

# Tentamen i Optik FFY091

fredag 8 april 2016, kl. 14:00-18:00

**Examinator och jourhavande lärare:** Jörgen Bengtsson, tel. 0730-302737, finns på plats ca kl 15 och 17 för att svara på frågor.

## Tillåtna hjälpmedel (kontrolleras av examinator)

**Böcker:** Beta Mathematics Handbook, Physics Handbook, 10 valfria utskrivna sidor ur Physics of Light and Optics

**Häften, utskrifter, anteckningar:** Föreläsningsanteckningar (även egenhändigt skrivna och kommenterade), HUPP-beskrivningar och egna, rättade, lösningar inklusive Jörgens kommentarer och av honom bifogat material, labb-pm med egna anteckningar.

**Övrigt:** Typgodkänd räknare samt linjal.

**Lösningförslag:** Ges efter tentan på kurshemsidan i pingpong.

**Rättning:** Inrapporterad inom tre veckor från tentamensdatum.

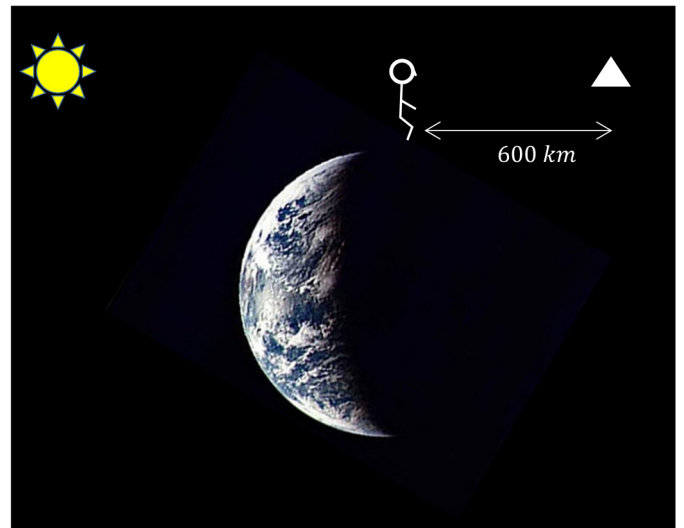
**Godkänt/betyg:** 30p, 40p och 50p, inklusive bonus, av max 60p för betyg 3, 4, resp. 5 (för bonusregler se kurs-pm på kurshemsida).

**Visning/uthämtning:** Efter överenskommelse via e-mail.

## Ord på vägen:

- Skriv din kod på alla sidor du lämnar in.
- Motivera dina steg och formulera dig klart (gärna icke-verbalt i form av skisser) – båda dessa aspekter poängbedöms.
- Gör egna rimliga antaganden där det behövs.

## 1. Ryska stjärnan – hot eller bluff?



Ett ryskt crowdfunding-projekt går (av någon anledning) ut på att placera ett reflekterande objekt i form av en pyramid i rymden, se artikeln ovan från NyTeknik. Insamlarna av pengar har utlovat/hotat med att det blir "himmels starkaste stjärna", och uppenbarligen har de fått ihop tillräckligt för att uppskjutningen ska bli av redan i år. Men som kritiska deltagare i Optik F2 ställer vi oss givetvis frågan

här är frågan

→ Blir denna pyramid verkligen ljusstarkare än den ljusstarkaste stjärnan på himlen (Sirius)?

Ljuset från Sirius är ganska precis  $10^{10}$  gånger svagare än solljuset, som har en intensitet på ca  $1000 \text{ W/m}^2$  (solarkonstanten) när det kommer fram till Jorden.

Antag vidare att solen, pyramiden och du själv är orienterade i gynnsammast möjliga positioner relativt varandra, så att du mottar maximal reflekterad intensitet från pyramiden, t.ex. ungefär som i bilden till höger.

### Reflektorvariant A

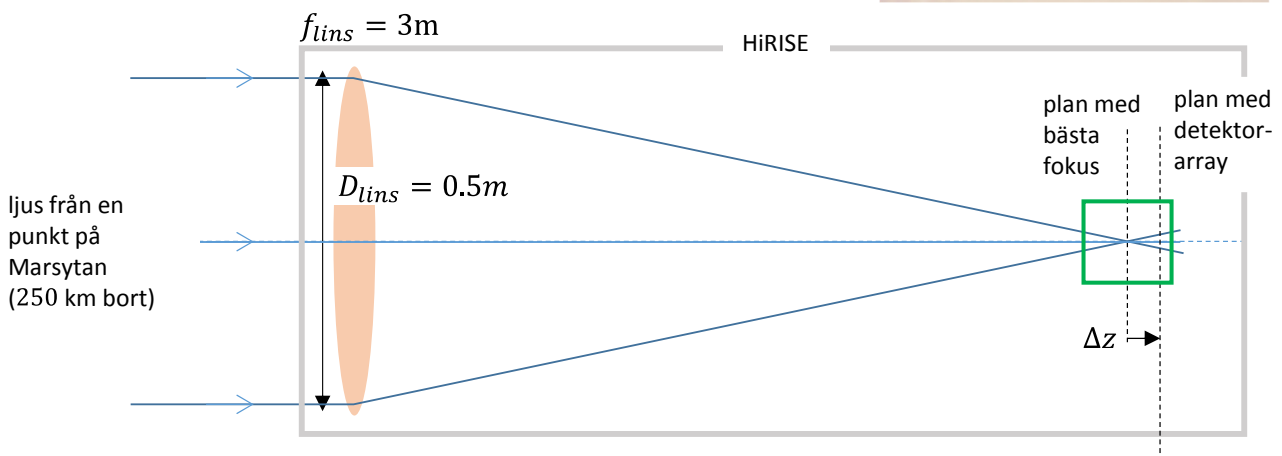
Besvara frågan under antagande att reflektorerna (sidorna i pyramiden) är gjorda av ett skrovligt, men högreffektivt (ingen absorption eller transmission), material. Du kan då tänka dig att den solbelysta reflektorn beter sig som en vanlig inkoherent ljuskälla. (5p)

### Reflektorvariant B

Besvara frågan under antagande att istället pyramidens reflekterande ytor beter sig som perfekta (100% reflekterande), helt plana, speglar och att pyramiden är orienterad så att reflexen riktas rakt mot dig. (5p)

## 2. Uppföljning till "The Martian – en bluff?"

Marstentan var en riktig Marstenta: vi ställde oss frågan om man med hjälp av HiRISE-teleskopet, som snurrar 250 km över ytan på planeten Mars, skulle kunna se fotspår i sanden på planetens yta som åstadkommit av den fiktive rymdresenären Mark Whatney från filmen/boken *The Martian*. Vi kom fram till att det var i högsta grad ett gränsfall, som åtminstone skulle kräva att teleskopet fungerade idealt. Antag att teleskopet består av endast en lins och en detektorarray med geometrin given i skissen nedan.



I apriltentans uppföljning undersöker vi först en av toleranserna för "ideal" funktion: Vi ställer frågan hur mycket avståndet  $L$  mellan lins och detektorarray kan tillåtas variera (t.ex. p.g.a. värmeutvidgning) utan att skärpan i bilden försämras nämnvärt.

**(a)** I skissen finns en grönmärkad ruta i närheten av "plan med bästa fokus", där ljusutbredningen i den geometrisk-optiska approximationen är indikerad. Rita av rutan (fast gör den större så man ser tydligare) på ditt svarspapper och markera var man kan förvänta sig att den verkliga ljusutbredningen avviker från den geometrisk-optiska approximationen. Skissa kvalitativt (utan att bry dig om rätt storlek eller skala) i din figur hur den verkliga ljusutbredningen skulle kunna se ut där den avviker från geometrisk-optiska approximationen. (2p)

**(b)** Bedöm toleransen i  $L$  genom att definiera största tillåtna avvikelse  $\Delta z_{foc}$  som det avstånd (från planet med bästa fokus) där PSFens storlek i den geometrisk-optiska approximationen har blivit lika stor som PSFens verkliga storlek i planet med bästa fokus. Markera också det avstånd som uppfyller detta villkor i din skiss från (a)! Bedöm också om ditt värde på maxavvikelsen är ett (alltför) tufft krav i praktiken – hur kan man lösa det i så fall? (3p)

**(c)** Förutom en avvikelse i avståndet lins-detektor, finns det något annat som kan göra så att PSFen blir större än sin teoretiskt minsta storlek på detektorarrayen? Är det sannolikt att vi har inflytande av detta fel i detta teleskop? (1p)

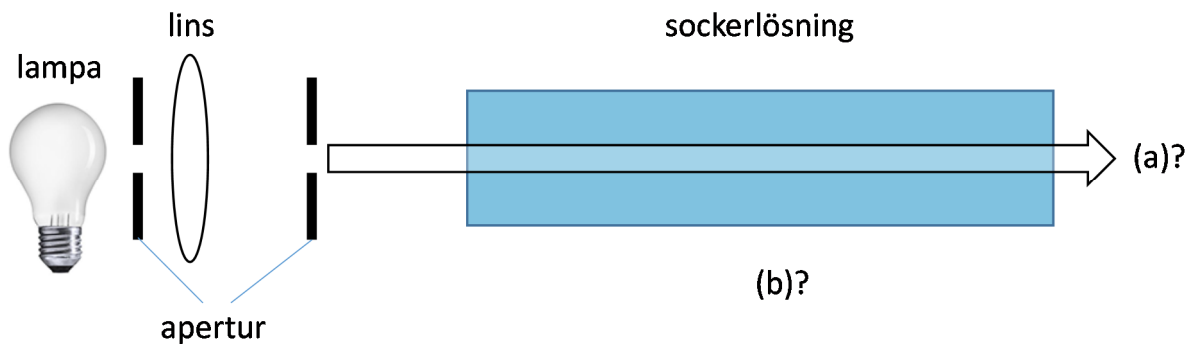
*forts på nästa sida*

För att i detalj studera hur PSFen i detektorplanet ändrar sig med  $L$  vill vi förstås göra en matlabsimulering.

