikaren är något mindre farlig (dock ingen jätteskillnad)!

Man kan fråga sig om allt ljus kikaren samlar in går genom pupillen. Man kan enkelt visa att en kikare som förstörar 10 gånger också komprimerar infallande ljusstråle med en faktor 10. Ljusstrålen som lämnar kikaren har alltså en diameter på  $25\text{mm}/10 = 2.5$  mm. Den tar sig alltså precis genom en 3mm stor pupill. Om pupillen är mindre än 2.5 mm blir alltså beräkningarna något mer komplicerade, men slutsatsen blir ändå att använda kikare inte är signifikant farligare än att titta direkt, om man bara beaktar intensiteten på näthinnan. **Observera dock att intensiteten på hornhinnan och ögonlins blir mycket högre, liksom uppvärmningseffekten på hela ögat inklusive näthinnan. Titta aldrig direkt mot solen med kikare!**

## 6. Diverse jämförelser Tema: I optiklabbet och andra mörka lokaler

**(a)** Nästan allt ljus på en 3D biograf är cirkulärpolariserat (ljuset ut från projektorerna – en för vardera höger- och vänsterbild – via filmduken fram till 3D-glasögonen), där rotationsriktningen avgör om ljuset kommer att ses av vänster eller höger öga. På en vanlig bio visas bara en enda bild på skärmen, som uppfattas av båda ögonen. Här utnyttjas inga polarisationseffekter, så det finns ingen anledning att skicka ut cirkulärpolariserat ljus. Och även om projektorn av någon anledning gör det kommer ljuset som sänds ut från filmduken att vara opolariserat eftersom vanliga skrovliga ytor inte bevarar polarisationen. (3D biografier har en speciell "metallisk" filmduk – t.ex. av märket Silver Screen – som bevarar polarisationen.) Så cirkulärpolariserat ljus är bäst (och mest) på 3D bio!

**(b)** Nästan jämt i kursen antar vi paraxiell propagation, som leder till formler och metoder som har högst precision för ljus som sprids/propagerar i små vinklar från rakt-fram-riktningen. Gitterekvationen är dock ett av undantagen. Ekvationen härleds på en föreläsning, och av denna härledning framgår att vi inte antar något om att vi bara har små vinklar. Så gitterekvationen borde ge samma precision i förutsägelser av vinklar hos både låga och högre diffraktionsordningar. Detta faktum tas också upp i Labb D, när ni ska bestämma våglängden hos en okänd laser med hjälp av ett gitter.

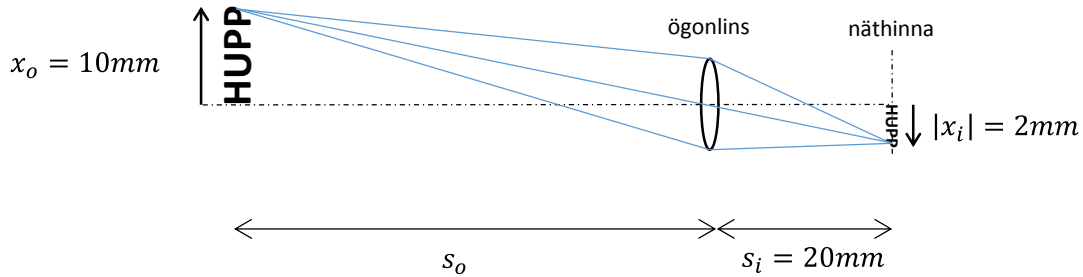
**(c)** Fundamentalmodens (och andra moders) effektiva index beror förenklat på hur mycket moden "känner" av kärnan och höljet. I singelmodfibern, med smal kärna på bara ett par  $\mu\text{m}$  diameter,

tränger fundamentalmodens fält långt ut i höljet, som har ett lägre brytningsindex. Effektiva brytningsexponenten blir därmed lägre. I multimodfibern har kärnan större diameter och fundamentalmoden är i mycket högre grad lokaliserad i denna, med sitt högre brytningsindex. Effektiva brytningsindexet blir alltså högre. I det exempel vi körde i HUPP5 var  $n_{eff} = 1.5002$  för fundamentalmoden i singelmodfibern (ja, det är ju den enda mod som existerar där) och  $n_{eff} = 1.5054$  för fundamentalmoden i multimodfibern.