**(d)** Definiera vad du menar med PSFen för den avbildning teleskopet gör! Vilka numeriska metoder skulle du använda för att beräkna hur PSFen ser ut? (2p)

**(e)** Om du faktiskt skulle sätta igång med att simulera PSFens utseende i HiRISE-teleskopets detektorplan på din laptop, och med de metoder vi använt i kursen, skulle du tyvärr snart råka ut för svåra problem. Förklara i detalj vilket problem skulle du råka ut för! (3p)

### 3. Sweet!

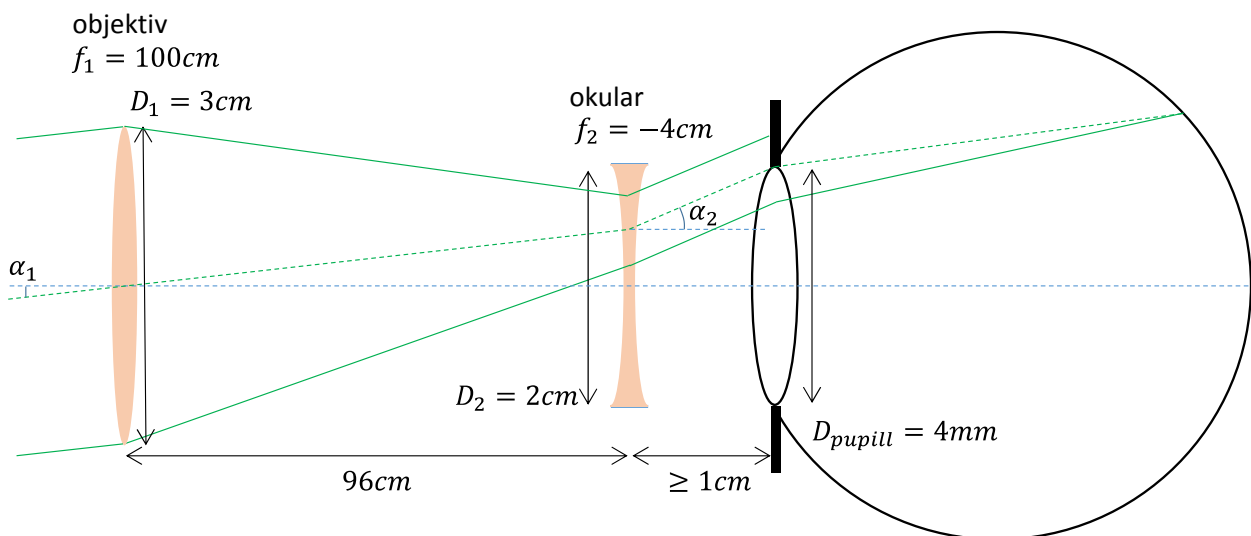


Vitt, hyfsat kollimerat, ljus från en vanlig glödlampa propagerar genom en glasbehållare som innehåller socker löst i vatten. Ingen annan primär ljuskälla finns. Vad observerar man, inklusive kort förklaring, om man undersöker polarisation och färg hos

**(a)** ... ljuset som går genom hela behållaren? (2p)

**(b)** ... det svaga ljus som finns vid sidan om glasbehållaren? (2p)

## 4. Synfält i Galileis teleskop



Figuren visar, icke-skalenligt, strålgången från en avlägsen punktkälla (riktning  $\alpha_1$  från rakt-fram-riktningen) i ett av Galileo Galileis (1564-1642) teleskop samt ögat hos en observatör.

**(a)** Med geometrisk optiks konstruktionsregler, och den tillhörande Gauss linsformel, bestäm positionen för källa och fokus för objektiv respektive okular. Rita en skiss som visar din konstruktion och resulterande strålgång genom teleskopet! Ur din konstruktion, vad blir propagationsvinkeln  $\alpha_2$  som funktion av  $\alpha_1$ ? (4p)

Av praktiska skäl kan ögat placeras som närmast 1 cm från okularet, se bilden ovan.

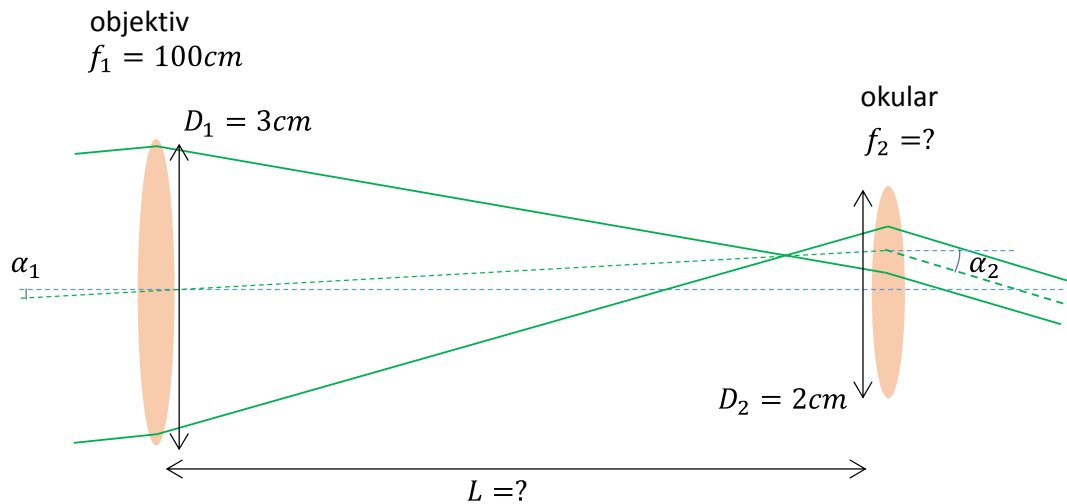
**(b)** Vad blir då synfältet, dvs vinkeln  $\alpha_1$  för det snedaste ljuset som fortfarande hamnar innanför ögats pupill? Antag att vi definierar synfältet som den snedaste ljusstråle vars centrum fortfarande går genom pupillen, se bild (alltså när ungefär hälften av strålen blockeras). (2p)

**(c)** Antag att observatören riktat in teleskopet mot fullmånen, så att rakt-fram-riktningen pekar mot månskvivans centrum. Ser observatören då hela månen (utan att flytta kikaren eller ögats position)? (2p)

**(d)** Hur stort kommer det belysta området att vara på observatörens näthinna, vid den observation som görs i (c)? (2p)

**(e)** Vid observationen i (c), kommer observatören att uppleva att bilden fyller ut ögats synfält ganska väl, eller kommer intrycket att vara att bilden utgör ett litet runt område omgivet av en massa svart? Besvara genom att jämföra med hur långt du måste sitta från en vanlig 32-tums TV för att få ungefär lika stort belyst område på näthinna. (2p)

## 5. Keplers teleskop – den vassa uppstickaren



Ett alternativ till Galileis teleskop är Keplers teleskop som snart blev den helt dominerande typen av linsteleskop. Skillnaden mot Galileis teleskop är att även okularet utgörs av en positiv lens. Figuren ovan visar strålgången i Keplers teleskop.

**(a)** Antag att Keplers teleskop har samma "förstoring" (samma värde på vinkelförstoringen  $\alpha_2/\alpha_1$ ) som Galileis kikare från uppgiften innan. Vad är då fokallängden  $f_2$  för okularet och avståndet  $L$  mellan de två linserna? (2p)

**(b)** Jämfört med Galileis teleskop har denna kikare en uppenbar nackdel för observatören (som dock är mindre allvarlig för studier av t.ex. månen), vilken? (2p)

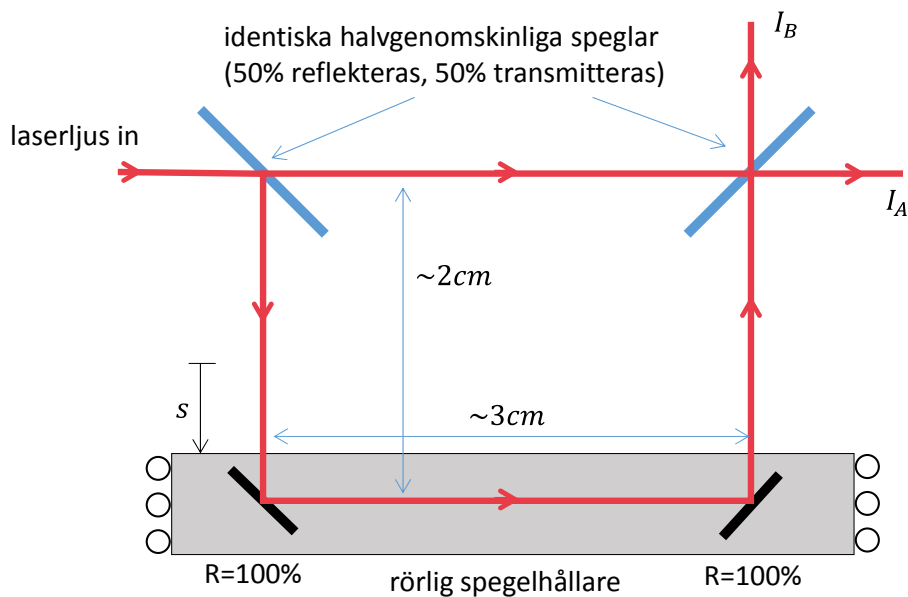
**(c)** Jämfört med Galileis teleskop har denna kikare en klar fördel för observatören (som är anledningen till dess marknadsdominans), vilken? Besvara frågan genom att först besvara de två frågorna

i. Var bör ögat placeras när man använder Keplers teleskop?,

ii. Vad ser ögat i den positionen?,

och förklara sedan varför svaren på båda frågorna är till keplerteleskopets fördel! (4p)

## 6. Mach-Zehnder-modulatore



Bilden visar principen för en Mach-Zehnder-modulator. Ljusets gångväg i nedre armen kan ändras några mikrometer genom att de två nedre speglarna sitter på en rörlig hållare vars position  $s$  kan kontrolleras piezoelektriskt med hög precision. På så sätt kan man få intensiteten  $I_A$  hos ljuset som går åt höger efter sista spegeln att variera, därav namnet modulator.

**(a)** Förklara principen för moduleringen. (2p)

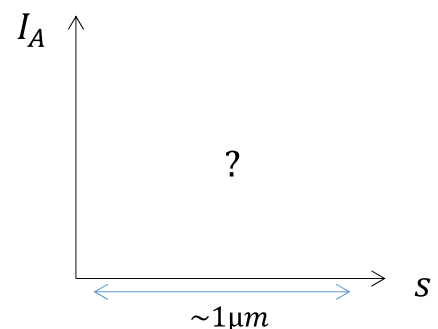
**(b)** Antag att infallande laserljus kommer från en perfekt laser med våglängden 600 nm. Skissa  $I_A$  som funktion av  $s$ , när  $s$  varierar över ca 1  $\mu\text{m}$ . (1p)

**(c)** I samma skiss, indikera hur  $I_B$  varierar (använd streckad linje så att den tydligt går att skilja från  $I_A$ ). (1p)

**(d)** Vi gör nu om försöket, den enda skillnaden är att vi ersätter den perfekta lasern med en halvledarlasern med centervåglängd 600 nm. När vi nu ändrar  $s$  ändras inte  $I_A$  det minsta. Förklara fysikaliskt varför modulatore inte modulerar! (2p)

**(e)** För att variationen av  $I_A$  ska vara tydlig när  $s$  ändras måste laserljuset som vi använder uppfylla ett villkor för en egenskap som ofta används när man karakteriserar lasern. Vilken egenskap hos lasern är det som avgör tydligheten hos variationen i  $I_A$  (den kan uttryckas antingen som frekvens eller våglängd)? (1p)

**(f)** I den Mach-Zehnder-modulator som visas i figuren, vad måste egenskapen hos laserljuset som efterfrågas i (e) ha för största värde (storleksordning) för att variationen av  $I_A$  ska vara tydlig när  $s$  ändras? Uttryck svaret i våglängd, som är det vanliga i optiksammanhang. (2p)



## 7. Kattens pupiller

Kolla våra  
krogrecensioner  
Både lyx och budget



Göteborgs-Posten

Nyheter Sport Kultur nöje Ekonomi Konsument Bostad Hälsa Mat&Dryck

GÖTEBORG VÄSTSVRIGE SVERIGE VÄRLDEN LEDARE DEBATT BLOGGAR TRAFIK VÅ

### Därför är kattens pupiller lodräta

Publicerad 9 augusti 2015 | Uppdaterad 9 augusti 2015



Tamkatten, liksom de flesta mindre kattdjur har lodräta pupiller. Detta gör det lättare att fokusera blicken på bytet. ARKIVBILD. Arkivbild: Janerik Henriksson

SVERIGE

#### Varför är pupillerna lodräta hos katter medan de är vågräta hos getter?

En ny studie ger svaret. Lodräta pupiller ger fördelar för smygande rovdjur. Horisontella ögonspringor däremot, är bra för bytesdjur.