**(d)** Ja. En neonatom har många energinivåer (elektronbanor) som elektronerna kan hoppa mellan och därmed förlora olika stora mängder energi  $\Delta E$ , som svarar mot våglängden (färgen) hos fotonen som sänds ut. I helium-neon(HeNe)-lasern, som används i Labb D, är det just Ne-atomerna som sänder ut ljus. Ne-atomerna blir högt exciterade genom att krocka med exciterade He-atomer och faller tillbaka till grundtillståndet genom att elektronerna hoppar ner till inre elektronbanor genom ett stort antal hopp som kan gå via olika mellantillstånd. Vid vissa av dessa hopp sänds det ut en foton, och det är dessa hopp man kan få att ske stimulerat, alltså som "laserljus". I Labb D demonstreras en röd och en grön HeNe-laser. Skillnaden mellan dessa är främst att laserspeglarna är gjorda för att ha extremt hög reflektans vid 543 respektive 633 nm våglängd (våglängdskänsliga multiskiktets Bragg-speglar). Endast för designvåglängden kommer det att byggas upp en så hög fotontäthet i kaviteten att den stimulerade emissionen blir signifikant i jämförelse med den spontana.

## 7. På näthinnan

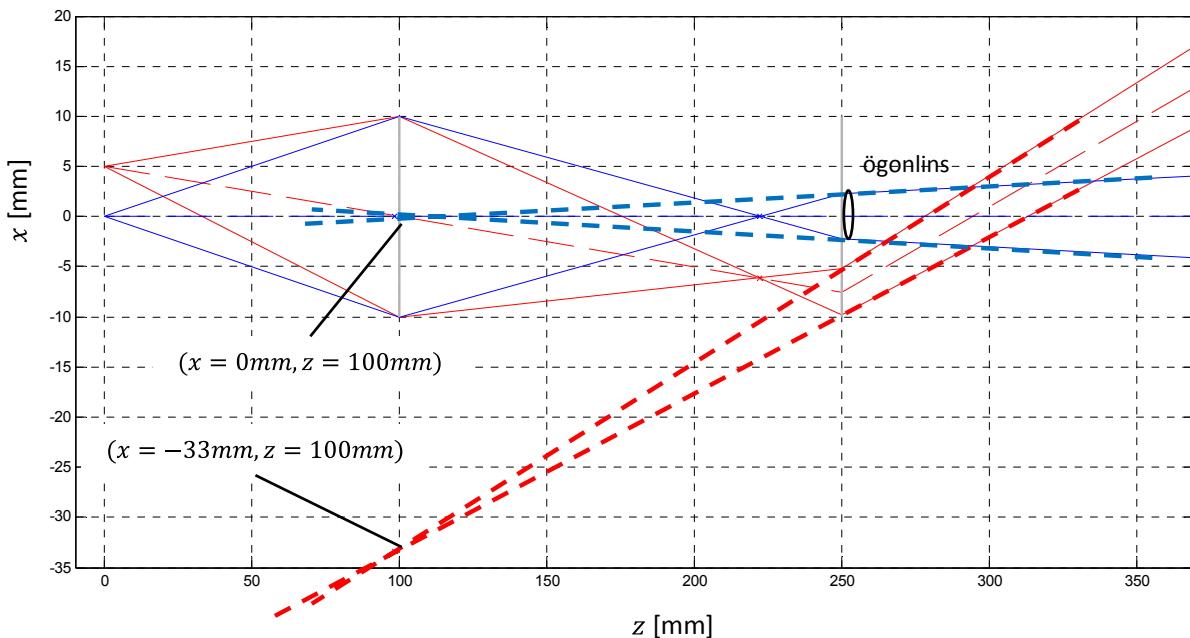
(a) Vi utläser att objektet har längden 10 mm och bilden längden 2 mm, vilket ger följande avbildningssituation i ögonlinsen



$$\frac{x_o}{s_o} = \frac{|x_i|}{s_i} \Rightarrow s_o = \frac{x_o}{|x_i|} s_i = \frac{10\text{mm}}{2\text{mm}} 20\text{mm} = 100\text{mm}$$