Studien, som publiceras i Science Advances är den annons

aldrig hört talas om denna källa för vetenskapliga framsteg

Ovanstående artikel från GP berättar om en studie (möjligen av tvivelaktig vetenskaplig kvalitet) som "förklarar" de olika formerna på djurs pupiller, bl.a. de vertikalt långsträckta pupillerna hos katter. Men kanske kan du själv konstruera ett skäl till varför katter har vertikala pupiller?

Man vet att katter tenderar att vara rejält långsynta, de ser alltså avlägsna föremål tydligt, medan de inte klarar av att ändra linsformen så mycket att de ser tydligt på nära håll.

(a) När katten tittar på ett närbeläget föremål, ligger planet med bästa fokus framför (dvs mellan lins och näthinna) eller bakom näthinnan? (1p)

(b) Skissa ytterst grovt (utan att ange några mått) PSFen på kattens näthinna när det avbildade objektet är närbeläget! Låt vertikalriktningen i din skiss motsvara vertikalriktningen på kattens näthinna, och motsvarande för horisontalriktningen. Du behöver endast indikera formen av PSFen på näthinnan. (2p)

(c) Hur uppfattas en närbelägen råtta om den avbildas på näthinnan med PSFen i (b)? Skissa den avbildade råttan! (2p)

(d) Skulle alltså den vertikala pupillen då möjligen vara till fördel precis när katten ska sätta klorna i en läcker, men flyende, råtta? (1p)

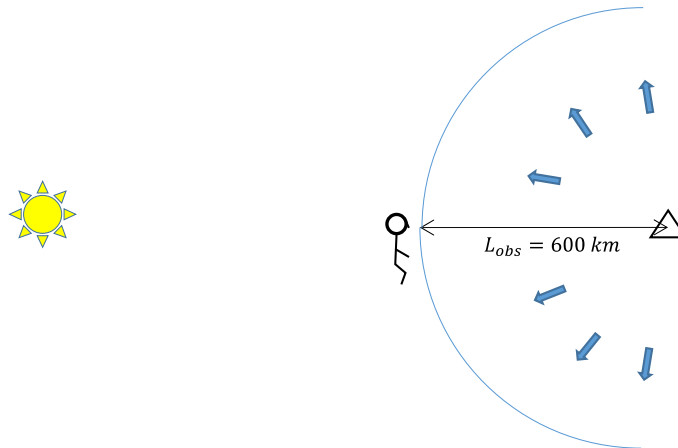
Inget djur har kommit till skada under konstruerandet av denna uppgift.



## 1. Ryska stjärnan – hot eller bluff?

### Reflektorvariant A

Under antagande om att varje punktkälla på den belysta pyramidytan är helt okorrelerad med alla övriga punktkällor fungerar ytan som en inkoherent ljuskälla. Intensitetsfördelningen från en sådan fås genom att man summerar intensitetsfördelningen från varje källa. Eftersom varje punktkälla sänder ut en sfärisk våg, ger den en konstant intensitetsfördelning på en halvsfär med radien 600 km som går genom observatörens position. Eftersom detta gäller varje punktkälla gäller det också summan av deras intensiteter: det utsända ljuset från pyramidytan fördelar sig jämnt på halvsfären.



Observatören träffas alltså av intensiteten

$$I_{\text{variant A}} = \frac{P_{\text{ut,pyramid}}}{A_{\text{halvsfär}}}$$

där den utsända effekten från pyramiden är lika med den infallande, eftersom vi inte har någon transmission eller absorption

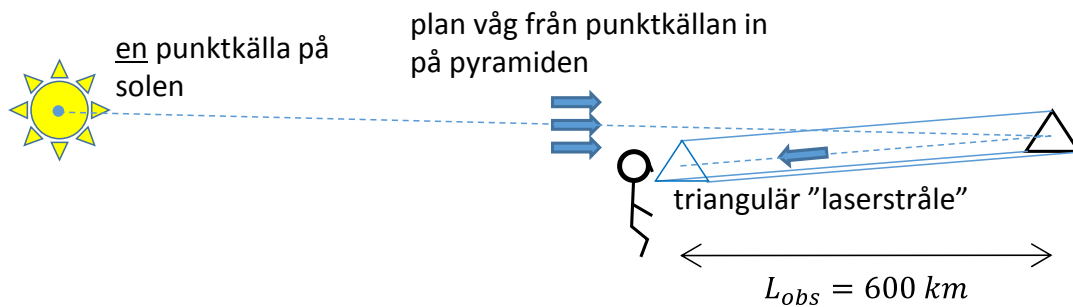
$$P_{\text{ut,pyramid}} = P_{\text{in,pyramid}} = I_{\text{sol}} A_{\text{pyramid}}$$

där  $I_{\text{sol}}$  är solljusets intensitet vid Jorden (och pyramiden), alltså solarkonstanten. Och  $A_{\text{pyramid}}$  är arean hos den solbelysta ytan hos pyramiden. Vi har alltså

$$I_{\text{variant A}} = \frac{I_{\text{sol}} A_{\text{pyramid}}}{\frac{1}{2} 4\pi L_{\text{obs}}^2} = \frac{16\text{m}^2}{\frac{1}{2} 4\pi (600\text{km})^2} I_{\text{sol}} = 7 \cdot 10^{-12} I_{\text{sol}} \approx 10^{-11} I_{\text{sol}}$$

Eftersom intensiteten från Sirius  $I_{\text{Sirius}} = 10^{-10} I_{\text{sol}}$  enligt uppgiftstexten, är alltså ljuset från pyramiden ungefär en faktor 10 gånger svagare än ljuset från Sirius. (I den traditionella "omvända" logaritmiska magnitudskalan för stjärnors ljusstyrka betyder en faktor 10 att pyramiden är ungefär 2.5 magnituder svagare än Sirius, vilket ger den en ljusstyrka på ca +1 magnituder, eftersom Sirius har en magnitud på ca -1.5. Pyramiden skulle därmed vara fullt synlig för blotta ögat på en mörk natthimmel, faktum är att den skulle komma ungefär på plats 20 bland himlens ljusstarkaste stjärnor.)

## Reflektorvariant B

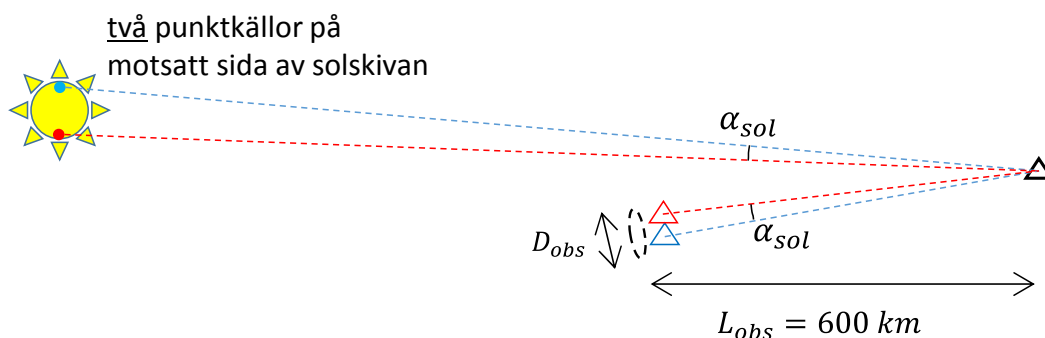


Om vi först betraktar en punktkälla ("laser") på solen sänder den ut en sfärisk våg som har propagerat så långt när den nått fram till Jorden att den blivit plan över pyramidens spegelyta. Spegelytan "skär ut" en triangulär del av den plana vågen och skickar den i riktning mot observatören. Detta ljus är alltså en laserstråle med triangulärt tvärsnitt och plana vågfronter när den börjar propagera från pyramiden. Strålen har alltså minsta möjliga divergens (ty plana vågfronter), med divergensvinkeln  $\theta_{min}$ , så att om vi befinner oss i fjärrfältet skulle stråldiametern ges av tumregeln

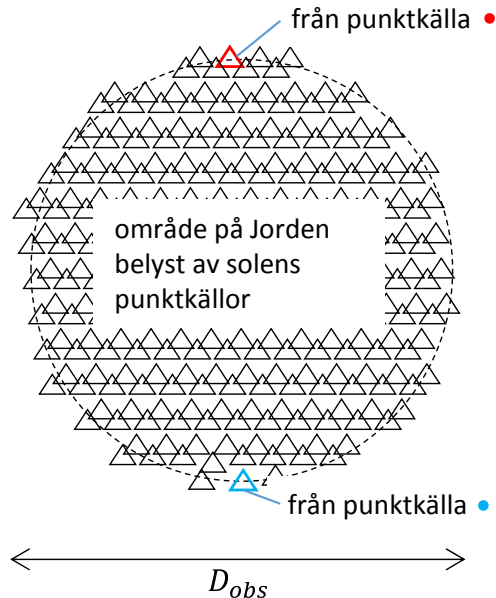
$$D_{stråle} = \theta_{min} L_{obs} = \frac{\lambda}{D_{start}} L_{obs} \approx \frac{550 \text{ nm}}{4 \text{ m}} 600 \text{ km} = 0.1 \text{ m} < D_{start} \Rightarrow \text{Felaktigt antagande!}$$

där våglängden sattes till någonstans mitt i det synliga spektrumet, och den reflekterade ytans utsträckning (lika med startfältets utsträckning  $D_{start}$ ) antogs vara ca 4 meter, vilket borde vara en god approximation om vi antar att pyramidytan inte är väldigt långsmal, eftersom arean på ytan uppges vara 16 kvadratmeter. Eftersom resultatet av vår beräkning ger att (den icke-fokuserade) strålen har en mindre stråldiameter efter propagation än vad den har vid starten, måste vårt antagande om att vi befinner oss i fjärrfältet vara fel: strålen har alltså inte hunnit expandera nämnvärt på sin färd från pyramiden till observatören, utan har i stort sett samma triangulära tvärsnitt med samma storlek som vid pyramiden.

Detta betyder dock inte att det totala ljuset från satelliten bara kommer att lysa upp en liten triangel på jordytan: vi måste göra samma sak som ovan för alla punktkällor på solen. Och eftersom ljuset från dessa har lite olika infallsvinkel på pyramidytan, har laserstrålarna ut från pyramidytan motsvarande lite olika propagationsriktningar. Så de kommer att belysa lite olika positioner på jordytan:



där  $\alpha_{sol} \approx 0.5^\circ$  är den synvinkel solen upptar från Jorden. Tar vi med alla punktkällor inser vi att de kommer att belysa ett cirkulärt område på jordytan med en diameter



$$D_{obs} = \alpha_{sol} L_{obs} = 0.5 \frac{\pi}{180} 600km = 5km$$

Eftersom varje punkt i det belysta området får sitt ljus från punktkällor inom ett litet område på solytan ("litet" i förhållande till hela solytan) utgör det belysta området på Jorden en avbildning av solen, trots att vi inte har någon lins i systemet. Det är samma princip som den primitiva hålkameran (pinhole camera) använder sig av; i detta fall är "hållet" den reflekterande ytan på pyramiden, och sedan propagerar man tillräckligt långt för att infallande ljus från olika riktningar ska separera. Som alltid vid avbildning med pinhole camera är dock inte avbildningen optimalt skarp: hade den reflekterade ytan istället haft en mycket svagt sfärisk form med krökningsradie på  $2L_{obs} = 1200km$  (!) hade vi haft en vanlig, optimalt skarp, avbildning. (Detta exempel visar att vårt antagande om helt plana ytor över en så stor yta som pyramiden nog är tämligen orealistiskt. En mer realistisk bucklighet hos ytan skulle leda till att den perfekta triangulära formen försvinner under propagationen, och vi skulle säkert få en stråle som hade expanderat och blivit betydligt större än  $D_{start}$ . Så länge som strålen skulle vara betydligt mindre än  $D_{obs}$  så gäller dock våra beräkningar om intensiteten från pyramiden.)

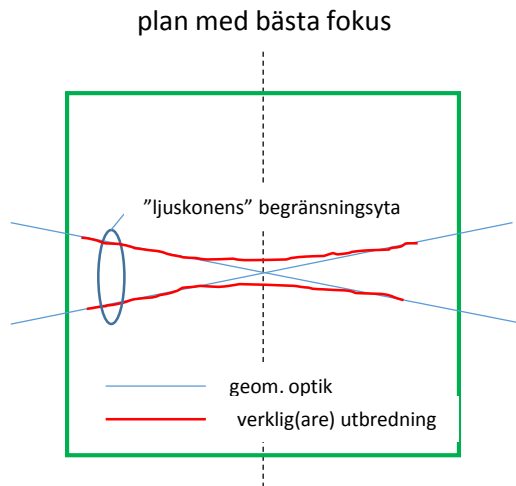
Återstår alltså att beräkna intensiteten  $I_{variant B}$  på ljuset från pyramiden om man blir träffad av direktreflexen, alltså om observatören befinner sig i det  $D_{obs} = 5$  kilometer stora belysta området på jordytan. Solljusets in-effekt på pyramiden fördelas alltså i detta fall inte på en stor halvsfär utan på detta mycket mindre område på jordytan, dvs

$$I_{variant B} = \frac{I_{sol} A_{pyramid}}{\pi (D_{obs}/2)^2} = \frac{16m^2}{\pi (5km/2)^2} I_{sol} = 8 \cdot 10^{-7} I_{sol} \approx 10^{-6} I_{sol}$$

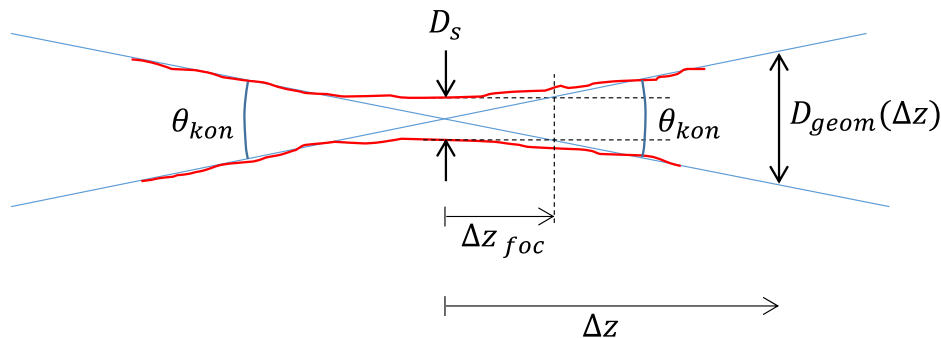
alltså en faktor 10000 gånger starkare än Sirius!! Detta svarar mot en magnitud på ca -11.5, vilket är nästan lika ljusstarkt som månen! Dock rör sig pyramiden snabbt relativt observatören så man skulle bara se något som blinkar till på himlen under den korta tid som det belysta området sveper förbi observatörens position. Och redan i dag finns vanliga satelliter som kan ge (oavsiktliga) blink av reflekterat solljus med en ljusstyrka så hög som -9 på magnitudskalan.

## 2. Uppföljning till "The Martian – en bluff?"

(a) Nära fokus gäller inte geometrisk optik – som ju säger att ljuspricken blir oändligt liten i fokus. Istället får strålen grovt sett en trumpetform med i stort sett konstant stråldiameter ("strålmidjan") i ett område kring fokus. Vi bortser i vår fina bild från att man får en del interferenseffekter (diffraktion) eftersom detta är ljus från en enda punktkälla (laser) som kan interferera med sig själv; framförallt är detta märkbart nära fokus där man tex kan få svaga ringar runt centralstrålen (Airy-mönster).



(b) Vi antar att allt ljus interfererar konstruktivt i fokuspunkten ("bästa fokus"), vilket det gör om linsen är tillräckligt bra. Då är stråldiameteren minsta möjlig där, och ges av tumregeln för minsta spotsize  $D_s$ . Vi har situationen som visas i figuren, där  $D_{geom}(\Delta z)$  är stråldiameteren i den geometrisk-optiska approximationen sträcka  $\Delta z$  från planet med bästa fokus



"Fokaldjupet"  $\Delta z_{foc}$  definieras enligt uppgift som

$$D_{geom}(\Delta z_{foc}) = D_s \Leftrightarrow \theta_{kon} \Delta z_{foc} = \left\{ \theta_{kon} = \frac{D_{lins}}{f_{lins}} \right\} = const \frac{\lambda}{D_{lins}} f_{lins}$$

där vi denna gång väljer tumregelskonstanten  $const = 2$  eftersom å ena sidan vi har ett Airy-mönster i fokus (direkt efter linsen har strålen konstant tvärsnittsintensitet, alltså uppstår ett Airy-mönster i fokus med  $const = 2.44$  om man med spotdiameter menar diametern av första mörka ringen), men å andra sidan kan tycka att den definitionen på spotdiameter är lite för generös;  $const = 2$  är sålunda en ingenjörsmässig kompromiss. Vi får då

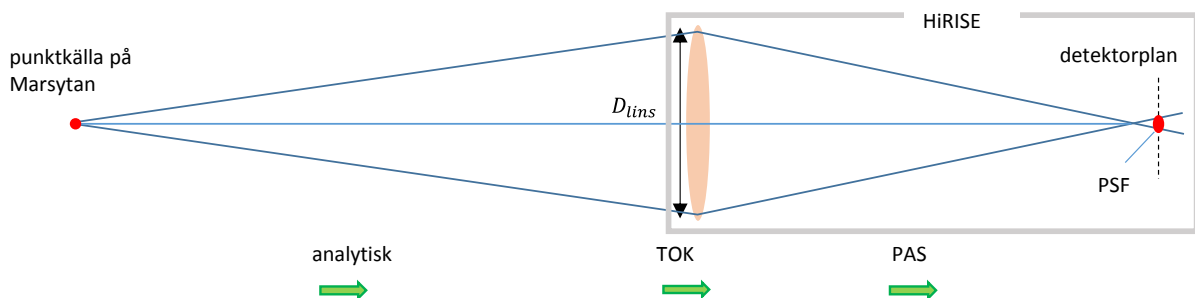
$$\Delta z_{foc} = const \left( \frac{f_{lins}}{D_{lins}} \right)^2 \lambda = 2 \left( \frac{3m}{0.5m} \right)^2 600nm = 40\mu m$$

Avståndet mellan lins och detektor (3meter) måste alltså kunna hållas konstant på några tiotals  $\mu m$  när. Detta är inte någon stor tolerans (ett hårstrå har en diameter på knappt  $100 \mu m$ ). I det verkliga teleskopet är därför detektorn mekaniskt flyttbar relativt linsen så att man alltid kan ställa in bästa avstånd – ungefär som autofokusfunktionen i din mobilkamera.

**(c)** För att få minsta möjliga ljusfläck i fokus, minsta spotsize, måste alla Huygenskällor efter linsen interferera konstruktivt i fokuspunkten. Det kräver att fasmoduleringen (fördröjningen av vågfronterna) hos linsen inte avviker från sitt rätta värde med mer än en bråkdel av  $2\pi$  (en våglängd) över hela linsen yta. Detta innebär att *formen på ytan* ska avvika med mindre än 100 nanometer från den ideala formen över en yta med 0.5 meter diameter. Detta är svårt men inte omöjligt, men i teleskopets användningsmiljö tillkommer problem som ojämn uppvärmning och spänningar i linsmaterialet pga dess fastsättning i teleskopet som kan påverka ytans form.

Om man verkligen använder en lins (och inte en krökt spegel, vilket är det man faktiskt använder i HiRISE-teleskopet) är kromatisk aberration ett ytterligare problem, alltså att *glasets brytningsindex* är våglängdsberoende så att bästa fokus bara fås för en våglängd. Man kompenserar för detta genom att använda sammansatta linser, men för en enkel lins som i vår modell av HiRISE skulle kromatisk aberration vara ett ganska allvarligt problem.

**(d)** PSFen är intensitetsfördelningen från en punktkälla på objektet (närmare bestämt punktkällan i teleskopets rakt-fram-riktning) i det plan som används som avbildningsplan (alltså i planet som detektorarrayen befinner sig). Det behöver inte nödvändigtvis vara det plan där vi har bäst fokus, som tex i figuren nedan.