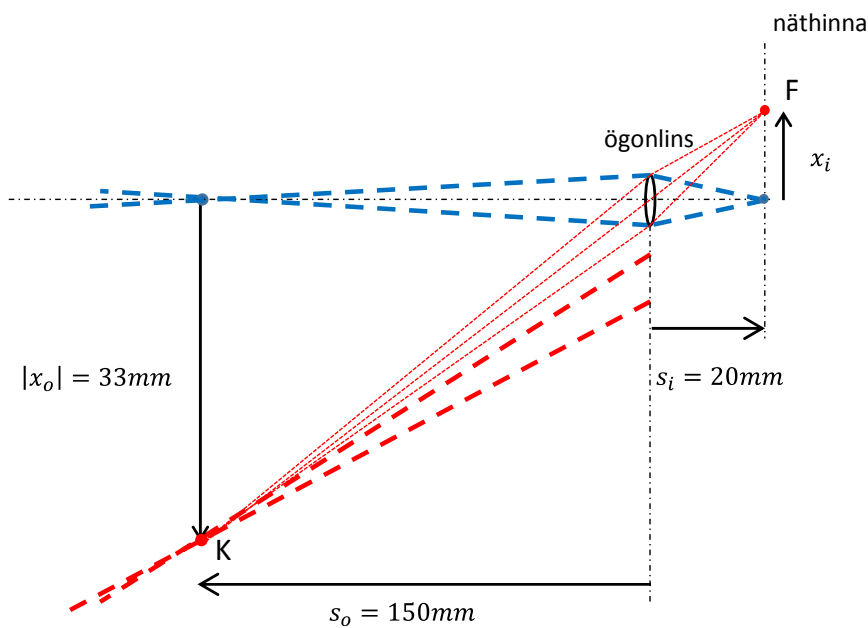
Personen ser alltså skarpt ända ner till ett minsta avstånd 100 mm från objektet.

(b) Ögat upplever ljuset efter att det passerat lins 2. För att ta reda på vilka punktkällor det "blå" respektive "röda" ljuset kommer ifrån förlänger vi respektive ljuskon bakåt tills strålarna går samman i en punkt. Det gör vi genom att använda linjal i den givna strålgångsfiguren.



För ögat, som är placerat omedelbart till höger om lins 2,  $z=250$  mm, tycks alltså punktkällorna ("objektet") ligga  $250-100=150$  mm framför ögat. Eftersom ögat kunde fokusera skarpt ända ned till 100 mm från objektet är det inga problem för linsen att fixa en skarp bild på näthinnan i detta fall.

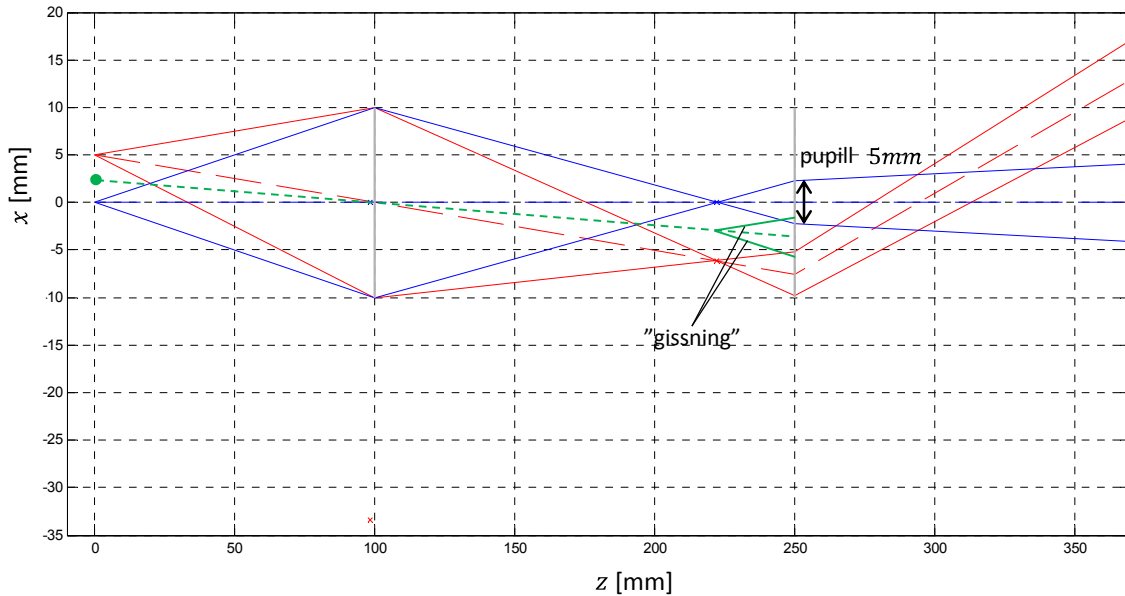
(c) Från föregående skiss får vi att ögat upplever följande avstånd till "objektets" punktkällor