Figuren visar också de metoder vi använt i HUPP3 för att beräkna PSFen i ett öga som betraktar ett objekt. Eftersom en punktkälla sänder ut en sfärisk våg är det alltid smart att göra första propagationssteget analytiskt, där fältet i ett plan framför linsen samplas i ett kvadratisk rutnät ("grid"). Därefter propagerar man det samplade fältet den korta sträckan genom pupill och lins genom att multiplicera med komponenternas fält-transmissionsfunktioner enligt TOK-modellen, och slutligen propageras detta fält till avbildningsplanet med den FFT-baserade metoden PAS. Den intensitetsfördelning vi då erhåller är (den samplade) point-spread-funktionen (PSF) i avbildningsplanet.

(e) Vi vill beräkna PSFen i detektorplanet. Detektorplanet ligger rimligen i närheten av det plan där vi har bästa fokus. PSFen storlek ges då av tumregeln för minsta spotsize  $D_s$  eftersom det handlar om koherent ljus (en punktkälla sänder ut "laserljus") som är så väl fokuserat som möjligt (förutsatt en ideal lins). Vi har

$$D_s = \text{const} \frac{\lambda}{D_{lins}} f_{lins} \approx 2 \frac{600nm}{0.5m} 3m \approx 10\mu m$$

där vi använde samma värden på parametrarna som tidigare i denna uppgift. Hela PSFen har en utsträckning på bara ca  $10\mu m$ , alltså. Om PSFen ska vara någorlunda välsamplad bör alltså samplingsavståndet i detektorplanet vara max  $1\mu m$  eller så. Om vi använder PAS för propagationen från lins till detektorplan så vet vi att samplingsavståndet i planet efter linsen (Plan 1) måste vara samma som i detektorplanet (Plan 2). Alltså har vi ett samplingsavstånd på (max)  $1\mu m$  också i Plan 1. Problemet är att linsen har så stor diameter (0.5 meter); ska vi sampla denna sträcka med ett sampelavstånd på  $1\mu m$  krävs 500000 (en halv miljon) sampelpunkter. Och vi ska ju sampla hela den tvådimensionella linsytan: alltså krävs  $500000 \times 500000$  sampelpunkter! Detta klarar ingen vanlig dator, vare sig att lagra i minnet eller att utföra FFT på: vi har väl som mest använt matriser med  $2048 \times 2048$  sampelpunkter i kursen.

### 3. Sweet!

(a) Ljuset som går genom hela behållaren har...

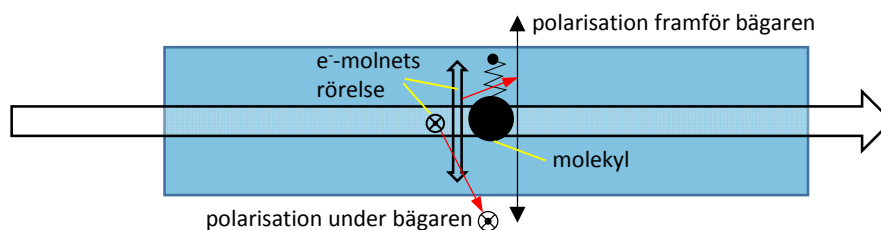
... **färg:** vitt, d.v.s. ett brett spektrum i det synliga (och infraröda) området svarande mot ljuset som sänds ut av glödlampan (som är en svartkroppstrålare med temperatur runt 2500 grader). Propagationen genom sockerlösningen har i stort sett försumbar effekt eftersom spridningen är en så svag effekt under den relativt korta propagationssträckan. Spridningen är visserligen starkt våglängdsberoende (starkare för blått än för rött), men så svag att det mesta av ljuset finns kvar av alla färger. En person med exceptionellt färgseende, och möjligen god förmåga att övertyga sig själv, skulle eventuellt säga att ljuset blivit lite rödare, jämfört med glödlampans ljus, eftersom mer av det blå ljuset spridits iväg från direktstrålen.

... **polarisation:** opolariserat, precis som ljuset från glödlampan. Sockerlösningen är visserligen optiskt aktiv, d.v.s. den roterar linjärpolariserat ljus (och allt ljus kan ses som en summa av linjärpolariserat ljus i två vinkelräta riktningar), men eftersom opolariserat ljus har lika stora (i tidsmedelvärde) fältkomponenter i alla riktningar har en rotation ingen betydelse.

(b) Ljuset som detekteras vid sidan av glasbehållaren är det spridda ljuset från glödlampsljusets växelverkan med de slumpmässigt positionerade sockermolekylerna - Rayleighspridning. Det har...

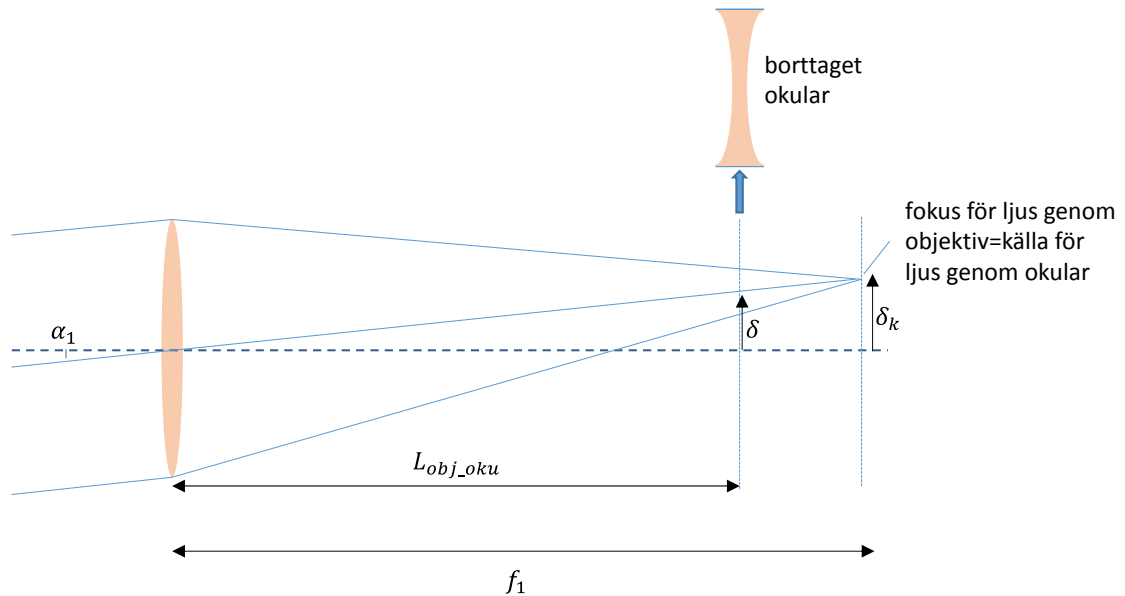
... **färg:** vitt, men med en blåaktigare nyans än glödlampans ljus. Det beror som sagt på att ljusspridningen är starkare för blått än för rött, men samtidigt innehåller glödlampsljuset som växelverkar med molekylerna mer "rött" än "blått", vilket delvis kompenserar för det blå ljusets starkare spridning, så att det spridda ljuset inte blir tydligt blått.

... **polarisation:** om man betraktar det spridda ljuset vinkelrätt mot direktstrålen är det linjärpolariserat vinkelrätt mot direktstrålens utbredningsriktning. Detta beror på att sockermolekylen funkar som en dipolantenn, med strömmen i antennen (=e-molnets rörelse) parallell med polarisationsriktningen hos direktstrålens ljus.

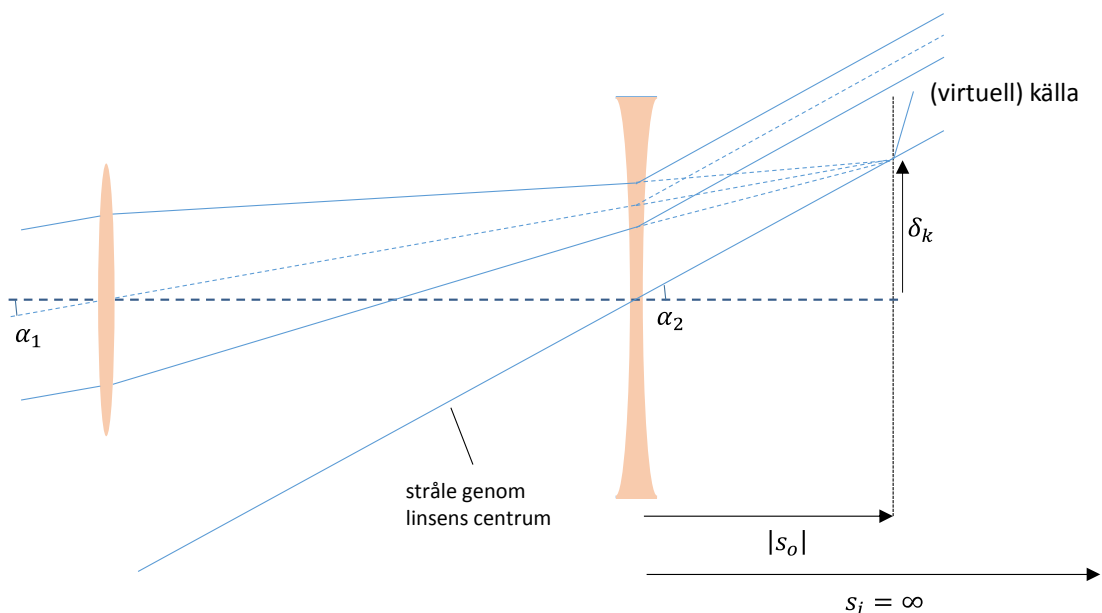


## 4. Synfält i Galileis teleskop

(a) Källans läge för propagation genom objektivet är oändligt långt bort till vänster; vi börjar med att bestämma fokuset läge för propagationen genom objektivet (vilket sedan kommer att vara källan för propagation genom okularet):



Vi ser att  $\delta_k = \alpha_1 f_1$ , där vi använt att fokus (bildplanet) ligger på fokallängds avstånd om källan är mycket avlägsen, samt regeln att en stråle genom lensens mitt inte bryts. Sätter vi tillbaka okularet fås vi följande strålgångsbild, där källa och fokus nu relaterar till okularet:



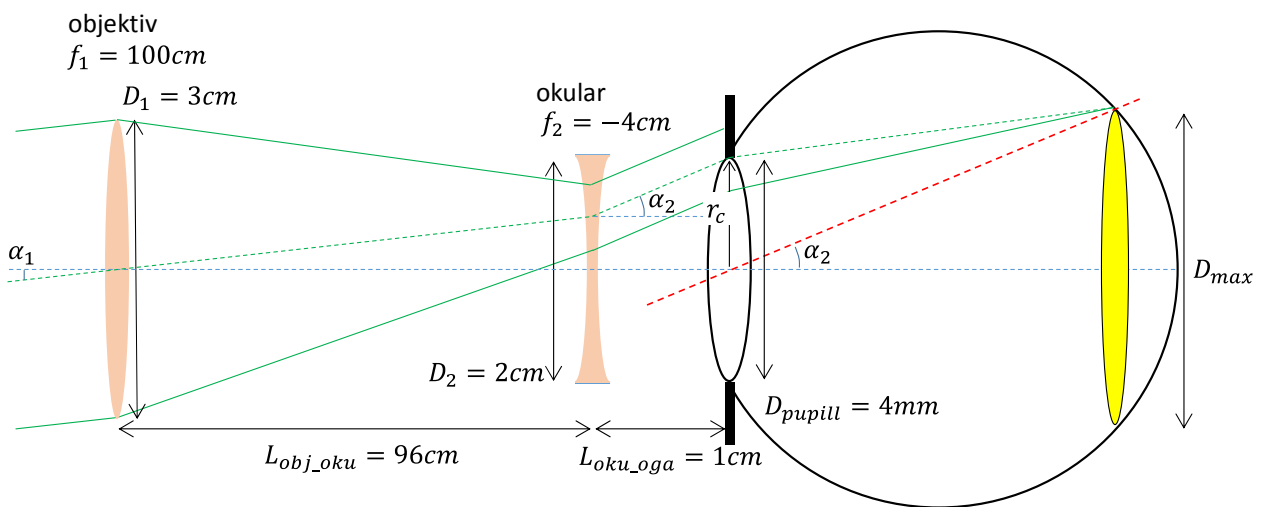
Där vi utnyttjat att  $s_o = -(f_1 - 96\text{cm}) = -4\text{cm}$  (minustecken eftersom källan ligger till höger om linsen). Eftersom  $f_2 = -4\text{cm}$  betyder det att fokuset läge  $s_i = \infty$ , som indikerats i figuren. Alla strålar ut från linsen möts i fokus – i detta fall är alltså alla strålar ut från linsen parallella med varandra. Återstår bara att bestämma vinkeln dessa strålar har ut från linsen. Det gör vi med regeln



att en stråle genom centrum på linsen inte bryts. I skissen tycks det inte gå något ljus genom centrum av okularet pga objektivets begränsade storlek, men vi kan tänka oss att det gör det genom att objektivdiametern ökas. Eftersom denna stråle är opåverkad av att vi sätter tillbaka okularet ges vinkeln på strålen efter okularet

$$\alpha_2 = \frac{\delta_k}{|s_o|} = \frac{f_1}{|s_o|} \alpha_1 = \frac{100\text{cm}}{4\text{cm}} \alpha_1 = 25\alpha_1 \equiv M_{vinkel} \alpha_1$$

("förstoringen", dvs vinkelförstoringen  $\alpha_2/\alpha_1$  är alltså  $M_{vinkel} = 25$  hos detta teleskop). Eftersom en av strålarna ut från okularet, den genom centrum, har denna vinkel så har alla strålar det, eftersom de är parallella.



**(b)** Vi kollar den sneda strålen som kommer in mot teleskopet i vinkeln  $\alpha_1$ , som i bilden ovan. Eftersom en stråle genom mitten på objektivet inte bryts, och strålarna efter okularet är parallella med vinkeln  $\alpha_2$  mot symmetriaxeln, fås att centrum på strålen har länkats av sträckan  $r_c$  från symmetriaxeln, där

$$r_c = \alpha_1 L_{obj\_oku} + \alpha_2 L_{oku\_oga}$$

Om vi tar minsta möjliga värde för  $L_{oku\_oga} = 1\text{cm}$  och villkoret  $r_c = D_{pupill}/2$  för att bestämma största möjliga  $\alpha_1$  fås ( $\alpha_2 = M_{vinkel} \alpha_1$ )

$$\alpha_{1,max} = \frac{D_{pupill}/2}{[L_{obj\_oku} + M_{vinkel} L_{oku\_oga}]} = \frac{4\text{mm}/2}{[96\text{cm} + 25 \cdot 1\text{cm}]} = 0.0017\text{rad} = 0.095^\circ$$

Galileo kan också se ljus som kommer från en punktkälla ovanför symmetriaxeln, upp till samma vinkel från axeln. Alltså är synfältet  $2\alpha_{in,max} = 0.19^\circ$ .

(c) Eftersom månen upptar vinkeln  $\sim 0.5^\circ$  och synfältet är ungefär  $0.2^\circ$  ser han alltså något mindre än halva månen (längdskala) samtidigt:



(d) Området på näthinnan där ljus kan komma från teleskopet är ett cirkulärt område med diametern  $D_{max}$ , vars begränsningslinje ges av geometriskt-optiska fokuset på näthinnan för snedast möjligt infallande stråle. Som visas i figuren (som starkt överdriver vinklarna) blir

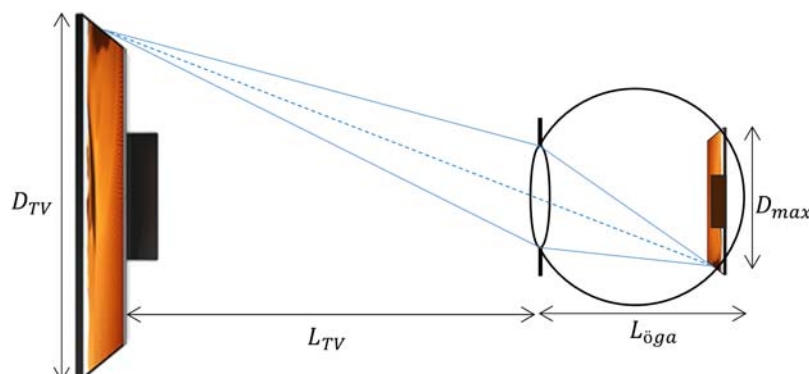
$$D_{max} = 2\alpha_{2,max}L_{\ddot{o}ga} = 2M_{vinkel}\alpha_{1,max}L_{\ddot{o}ga} = 2 \cdot 25 \cdot 0.0017rad \cdot 20mm = 1.7mm$$

där vi använt att strålarna ut från teleskopet är parallella, och att en stråle genom centrum på ögonlinsen (parallell med övriga strålar ut från teleskopet) inte bryts, samt att fokus ligger på fokallängds avstånd från linsen ( $f_{\ddot{o}ga} = 20\text{ mm}$  enligt kursens ögonmodell) där vi också antar att näthinnan ligger. Bilden överdriver vinklarna, men i verkligheten har vi paraxiella förhållanden och kan tänka oss att näthinnan är ett plan längst bak i ögat. Eftersom betraktaren observerar månen, som sänder ut ljus inom teleskopets hela synfält så blir hela det område på näthinnan som kan belysas med ljus som gått genom teleskopet verkligen belyst. Alltså är storleken av det belysta området på näthinnan en cirkelyta med diametern  $D_{max} = 1.7mm$ .

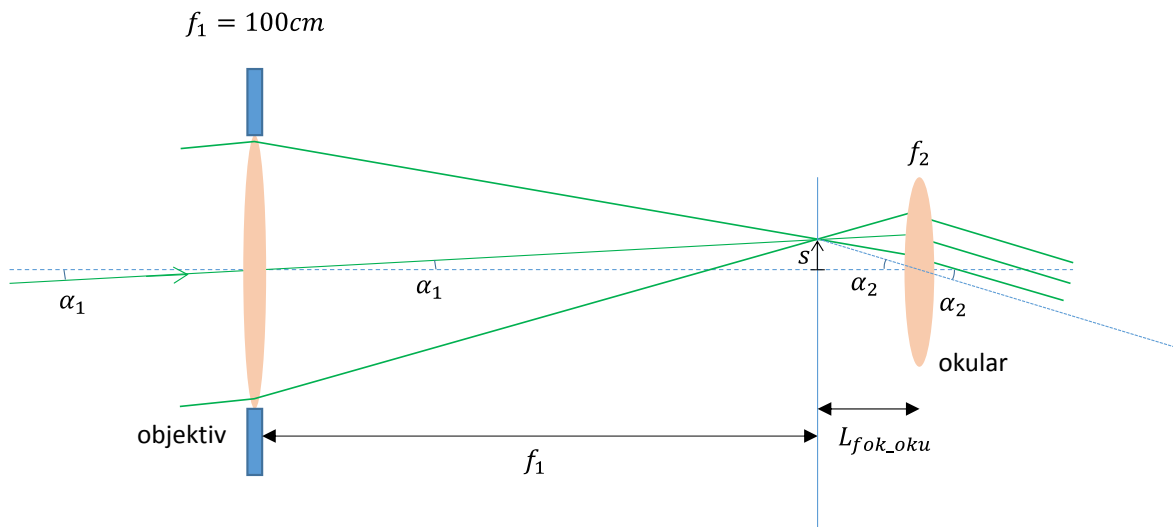
(e) Om vi direkt tittar på TVn, och vi antar att dess bild upptar  $D_{max}$  på näthinnan, se figur nedan, blir alltså med regeln om att en stråle genom linscentrum ej bryts

$$\frac{D_{TV}/2}{L_{TV}} = \frac{D_{max}/2}{L_{\ddot{o}ga}} \Rightarrow L_{TV} = \frac{D_{TV}L_{\ddot{o}ga}}{D_{max}} = \frac{32\text{ tum } 20mm}{1.7mm} \approx 9\text{ meter}$$

Egentligen är det diagonalen på TV-skärmen som är 32 tum så  $D_{TV}$  är något lägre, vilket skulle ge ett avstånd på kanske  $L_{TV} \approx 7$  meter. I vilket fall, tittar man på en TV på cirka 7 meters avstånd i ett mörkt rum är det mesta man ser "svart" medan det ljusa området (TV-bilden) bara utgör en ganska liten del. Så känns det att titta på månen i ett Galileiteleskop (det är som om TVn visade bilden av den del av månytan man ser, fast TV-skärmen borde vara cirkulär och något ljussvagare närmast kanten för att upplevelsen ska bli identisk)!



## 5. Keplers teleskop – den vassa uppstickaren



(a) För keplerteleskopet erhålls ett fokus mellan linserna, som fungerar som (reell) källa för ljuset som går genom okularet. Vinkeln  $\alpha_2$  fås genom att använda konstruktionsregeln att en stråle genom centrum av en lins inte bryts. Applicerat på ljuset från källan fås

$$\alpha_2 = \frac{s}{L_{fok\_oku}} = \frac{f_1 \alpha_1}{L_{fok\_oku}} \Rightarrow M_{vinkel} \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{f_1}{L_{fok\_oku}}$$

Om  $M_{vinkel} = 25$  som för galileoteleskopet så blir alltså  $L_{fok\_oku} = 4\text{cm}$ . Eftersom okularet ska ge parallellt ljus ut, från en källa som ligger  $L_{fok\_oku} = 4\text{cm}$  framför okularet blir alltså okularets fokallängd också  $f_2 = +4\text{cm}$ . Avståndet mellan linserna blir  $f_1 + L_{fok\_oku} = 104\text{cm}$ .