P.g.a. linsernas begränsade diameter har ljuskonen från de punktkällor som upplevs till höger om lins 2 en liten vinkel. Det betyder att den röda punktkällan inte skickar något ljus genom pupillen, och alltså inte uppfattas av ögat. Men för att bestämma förstoringen tar vi ändå och beräknar var på näthinnan fokus F skulle hamna från den röda punktkällan, genom att dra en linje genom K och linscentrum fram till näthinnan.

$$\frac{x_i}{s_i} = \frac{|x_o|}{s_o} \Rightarrow x_i = 33\text{ mm} \frac{20\text{ mm}}{150\text{ mm}} = 4.4\text{ mm}$$

Vi ser att den röda punktkällan svarar mot en punkt på objektet som ligger 5mm från origo, mellan "U" och första "P", mitt i ordet HUPP. Hela ordet HUPP har en längd på 10mm på objektet. I bilden på näthinnan upptar den alltså  $\frac{10\text{ mm}}{5\text{ mm}} \times 4.4\text{ mm} = 8.8\text{ mm}$ . Tittar man direkt på texten som i (a) blir HUPP-bilden 2mm. Förstoringsfaktorn jämfört med direktobservation blir alltså  $8.8\text{ mm}/2\text{ mm} = 4.4$ .



**(d)** Vi ritat en grön punktkälla på avståndet 2.5 mm från origo på objektet. Vi gör en intelligent gissning av hur ljuskonen ser ut framför ögat. Vi ritat också ut pupillen, diameter 5mm, skalenligt. Vi ser att endast ytterst lite "grönt" ljus kommer in genom pupillen. Vi kan alltså inte överhuvudtaget se mer av objektet än ca 2.5 mm från origo, det betyder att vi bara kan se första bokstaven "H". Och även den kommer att ha blivit mycket mörk i punkterna längst från origo eftersom bara en liten del av ljuset från punktkällan kommer fram till näthinnan. I själva verket ser vi att denna förmörkning av bilden börjar nästan direkt när man går ut från origo i objektplanet, eftersom ljuskonen från en punktkälla på objektet är nästan exakt lika stor som pupillen, när den når fram till ögat. Minsta avvikelse ifrån origo för en punktkälla på objektet gör att pupillen inte blir belyst över hela sin area – ljusstyrkan på näthinnan minskar. Bilden på näthinnan skulle kunna bli ungefär så här



**(e)** Ögonlinsen är inställd att se texten så skarpt som möjligt, d.v.s. ljuset i ett plan precis efter linsen (Plan 1), från punktkällan i origo på objektet (eller en punktkälla i vilken annan position som helst), är optimalt fokuserat på näthinnan. Då kan vi använda tumregeln om minsta spotsize, som också blir storleken av PSFen i avbildningen.

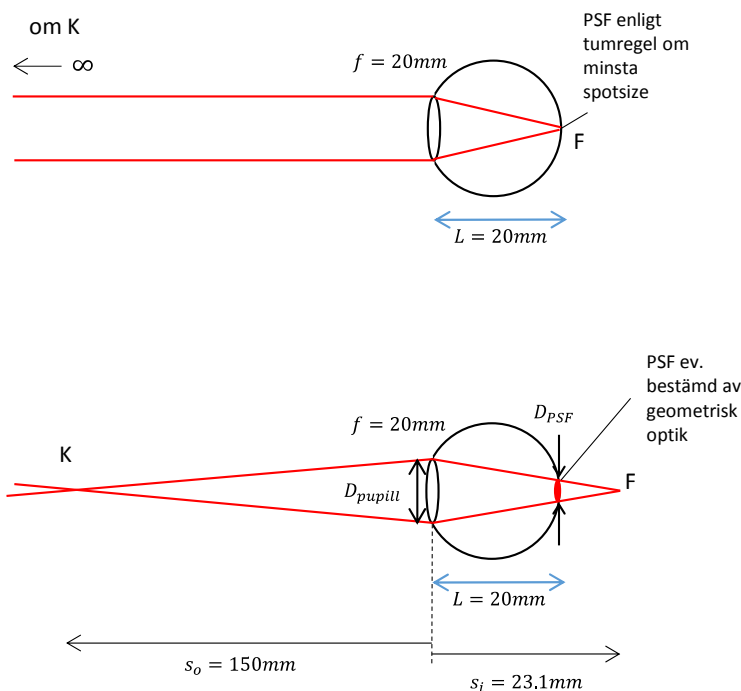
Ljusets utbredning i Plan 1 kan aldrig vara större än pupillen, men kan vara mindre om ljuskonen från punktkällan inte belyser hela pupillen. För punktkällan i origo har vi dock sagt att ljuskonen precis belyser hela pupillen. Då har vi alltså