(b) Om vi betraktar en stråle som kommer in till teleskopet snett underifrån (d.v.s. från en "nedre" punktkälla på objektet) ser vi att galileiteleskopet ger en stråle ut som också ser ut (för ögat) att komma underifrån. Det betyder att ljuset fokuseras till (nästan) en punkt högt upp på näthinnan. Med andra ord blir avbildningen på näthinnan upp och ner. Detta gäller ju också för vanliga avbildningar utan teleskop, när vi tittar direkt på ett föremål. Sedan vänder hjärnan på bilden så att den verkar rättvänd. I keplerteleskopet kommer en stråle som kommer in till teleskopet snett underifrån att vändas och se ut att komma uppifrån för ögat. Fokus hamnar alltså nedanför mitten på näthinnan – bilden på näthinnan blir alltså rättvänd. Tyvärr är vår hjärna inte flexibel utan vänder även nu på bilden så att den uppfattas upp och ner. För astronomiska objekt, som månen eller galaxer, har det dock ingen större betydelse eftersom det inte finns upp eller ner i rymden ☺ Och i kikare för fågelskådning och andra jordiska observationer är det enkelt att sätta in bildvändande prismor mellan objektiv och okular för att få rättvänd bild även i keplerteleskopet (det är därför objektivet och okularet inte ligger helt i linje med varandra i de flesta kikare).

(c)

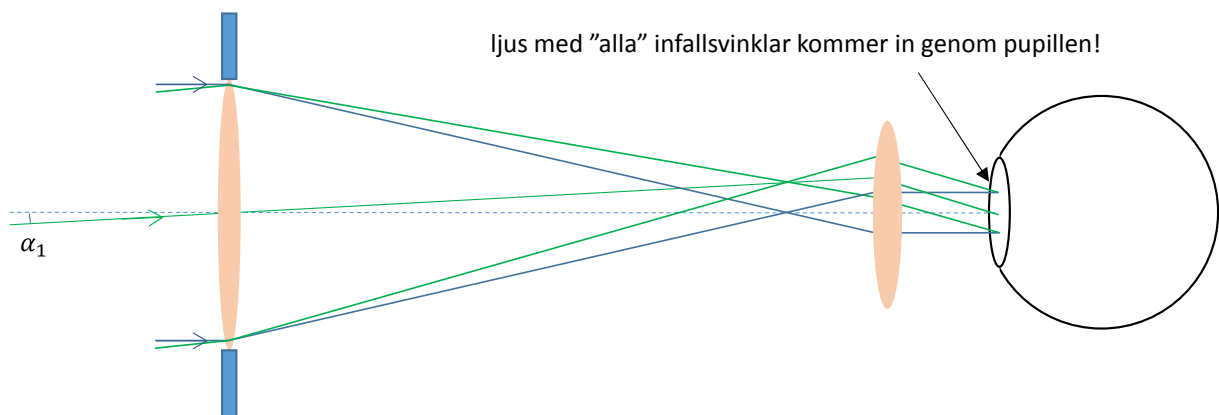
i. Teleskopet ger parallellt ljus ut, så för att få en fokuserad bild på näthinnan spelar det ingen roll hur långt från okularet ögat är placerat. Däremot spelar det stor roll för hur stort synfält vi ser. Ögat bör förstås placeras så att vi får så stort synfält som möjligt. Vi ser i bilden ovan att i keplerteleskopet bryts ljus som kommer in snett i teleskopet tillbaka mot symmetriaxeln efter okularet. Störst synfält

har vi om pupillen placeras just där det sneda ljuset passerar symmetriaxeln, se bilden nedan. För då kommer ljus med alla vinklar in genom pupillen

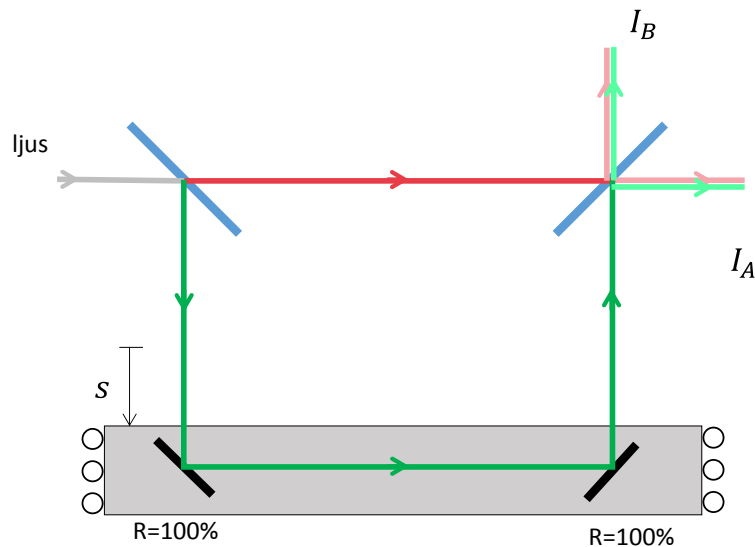
ii. Med pupillen i optimala läget enligt bilden nedan kommer godtyckligt snett ljus in på teleskopet att hamna på näthinnan, upp till den vinkel  $\alpha_1$  då ljuset "fastnar" i teleskopet (dvs då ljuset inte hamnar innanför diametern  $D_2$  på okularet). Synfältet blir alltså stort, dvs vi ser en stor del av det objekt vi studerar (t.ex. månen) utan att behöva rikta om kikaren.

Punkt i. är till keplerteleskopets fördel, eftersom det ger ett bekvämt avstånd mellan okular och öga. Galileiteleskopet, däremot, har den stora nackdelen att ljus som kommer in i sned vinkel hela tiden avlägsnar sig från symmetriaxeln när det propagerar (se bilden från uppgiften om Galileiteleskopets synfält). Därför hamnar ljuset utanför pupillen utom för mycket små vinklar  $\alpha_1$ . Störst synfält (men ändå litet) fås när man trycker ögat så nära okularet som möjligt, vilket knappast är bekvämt.

Punkt ii. är till keplerteleskopets fördel, eftersom man alltså får ett väsentligt mycket större synfält än i galileikikaren med pupillen i den optimala positionen. Den stora fördelen med ett stort synfält är inte vid själva observationen – man använder ändå bara en liten del av näthinnan runt fovea centralis för detaljstudier – utan när man ska få syn på objektet i kikaren. En svag stjärna på himlen eller en sällsynt fågel som kommer flygande är enormt mycket lättare att få in i kikaren om synfältet är stort.

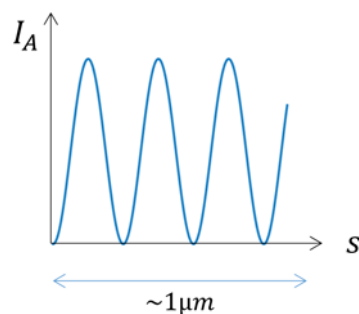


## 6. Mach-Zehnder-modulatore

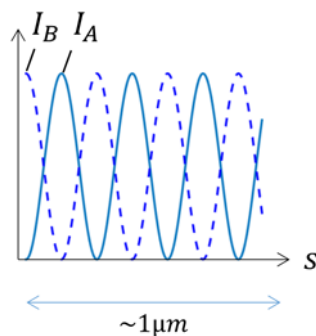


**(a)** Mach-Zehnder-modulatore bygger på interferens mellan ljuset som gått den övre vägen (rött i figuren ovan), och ljuset som gått den nedre vägen (grönt i figuren; obs att rött och grönt bara skiljer de olika gångvägarna åt, ljuset har samma våglängd); man brukar tala om den övre och undre "armen" hos modulatore. När ljuset når sista halvgenomskinliga spegeln delas den i en reflekterad och en transmitterad stråle. Det gäller både ljuset i övre armen och i nedre. Ut från sista spegeln får vi alltså fyra fältbidrag, som indikerats: två åt höger - reflekterat "grönt" och transmitterat "rött" ljus – och vice versa uppåt. Genom att ändra  $s$  ändras propageringssträckan för det gröna ljuset, och alltså dess fas när det når sista spegeln. Det betyder att även det reflekterade gröna ljuset åt höger ändrar sin fas på samma sätt (och även det transmitterade uppåt), medan det röda ljuset som transmitteras åt höger (och reflekteras uppåt) förstås har en fix fas oberoende av  $s$ . Beroende på fasan hos det gröna ljuset kan man få destruktiv eller konstruktiv interferens med det röda ljuset, och eftersom man kan ändra fasan på det gröna ljuset godtyckligt (det gröna ljusets gångväg behöver bara kunna ändras upp till en våglängd för att uppnå detta) kan man till exempel totalt släcka ut ljuset som går åt höger eftersom amplituden hos det röda och gröna ljuset (idealt) är densamma. Då kommer allt ljus som kommer in i modulatore att lämna sista spegeln i uppåt-riktningen.

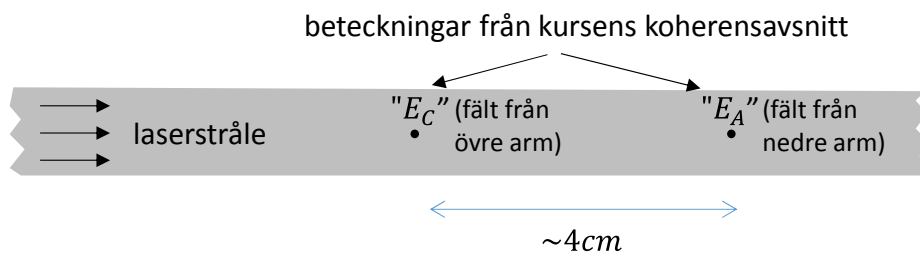
**(b)** Vi får en periodiskt varierande utintensitet  $I_A$ . Som sades i (a) går den ner till noll när det gröna ljuset är ur fas med det röda eftersom det gröna och röda ljuset har samma amplitud. Ändras sedan gångvägen ändras också fasan, och därmed interferensen, ända tills gångvägen ändrats  $\lambda$  (dvs  $s$  har ändrats  $\lambda/2$  eftersom ljuset går sträckan  $s$  både nedåt och uppåt). Då är vi tillbaka på total utsläckning. Alltså inträffar nollställena i  $I_A$  med perioden  $\lambda/2 = 300\text{nm}$  i  $s$ , som visas i grafen:



(c) Eftersom inget ljus absorberas någonstans måste intensiteten ut,  $I_A + I_B$ , vara lika med intensiteten på infallande ljuset, som är konstant (oberoende av  $s$ ). Alltså är  $I_B$  en "spegelbild" av  $I_A$  kring halva maxvärdet för  $I_A$ , så att summan  $I_A + I_B$  är konstant:



(d) Modulatorn bygger på att vi ska ha stabil interferens mellan "röda" och "gröna" ljuset, detta kräver en fix fasrelation. Vi ser dock av skissen av modulatorn att det gröna ljuset har gått ca 2+2 cm längre gångväg än det röda (den 3 cm långa sträckan mellan 100%-speglarna går ju även det röda ljuset, fast då mellan 50%-speglarna). Vid sista spegeln kombinerar vi alltså i praktiken fält från två positioner längs laserstrålen som är separerade med 2+2=4 cm:



För att ha en fix (förutsägbar) fasrelation över en sträcka av 4 cm måste alltså den temporala koherenslängden  $l_c$  vara minst av samma storleksordning. Har vi en ljuskälla med avsevärt mindre  $l_c$  varierar fasrelationen mellan det gröna och röda ljuset mycket snabbt och slumpmässigt i tiden, och en ändring av  $s$  har ingen betydelse (så länge den är försumbart liten jämfört med 4 cm) eftersom fasrelationen förblir slumpmässig. Intensiteteten  $I_A$  (liksom  $I_B$ ) blir alltså konstant (oberoende av  $s$ ) och lika med summan av intensiteterna från övre respektive undre arm var för sig (som om man blockerat ljuset i den andra armen). Eftersom det är detta vi observerar drar vi slutsatsen att koherenslängden hos halvledarlaser är betydligt mindre än 4 cm, vilket inte är ovanligt för denna typ av lasrar.