$$\text{PSF-storlek} \equiv D_{spot} = \{D_1 = D_{pupill}\} = \text{const} \frac{\lambda}{D_{pupill}} L \approx 2.44 \frac{550\text{nm}}{5\text{mm}} 20\text{mm} \approx 5\mu\text{m}$$

Eftersom bredden på bokstävernas staplar tycks vara ca  $0.5\text{mm}=500\mu\text{m}$ , att döma av bilden av objektet, utgör övergångsområdet bara någon procent. Bokstäverna (dvs bokstaven H, som är den enda vi ser) blir inte märkbart suddiga, alltså.

För mer perifert belägna punktkällor är bara en del av pupillen belyst så att  $D_{pupill} > D_{belyst}$  där  $D_{belyst}$  är storleken av det belysta området på pupillen.  $D_{spot}$  blir alltså större och texten därmed suddigare. Det har dock knappast någon märkbar effekt, dels därför att suddigheten ändå är liten jämfört med bredden på bokstaven H:s staplar, dels därför att kontrasten går ner i periferin.

**(f)** Ögat är permanent inställt på att se skarpt på oändligt avlägsna föremål, vilket betyder att ögonlinsen alltid har fokallängden 20 mm. Detta är det övre fallet i bilden nedan.



Men för observatören ser objektets punktkällor ut att ligga mycket närmare ögat, på avståndet  $s_o = 150\text{mm}$ . Ljuset från punktkällan blir alltså inte fokuserat på näthinnan utan ett stycke bakom. Avståndet  $s_o$  till fokus från ögonlinsen blir

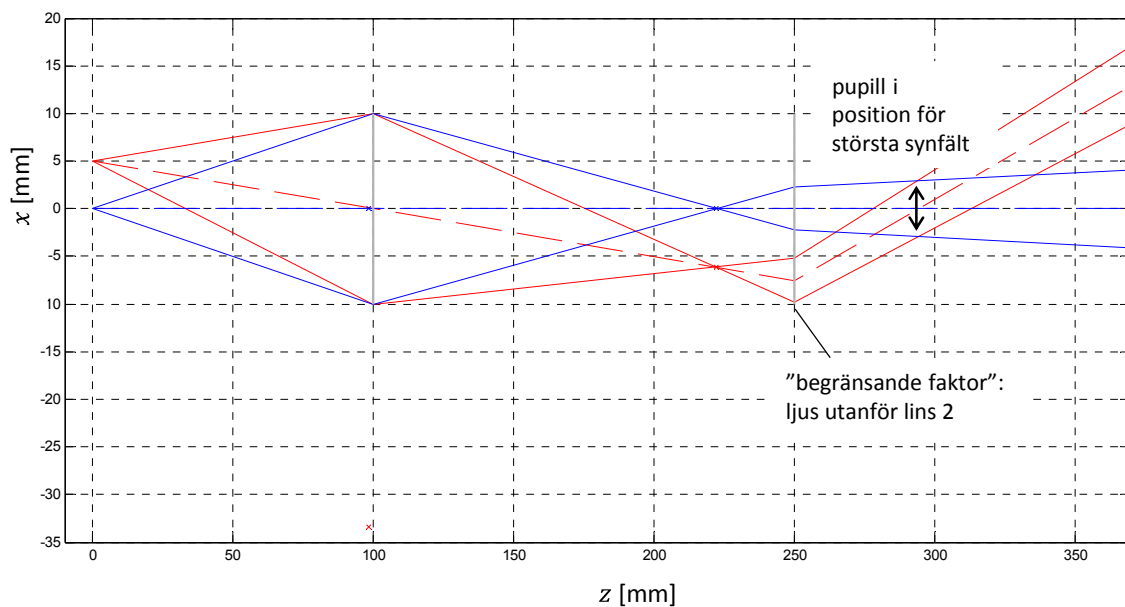
$$\frac{1}{f_{\text{öga}}} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \Rightarrow \frac{1}{20\text{mm}} = \frac{1}{150\text{mm}} + \frac{1}{s_i} \Rightarrow s_i = 23.1\text{mm}$$

Det ljus som fokuseras av ögonlinsen bildar en kon av strålarna som är på väg mot fokus, vars cirkulära område på näthinnan har en diameter  $D_{PSF}$  som fås med likformiga trianglar

$$\frac{D_{PSF}}{D_{pupill}} = \frac{s_i - L}{s_i} \Rightarrow D_{PSF} = 5mm \frac{23.1mm - 20mm}{23.1mm} \approx 0.7mm$$

vilket är mycket större än den undre gräns som sätts av ljusets vågnatur, dvs  $D_{spot} \approx 5\mu m$ , så vårt resultat bryter inte mot några naturlagar. Suddigheten i bilden är av storleksordningen diametern på PSFen, så det betyder att suddigheten är av samma storleksordning som bokstävernas staplar. Så bokstäverna staplar ser ännu mer suddiga ut än hos den illustrerande bilden på tentatesen, men "HUPP" torde fortfarande vara läsbart utan större problem eftersom bokstäverna som helhet är betydligt större än  $D_{PSF}$ .

**(g)** Genom att placera ögat ca 40 mm ifrån lins 2 får vi som vi ser ett mycket bättre synfält. Vi ser nu "det röda ljuset" med full styrka eftersom pupillen nu är helt belyst av ljuset från denna punktkälla. Vi ser med andra ord bokstäverna "HU" med full intensitetskontrast. Det som i detta fall hindrar oss att se hela texten är den ändliga diametern hos lins 2. Som vi ser når det röda ljuset i princip fram till kanten på linsen. Mer perifera punktkällor på objektet kommer alltså att (delvis) skicka ljus utanför lins 2 och alltså kommer bara en del fram till pupill och näthinna, med minskande intensitetskontrast som följd för bokstäverna "PP".



En liten nackdel med att flytta ögat bakåt är att förstoringen blir något mindre, eftersom källorna K nu inte ligger på avståndet 150mm utan  $150mm + 40mm = 190mm$  från ögat (i z-led). Förstoringsfaktorn jämfört med direktobservation minskar därför från 4.4 till  $4.4 \times \frac{150}{190} = 3.5$ .



## 8. Interferens i tre dimensioner

(a) Interferensmönstret från punktkällor med slumpmässig (med fix) fasrelation kallas speckle eller specklar.

(b) Samtliga punktkällor i Plan 1 interfererar inte konstruktivt i en enda punkt (fokus) i Plan 2, eftersom de har en slumpmässig fasrelation. Så det är inte fråga om tumreglerna 3b eller 4, utan den mer generella tumregel 3, om minsta detaljstorlek (feature size) i Plan 2. Den är som sagt generell, oberoende av hur fältet ser ut i Plan 1, men den är härledd under den paraxiella approximationen. Så det förutsätts att utsträckningen av fältet i Plan 1 och 2 är mycket mindre än avståndet  $L$  mellan planen. Detta villkor är gott och väl uppfyllt i detta fall (utsträckningen av fältet i Plan 1 och 2 är  $\approx 5\text{mm}$  och  $L \approx 500\text{mm}$ ).

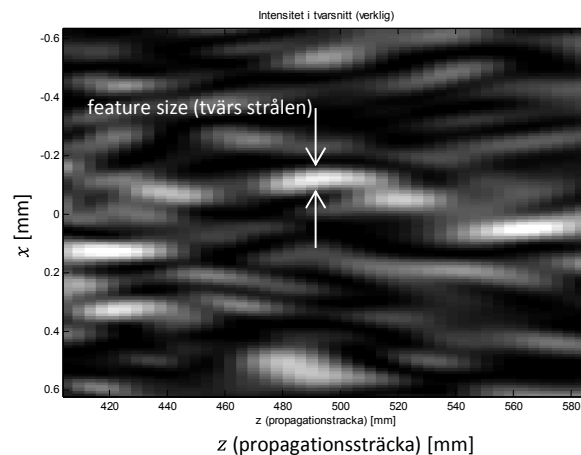
(c) Tumregeln säger att en ljus (eller mörk) detalj, i detta fall en speckle, har en minsta möjlig storlek. Storleksordningen av denna ges av tumregeln för minsta feature size  $D_f$  som

$$D_f \approx \frac{\lambda}{D} L$$

där  $D$  är utbredningen av fältet i Plan 1, vilken vi sätter till den angivna stråldiametern. Då fås

$$D_f \approx \frac{633\text{nm}}{5\text{mm}} 500\text{mm} = 63 \mu\text{m}$$

d.v.s. en minsta möjlig storlek av speckle runt 50-100 $\mu\text{m}$ .