(e) Vi har redan nämnt i (d) att det är den temporala koherenslängden  $l_c$  som måste vara tillräckligt stor för att vi ska få tydlig variation hos  $I_A$ . Det är dock sällan  $l_c$  anges direkt när man beskriver en laser, istället anger man laserns bandbredd (spektralvidd) som en "suddighet" i laserljusets våglängd [nm] eller frekvens [kHz-THz]. Det är mest för extremt "rena" lasrar som bandbredd anges i frekvens, och då gäller det alltså bandbredder i kHz-MHz-området, annars används våglängd.

**(f)** Baserat på det tidigare resonemanget antar vi alltså att koherenslängden  $l_c$  är minst 4 cm för att vi ska få tydlig variation hos  $I_A$ . Det svarar mot en koherens-tid  $\tau_c = l_c/c > 4\text{cm}/c = 0.1\text{ ns}$ , och alltså en bandbredd (frekvens) på  $\Delta\nu = 1/\tau_c < 10\text{ GHz}$ . Vi gör om den lilla frekvenskillnaden till motsvarande våglängdsskillnad

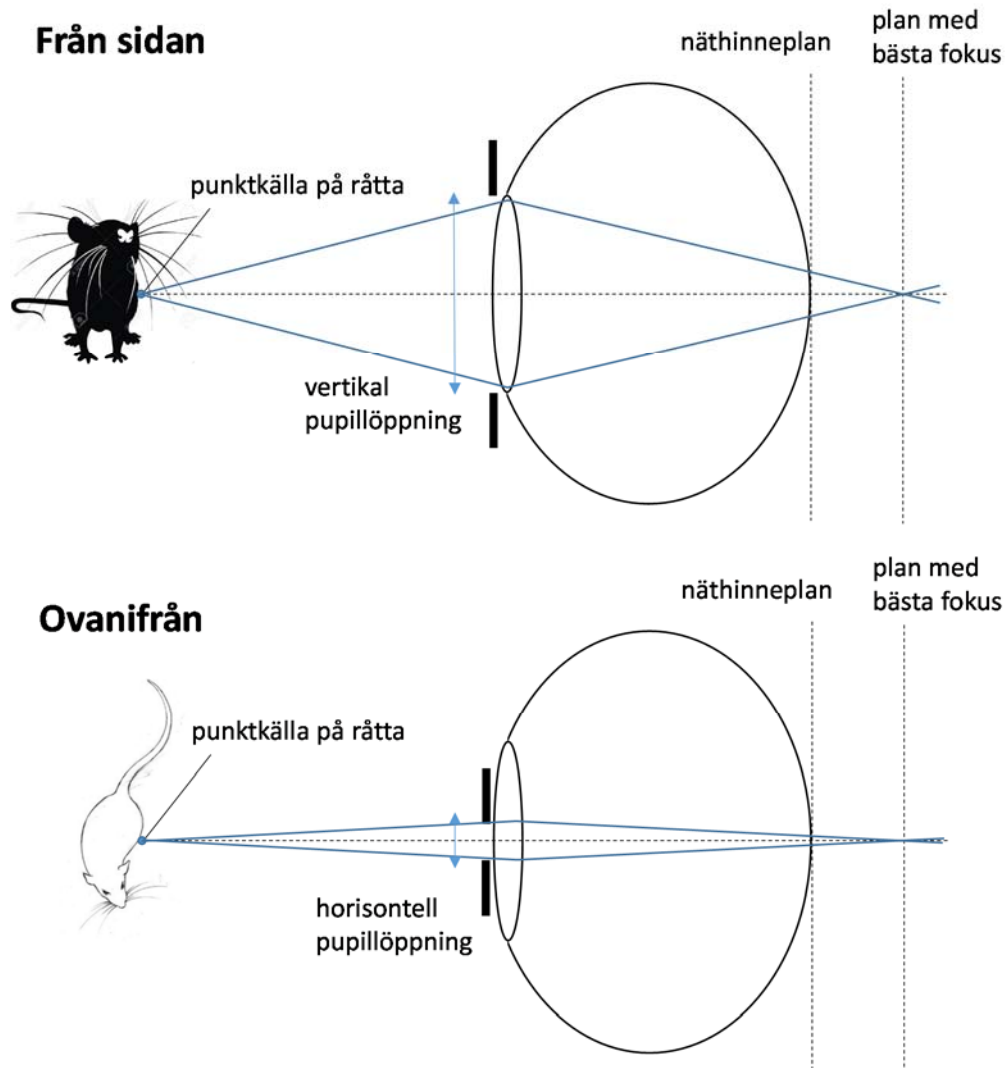
$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\Delta\nu} = \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = (-)\frac{\lambda^2}{c} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu < \frac{(600\text{nm})^2}{3 \cdot 10^8\text{m/s}} 10\text{GHz} = 0.01\text{ nm}$$

Bandbredden på lasern ("våglängdssuddigheten") bör alltså vara mindre än 0.01nm.

## 7. Kattens pupiller

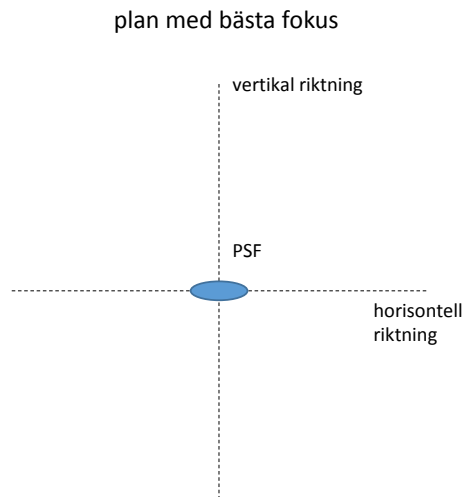
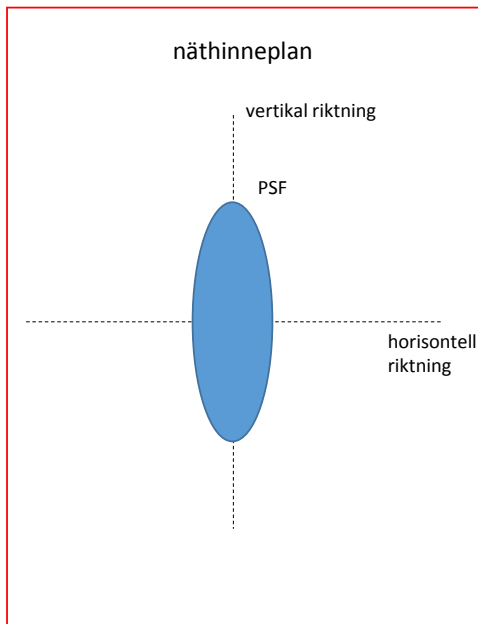
(a) Är man (katten) långsynt ser man bra på långt håll, men om man inte kan kompensera med en starkare ögonlins när objektet kommer närmare kommer den skarpa avbildningen att flyttas bakom näthinnan. Ögat är alltså "för kort" vid långsynthet, som visas i skisserna nedan.

(b) Se skisserna nedan. PSFen är ljusblaffan på näthinnan från den indikerade punktkällan på råttan. Vi antar att planet med bästa fokus ligger tillräckligt långt bort från näthinnan så att vi kan använda geometrisk optik för att ungefärligen bestämma PSFens form.



Från skisserna ser vi att PSFen får ungefär samma form och orientering som pupillen, alltså större i vertikalled och mindre i horisontalled, se skissen nedan. Detta till skillnad från om avbildningen skett i planet med bästa fokus. Där hade vi inte kunnat använda geometrisk optik, utan PSFens storlek i olika riktningar hade getts av tumregeln för minsta spotsize. Eftersom ljuset är mer utsträckt i vertikalled vid linsen kan det också fokuseras tightare, så PSFen blir smalare i vertikalled än i horisontalled, som också visas kvalitativt i skissen nedan. I denna uppgift är vi dock bara intresserade av PSFen i näthinneplanet.



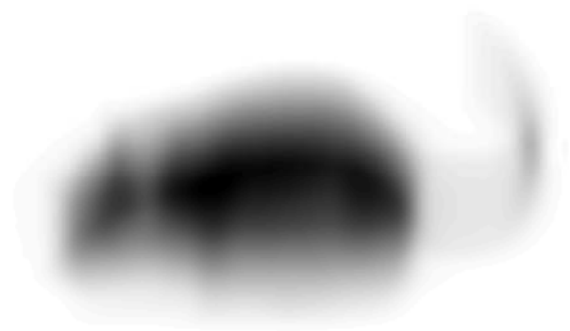


**(c)** PSFen är "spetsen på pennan som skriver bilden". Eftersom PSFen i näthinneplanet är stor blir bilden där ganska suddig. Men eftersom PSFen är extra lång i vertikal riktning blir bilden extra suddig i den riktningen. Det betyder att plötsliga förändringar hos objektet i vertikal riktning är svåra att uppfatta. "Rygglinjen" är alltså svårare att uppfatta än var råtten börjar och slutar, eftersom de senare innebär plötsliga förändringar hos objektet i horisontal riktning. En numerisk simulering, HUPP3-rutinen med vertikalt långsträckt pupill och långsynt öga, ger följande resultat, tex,

objekt



avbildning (vertikal pupill)



**(d)** Man skulle möjligen kunna tänka sig att eftersom råtten flyr i horisontal riktning (ej vertikalt, om den inte springer uppför en brant trappa) är det viktigaste att bestämma råtans position i just horisontal riktning, och då är det en fördel att kunna bestämma med större precision var råtten börjar och slutar (fram- och bakänden) snarare än var rygglinjen går. Hade katten haft "fel" pupillorientering (horisontellt långsträckt) hade den sett något som liknar bilden till höger: här ser det nästan ut som råtten blivit suddig för att den rör sig snabbt i horisontal riktning, men detta är alltså vad en orörlig råtta skulle uppfattas som hos en katt med horisontella pupiller.

avbildning (horisontell pupill)