Tittar vi på inzoomade bilden ser vi att detaljerna har en storlek ungefär som den indikerade "feature size" i  $x$ -led. Avläser vi skalan till vänster får vi kanske storleken till någonstans i närheten av 0.05-0.1 mm, d.v.s. i god överensstämmelse med formeln för minsta detaljstorlek.

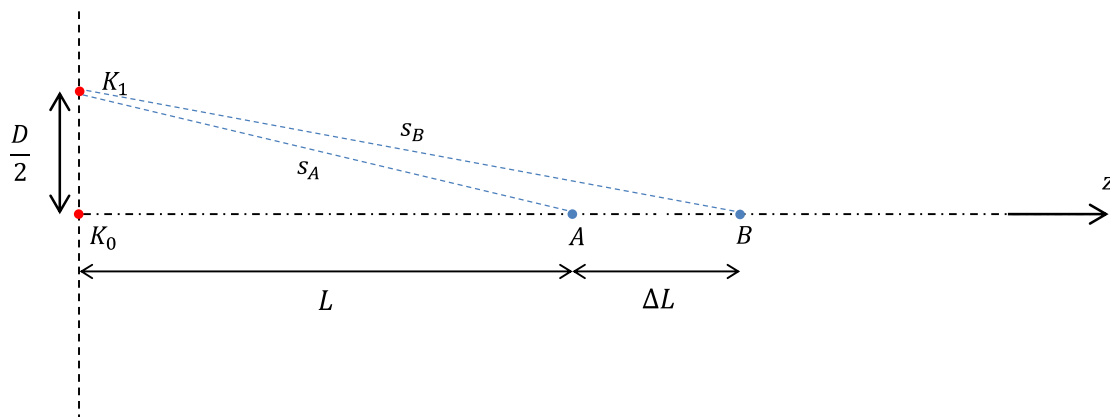
(d) Källorna  $K_0$ ,  $K_1$  och  $K_2$  är HF-källor i Plan 1. Alla punkter på  $z$ -axeln har samma avstånd till  $K_1$  som till  $K_2$ . Därför ändrar sig inte interferensen mellan dessa två källor när vi rör oss längs  $z$ -axeln. De mest "extrema" källorna i detta fall är istället  $K_1$  och  $K_0$ . Detta eftersom avståndet till källa  $K_0$  ändrar sig mest av alla källor när vi rör oss längs  $z$ -axeln, och avståndet till källa  $K_1$  ändrar sig minst av alla källor när vi rör oss längs  $z$ -axeln.

$$(e) s_A = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + L^2} = L\sqrt{1 + \left(\frac{D}{2L}\right)^2} \approx \left\{\frac{D}{2L} \ll 1\right\} \approx L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2L}\right)^2\right) = L + \frac{D^2}{8L}$$

$$(f) s_B = \{\text{ersätt bara } L \text{ med } L + \Delta L \text{ i uttrycket ovan, enligt anvisningar i uppgiftstext}\} = \\ (L + \Delta L) + \frac{D^2}{8(L + \Delta L)} = (L + \Delta L) + \frac{D^2}{8L(1 + \Delta L/L)} \approx \left\{\frac{\Delta L}{L} \ll 1\right\} \approx (L + \Delta L) + \frac{D^2}{8L}\left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right) = L + \frac{D^2}{8L} + \\ \Delta L\left(1 - \frac{D^2}{8L^2}\right)$$

$$\text{d.v.s. } s_B = s_A + \Delta L\left(1 - \frac{D^2}{8L^2}\right)$$

(g) Enligt ledningen bildar vi



- Fas i punkt A från  $K_0$ :  $\varphi_{0,A} = \varphi_0 + k \cdot L$ ; där  $\varphi_0$  är fasen hos källan  $K_0$  och  $k \cdot L$  är fasändringen hos fältet när det propagerar från  $K_0$  till A. På samma sätt är

- Fas i punkt A från  $K_1$ :  $\varphi_{1,A} = \varphi_1 + k \cdot s_A$ ; där  $\varphi_1$  är fasen hos källan  $K_1$

- Fas i punkt B från  $K_0$ :  $\varphi_{0,B} = \varphi_0 + k \cdot (L + \Delta L)$ ;

- Fas i punkt B från  $K_1$ :  $\varphi_{1,B} = \varphi_1 + k \cdot s_B$ ;

Fasskillnad mellan bidragen från de två källorna

- i punkt A:  $\Delta\varphi_A = \varphi_{1,A} - \varphi_{0,A}$

- i punkt B:  $\Delta\varphi_B = \varphi_{1,B} - \varphi_{0,B}$

Om källorna ska interferera signifikant olika i punkt B jämfört med A ska fasskillnaden mellan källorna i de två punkterna uppfylla  $\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_A + \text{"signifikant skillnad"}$

Vi sätter (ganska godtyckligt) "signifikant skillnad" =  $\pm\pi$  vilket t.ex. betyder att om de två källorna interfererar konstruktivt (i fas) i punkt A så interfereras de destruktivt (ur fas) i punkt B. (Dock kommer källorna som ligger mellan  $K_0$  och  $K_1$ , och som vi inte tar med här, att göra skillnaden i interferens mellan A och B något mindre dramatisk.) Vi får alltså

$$\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_A \pm \pi$$

Med uttrycken ovan insatta

$$\varphi_1 + k \cdot s_B - (\varphi_0 + k \cdot (L + \Delta L)) = \varphi_1 + k \cdot s_A - (\varphi_0 + k \cdot L) \pm \pi$$

Mycket kan strykas, kvar blir

$$k \cdot s_B - k \cdot \Delta L = k \cdot s_A \pm \pi$$

Sätter vi in uttrycken för  $s_A$  och  $s_B$  från (e) och (f) erhålls

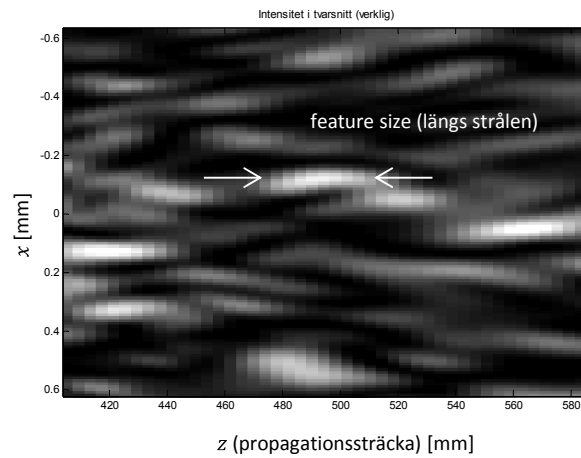
$$k \cdot \left[ s_A + \Delta L \left( 1 - \frac{D^2}{8L^2} \right) \right] - k \cdot \Delta L = k \cdot s_A \pm \pi$$
$$-k \cdot \frac{\Delta L \cdot D^2}{8L^2} = -\pi$$

där vi ser att vi måste välja minustecknet i uttrycket  $\pm\pi$ . Vårt sökta sträcka i z-led, minsta feature size  $\Delta L$ , blir alltså

$$\Delta L = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{8L^2}{D^2} = 4 \frac{\lambda L^2}{D^2} \equiv D_{fz}$$

där vi hittat på ett fint variabelnamn till minsta feature size z-led,  $D_{fz}$ .

**(h)** Mäter vi på samma detalj i fältet som i (c), fast nu i z-led får vi en detaljstorlek i storleksordningen 40mm (alltså en faktor 1000 gånger större än detaljstorleken tvärs strålen!). Specklarna är alltså extremt långsmala.



Vi sätter med spänning in värden i vår härledda formel för  $D_{fz}$  för att få minsta feature size i z-led på ett avstånd av ca 500 mm från Plan 1,

$$D_{fz} = 4 \cdot 633nm \left( \frac{500mm}{5mm} \right)^2 = 25mm$$

Möjligen skulle man kunna argumentera att  $D_{fz}$  ska vara cirka dubbla detta värde eftersom man också kan gå från punkt A längs z-axeln i riktning *mot* Plan 1 (och inte bara bort från Plan 1 som i vår härledning) en sträcka  $\Delta L$  innan något dramatiskt kan hända med interferensen mellan  $K_0$  och  $K_1$ . I vilket fall handlar  $D_{fz}$  om några tiotals millimeter, i god överensstämmelse med vår observerade detaljstorlek kring 40 mm.